



Matemáticas

EXPERIMENTALES

experimentales



Matemáticas

EXPERIMENTALES

experimentales

Esta exposición virtual está dirigida a docentes de matemáticas, a sus alumnos – sobre todo a los de secundaria – y a todos los que sienten curiosidad por las matemáticas y las ciencias en general.

Esta exposición virtual presenta más de **200 situaciones matemáticas** que proponen a los alumnos experimentar, ensayar, plantear hipótesis, testarlas, intentar validarlas, buscar demostrar y debatir alrededor de las propiedades matemáticas.

Como la exposición internacional itinerante “¿Por qué las matemáticas?”, ha sido concebida y realizada por iniciativa y con la colaboración de la UNESCO, por el Centre•Sciences y el Adecum.

Como la exposición “¿Por qué las matemáticas?”, propone “experimentos de mesa” fáciles de realizar con material muy sencillo: la cabeza y las manos, papel y lápices, placas de cartón, de madera o de plexiglás, alambre y clavos... Por su aproximación numérica, propone también “experimentos de ordenador” donde se puede experimentar en un clic.

Para cada tema, encontrará:

- una introducción interactiva (“aperitivo”),
- experimentos para hacer realizar a los alumnos,
- algunas explicaciones y referencias históricas,
- algunas aplicaciones donde estas matemáticas se utilizan,
- un envío a través de palabras clave hacia la web,
- un dossier con algunas indicaciones en formato pdf para imprimir.

Dirigida sobre todo a los docentes de países del Sur, esta exposición, aunque virtual, no pretende de ningún modo acentuar la **brecha numérica**.

Por esta razón, propone a todos los que ni poseen acceso a Internet ni ordenador, imprimir o hacer imprimir estas páginas web – en blanco y negro o en color – a partir de los **documentos pdf** creados por este motivo.

* Centre•Sciences: Centro de cultura científica, técnica de la región Centro – Orléans.

* Adecum : Asociación para el desarrollo de la cultura matemáticas – Orléans.

REDESUNGEN

1. Leer la Naturaleza	4
Espirales de la naturaleza	5
Un mundo fractal	6
Cónicas en el espacio	8
2. Pavimentar un Suelo	12
El arte del embaldosado	13
Caleidoscopios	16
¿Dónde estoy?	18
3. Llenar el Espacio	34
Amontonar naranjas	35
Poliedros	37
Problemas complejos	38
4. Conectarse	52
De un único trazo	53
¡Cuatro colores bastan!	54
¿Dígame?	55
5. Calcular	69
Con la cabeza y las manos	70
Números primos	75
Imágenes digitales	77
6. Construir	82
Curvas & Velocidad	83
Curvas & Volúmenes	84
Curvas suaves	86
7. Estimar - Prever	95
¿Dos bolas rojas?	96
¡Bingo!	97
¿Y el ganador es?	98
8. Optimizar	102
Pompas de jabón	103
El camino más corto	104
La mejor forma	105
9. Demostrar	106
Pitágoras	107
Números figurativos	109
¿Es cierto?	111
10. Concluir	117
Experimente	118
Formule hipótesis	119
¡Demuestre!	120
Créditos	127

1. Leer la Naturaleza



Espirales de la naturaleza



Un mundo fractal



Cónicas en el espacio

Espirales de la naturaleza



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 rotulador, 1 ananás, 1 piña,, 1 fresa, 1 hoja de girasol, 1 higo u hoja de chumbera, 1 nautilo...

¿Cuántas espirales hay en cada sentido?



1, 1, 2, 3, 5, 8...

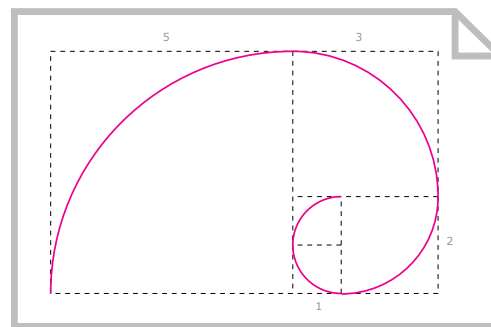
- Encuentre los elementos siguientes.
- Observe uno de estos objetos : aparecen espirales, en una y otra dirección.
- Cuéntelas.
- Encuentre otros frutos, otras flores, otras hojas, etc. que tengan la misma propiedad.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 hoja de papel, 1 regla, 1 compás, 1 lápiz y 1 par de tijeras

Dibuje una espiral de Fibonacci (o espiral de oro)

- Tome una hoja de papel cuadriculado.
- Dibuje cuadrados de lado 1, 1, 2, 3, 5, 8,...
- Trace un cuarto de circunferencia sobre cada cuadrado como se indica aquí.
- Recorte los cuadrados y colóquelos en espiral como se indica debajo.



¿Qué retener?

**1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,
21, 34, 55, 89, ...,
233, ...**

Las semillas de ciertas frutas, los pétalos de algunas flores, las hojas de ciertos árboles, se distribuyen siempre siguiendo la misma sucesión de números : cada número de la sucesión es la suma de los dos que le preceden. Así, en la piña, el ananás, la flor del girasol, etc., el número de espirales en cada sentido resulta coincidir con dos términos consecutivos de esta sucesión, llamada la **sucesión de Fibonacci**.

Para ir más lejos

Sucesión de Fibonacci :

es una sucesión de números enteros, donde cada término es igual a la suma de los dos precedentes. Esta sucesión fue descubierta por un italiano, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, hace 8 siglos.

Denotemos por F_n el n -ésimo término de esta sucesión, que posee numerosas propiedades.

F_{n+1}/F_n converge hacia un límite : $(1 + \sqrt{5})/2$ que es el número de oro,

F_n et F_{n+1} son primos entre sí y la suma de sus cuadrados se encuentra en la sucesión :

$$(F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2n+1}$$

Aplicaciones de las matemáticas

Desde **Fibonacci**, muchos se han interesado en estas propiedades de las plantas. Recientemente, los investigadores franceses **Stéphane Douady** e **Yves Couder**, han probado experimentalmente que el crecimiento de estas plantas correspondía a propiedades de los sistemas dinámicos de la física. El estudio de la forma y de las propiedades físicas de las plantas se llama filotaxia. Interesa a botánicos y biólogos.

SITIOS WEB:

<http://www.lps.ens.fr/~douady/>

<http://maven.smith.edu/~phyllo/>

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Fibonacci - Sucesión - Filotaxia - Número de oro - Espiral de oro

Un mundo fractal



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 retículo cuadrado o hexagonal, 4 ó 5 lápices o rotuladores de colores

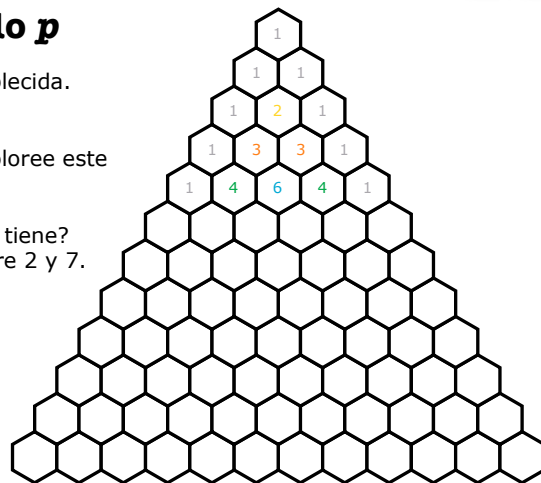
10

11

El triángulo de Pascal módulo p

- Complete el retículo siguiendo la regla establecida.
- Elija 3 colores asociados a 0, 1 y 2.
- En cada casilla, reemplace el número por su resto en la división euclídea por 3, después coloree este resto con el color correspondiente.

Observe la figura obtenida. ¿Qué propiedades tiene?
Vuelva a comenzar eligiendo otro número entre 2 y 7.

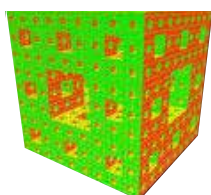
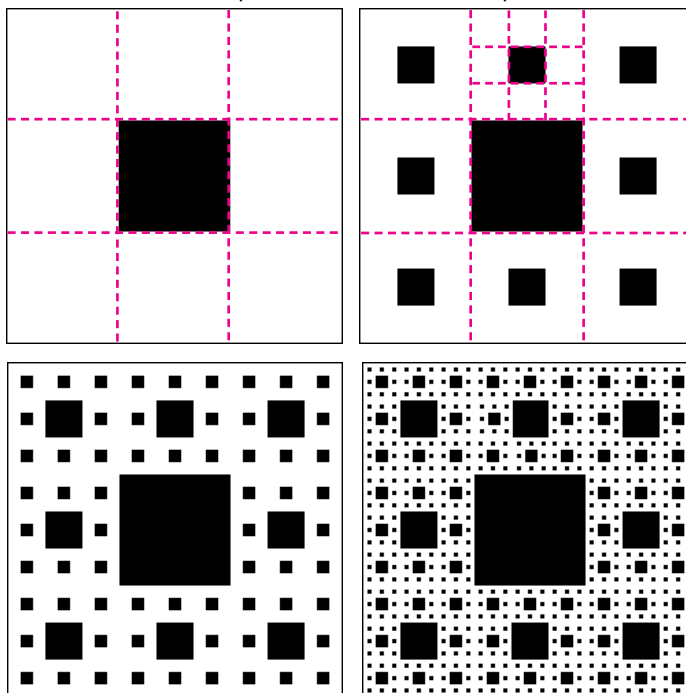


Hágalo usted mismo

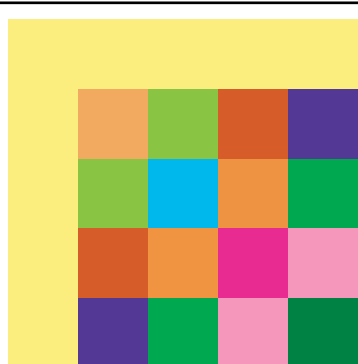
MATERIAL: 1 hoja de papel, 1 lápiz o rotulador de color

Sucesiones de figuras y sucesiones de números

- Comience con un cuadrado dibujado sobre una gran hoja de papel.
- Córtele en 3 y oscurezca algunas partes.
- Vuelva a realizar el procedimiento sobre las partes blancas restantes, etc.



Fractales en dimensión 3 :
construya de la misma manera
que arriba un cubo fractal.



¿Qué retener?

El triángulo de Pascal módulo 2

Este triángulo de números se llama **Triángulo de Pascal**. Sobre cada línea horizontal, los números que figuran son los coeficientes que aparecen en una fórmula famosa, el binomio de Newton : $(a + b)^n$.

Estos números juegan un papel importante en diversas ramas de las matemáticas (álgebra, probabilidad, ...).

Reemplazando estos números por su resto en la división por 2, se ve aparecer una imagen que se reproduce a escalas cada vez mayores. Esta imagen es un objeto fractal, llamado también "**tapiz de Sierpinski**".

La regularidad del coloreado permite hacer aparecer fácilmente cualquier error de cálculo. Este procedimiento se encuentra en los códigos correctores de errores.

Un mundo fractal



Hágalo usted mismo

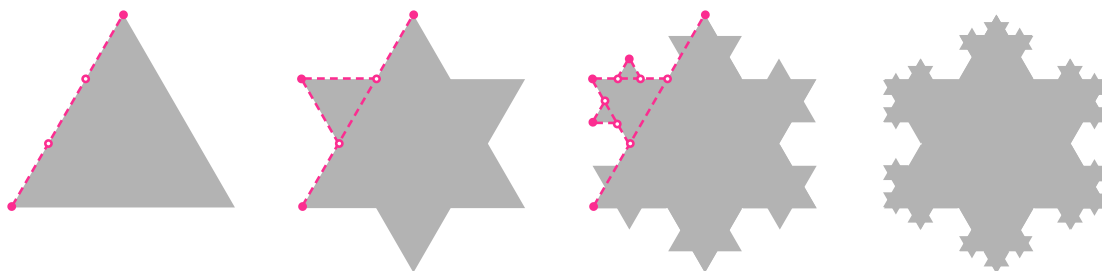
MATERIAL: 1 hoja de papel, 1 lápiz, 1 regla

Dibuje otras sucesiones de figuras fractales

- Trace un triángulo equilátero.
- Corte cada lado en 3 segmentos iguales.
- Reemplace el segmento del medio por otros dos de la misma longitud.
- Después vuelva a empezar sobre cada nuevo segmento obtenido.

Otra actividad alrededor de estas figuras fractales :

en cada etapa, calcule el perímetro y el área de la superficie y después calcule sus límites.



¿Y en la naturaleza?



Aplicaciones de las matemáticas

Los objetos fractales aparecen o se utilizan en numerosos dominios : meteorología, economía, compresión de imágenes, medicina e incluso arte... fractal.

SITIOS WEB:

<http://commons.wikimedia.org/wiki/Fractal>

PALABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Fractal - Sucesión de figuras fractales - Dimensión fractal - Mandelbrot

Cónicas en el espacio

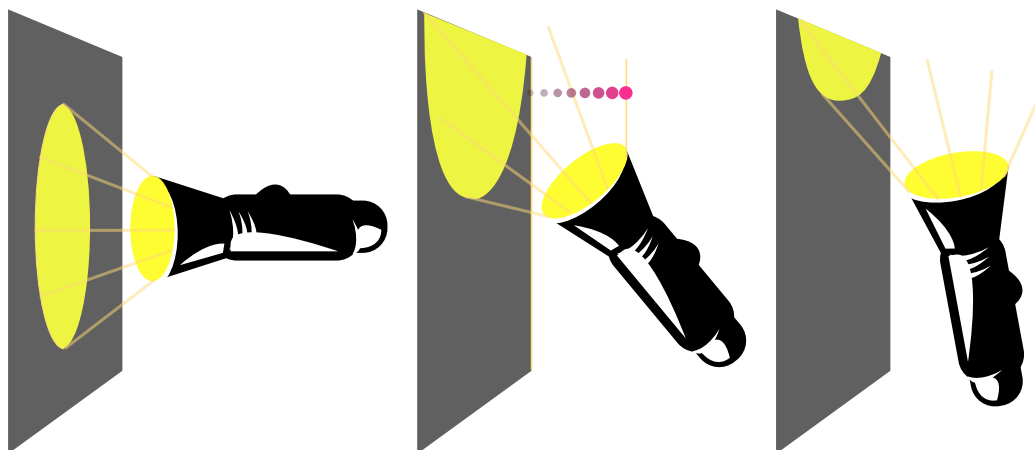


Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 lámpara eléctrica o 1 lámpara de bolsillo 1 pantalla blanca o 1 hoja de papel

Luces y Cónicas

- Alumbrar el muro o la pantalla con la lámpara.
- Aparece una mancha de luz.
- ¿Qué forma tiene? ¿Puede hacerla cambiar? ¿Cómo?

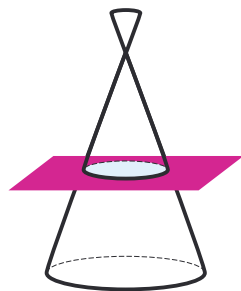


¿Qué retener?

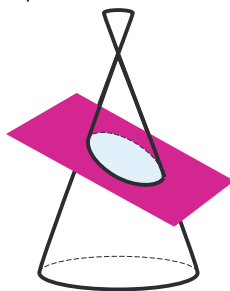
Sobre el techo o el suelo, debe verse una circunferencia. Sobre el resto de las paredes, o si se inclina el soporte de la lámpara, puede obtenerse un arco de parábola o una rama de hipérbola. Las cónicas son las curvas obtenidas por la intersección de un cono con un plano. Según la orientación del plano con respecto al eje del cono, se obtienen diferentes tipos de curvas.

Cuando la lámpara es perpendicular a la pantalla, se obtiene una circunferencia. Cuando el ángulo cambia, se obtienen sucesivamente una elipse, una parábola (hace falta que el cono sea paralelo a la pantalla) y por último una o dos ramas de hipérbola.

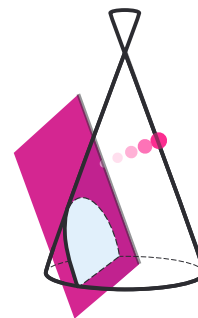
¿ Podemos obtener un punto, una derecha o dos derechas?



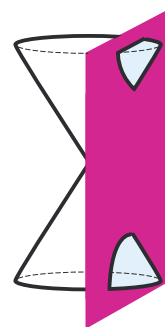
CÍRCULO



ELIPSE



PARÁBOLA



HIPÉRBOLA

Cónicas en el espacio



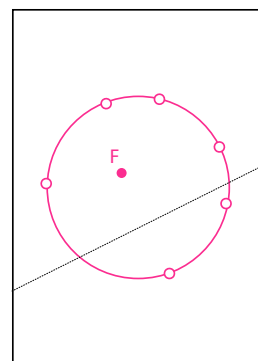
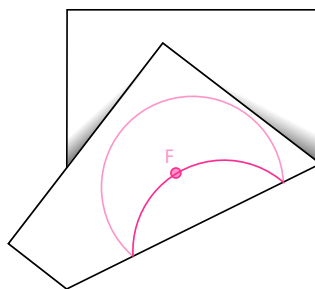
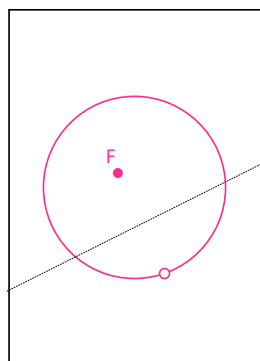
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 hoja de papel, 1 compás, 1 regla

Construya cónicas por doblaje

¿Qué retener?

- Si el punto F está en el interior de la circunferencia, los pliegues marcados envuelven una curva que es una elipse.
- Si F está en el exterior, la envolvente es una hipérbola. ¿Se obtiene lo que si se sustituye al círculo por una derecha?



Para ir más lejos

Las cónicas se encuentran en numerosos fenómenos naturales.

La parábola : del surtidor de agua a la trayectoria de un objeto lanzado devant soi. Se encuentra también en los faros de los coches y en algunos hornos solares.

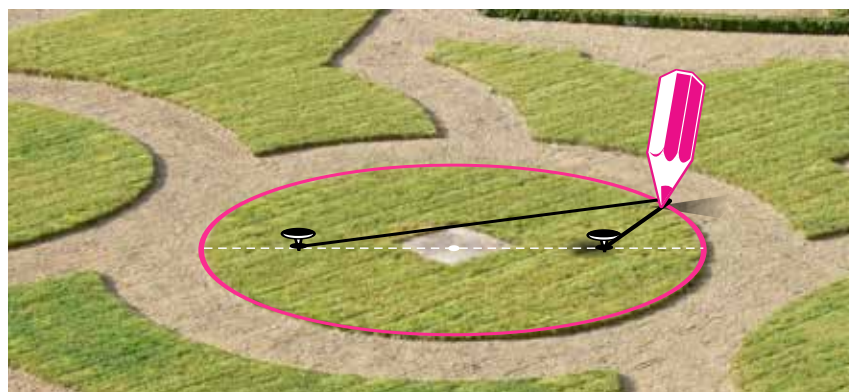
La elipse se encuentra en arquitectura y los dibujos con perspectiva de circunferencias.

Las leyes de **Kepler** (1619), de la gravitación establecidas por **Newton**, prueban que las órbitas de los cuerpos celestes, naturales o artificiales, se cónicas.

Aplicaciones de las matemáticas

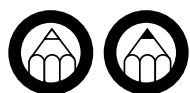
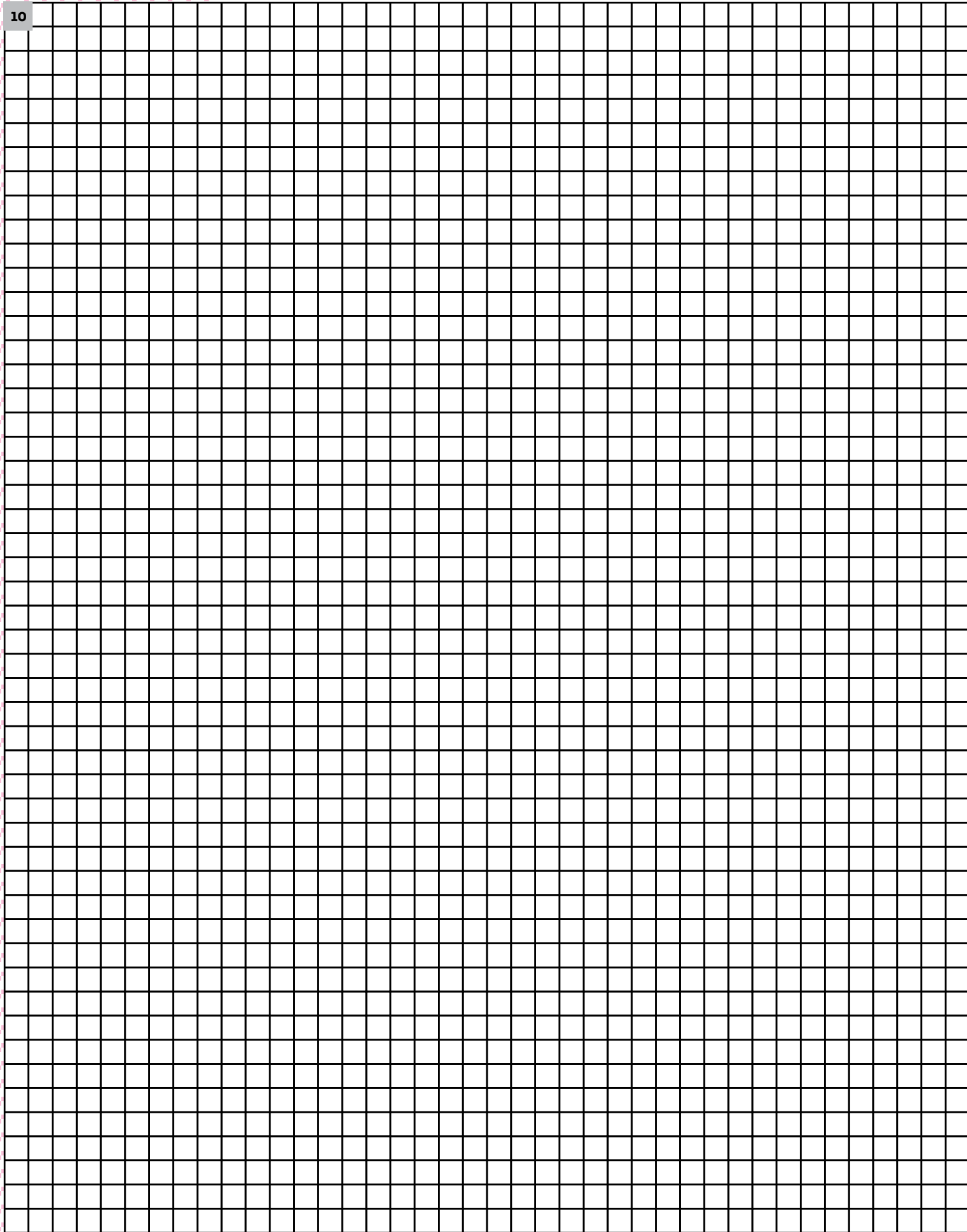
¿Quién utiliza las cónicas?

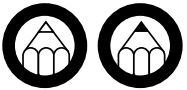
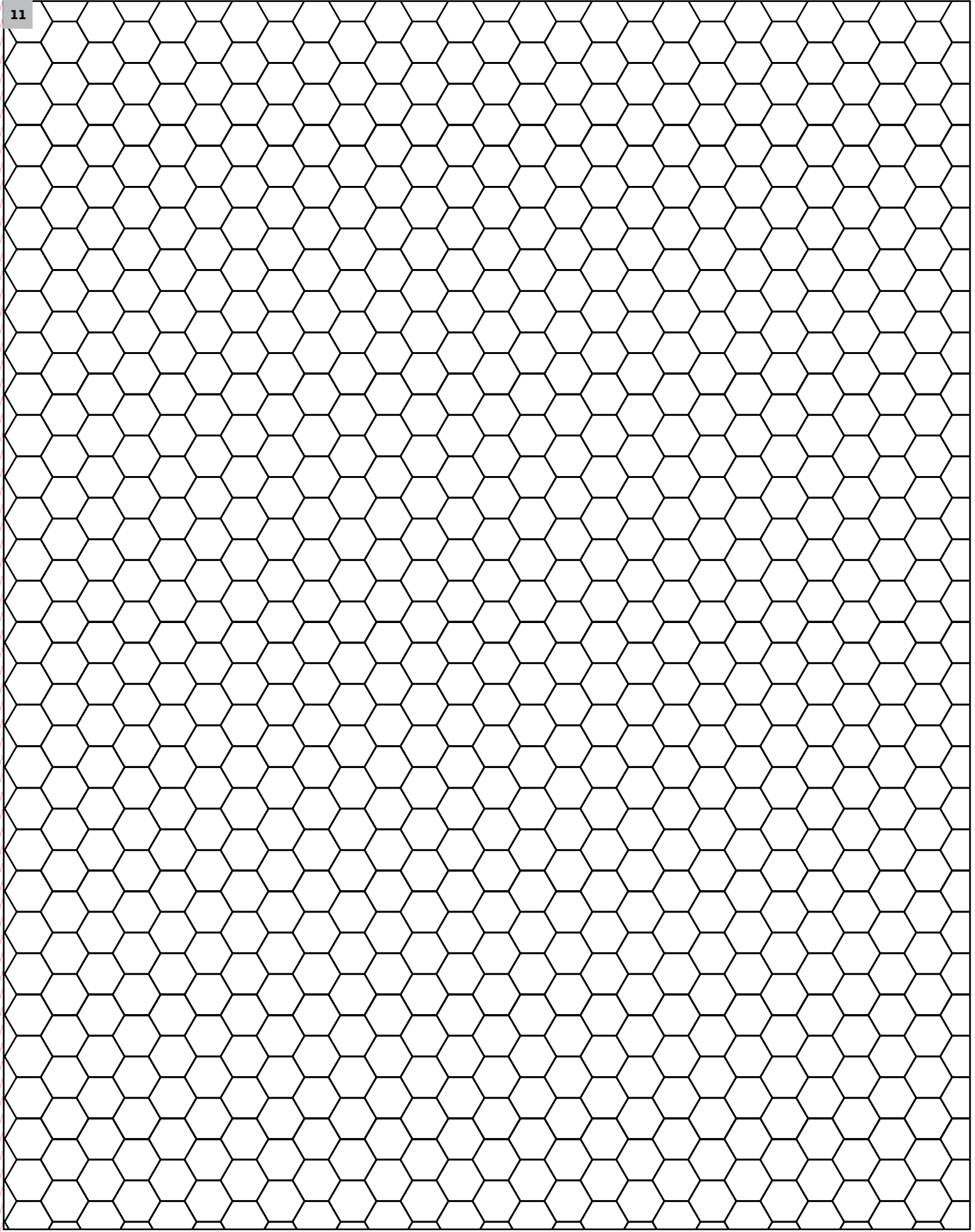
Los ingenieros, sobre todo en la industria espacial, y por supuesto los astrónomos. Los arquitectos que construyen puentes colgantes o estadios deportivos. Los jardineros, los técnicos de iluminación en el teatro, el cine y también los grafistas de la información.



PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Cónica - Elipse - Parábola - Hipérbola - Curva envolvente







2. Pavimentar un Suelo



El arte del embaldosado



Caleidoscopios



¿Dónde estoy?

El arte del embaldosado



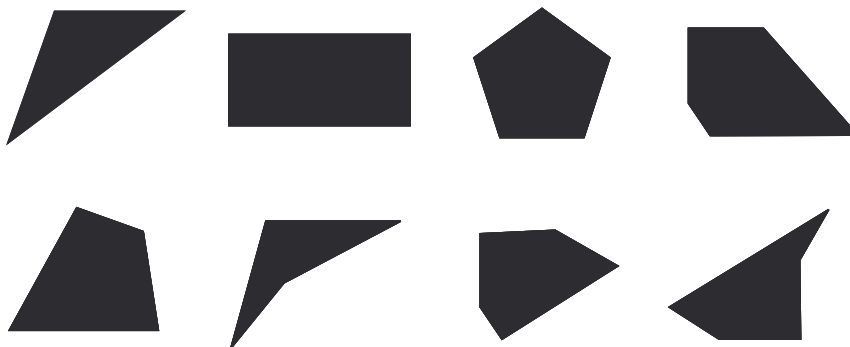
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 hoja con motivos para recortar, 4 ó 5 lápices o rotuladores de colores, 1 cutter ó 1 par de tijeras

19

Cree la teselación más bella con un motivo

Elija un motivo e intente crear una teselación del plano, sin agujeros ni superposiciones. También puede colorearla. Para cada embaldosado creado, intente encontrar a que grupo de teselaciones (entre las 17! mostrados página 8) pertenece.



¿Qué retener?

¿Se puede cubrir un suelo con baldosas de cualquier forma, sin dejar agujeros ni superposiciones?

Muchas formas geométricas o figurativas permiten embaldosar el plano, pero no todas como, por ejemplo, el pentágono regular. Las teselaciones regulares del plano se repiten periódicamente por traslaciones, en dos direcciones. Algunos de estos embaldosados se conservan también por rotaciones o simetrías axiales. Estas traslaciones, rotaciones o simetrías permiten distinguir 17 grupos diferentes. Su estudio se basa en la teoría de grupos, debida a **Evariste Galois** (1811-1832). Las teselaciones tienen aplicaciones en matemáticas, en cristalografía, en física de partículas,...

Hágalo usted mismo

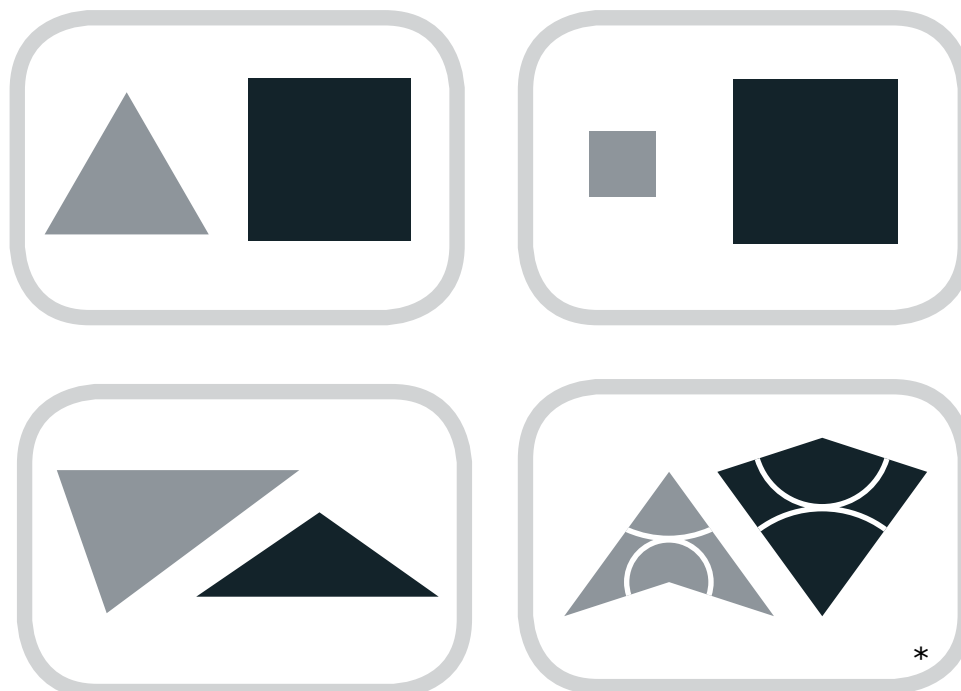
MATERIAL: 1 hoja con motivos para recortar, 4 ó 5 lápices o rotuladores de colores, 1 cutter ó 1 par de tijeras



Cree teselaciones con dos motivos

- Elija uno de estos pares de motivos.
- Intente crear una teselación del plano, sin agujeros ni superposiciones.
- ¿Es regular? Si no lo es, ¿puede decir por qué?

* Respete la coincidencia de los arcos



El arte del embaldosado



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 3 enrejados geométricos, 4 - 5 lápices o rotuladores de colores

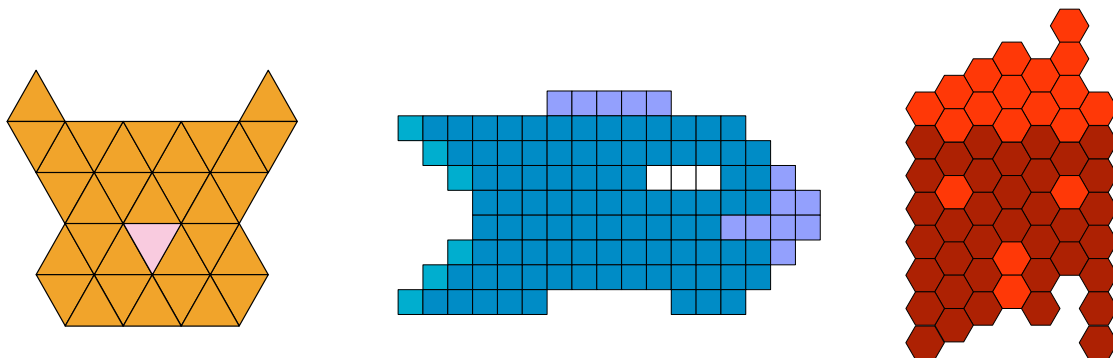
24

25

26

Gato, pez, casa...

Transforme una forma simple (triángulo, cuadrado, ...) en un modelo figurativo que pavimenta el plan. Para que sea más sencillo, comience con los enrejados puestos a su disposición.

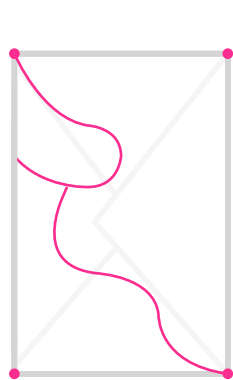


Hágalo usted mismo

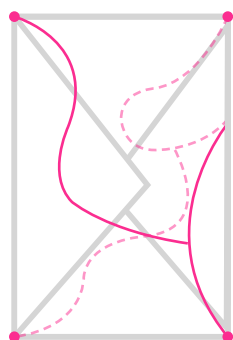
MATERIAL: 1 sobre cerrado, 1 lápiz, 1 cutter ó 1 par de tijeras

La técnica de los sobres

- Fabrique un sobre rectangular, cuadrado, triangular...
- Trace un camino para enlazar las esquinas del sobre. Puede hacer pasar su trazado sobre un lado o sobre los dos.
- Recorte el sobre siguiendo el trazado.
- Desplegar y teselar.



Cara delantera



Cara trasera

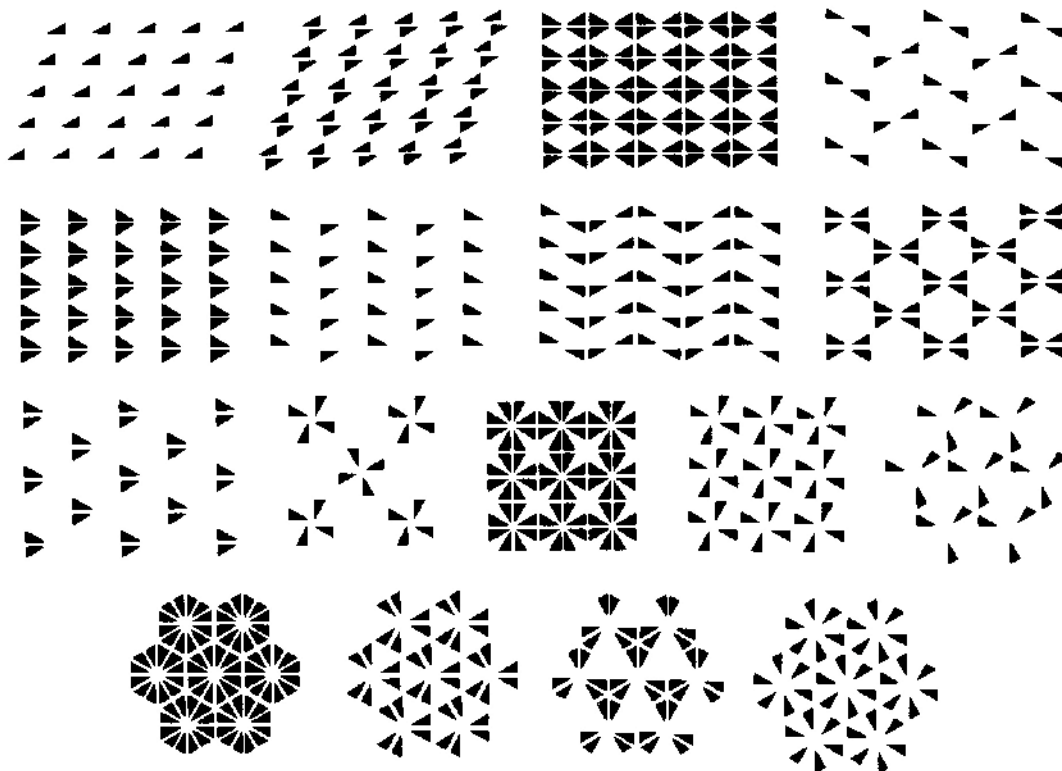


El arte del embaldosado



Para ir más lejos

Los 17 grupos de teselaciones regulares



Aplicaciones de las matemáticas

Las teselaciones se encuentran en profesiones que van desde el papel pintado en paredes hasta los embaldosados de suelos (cocinas, pasillos, baños), desde las telas para vestidos a los tejidos africanos.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Teselaciones - Grupos de teselaciones - Evariste Galois - Escher

Caleidoscopios



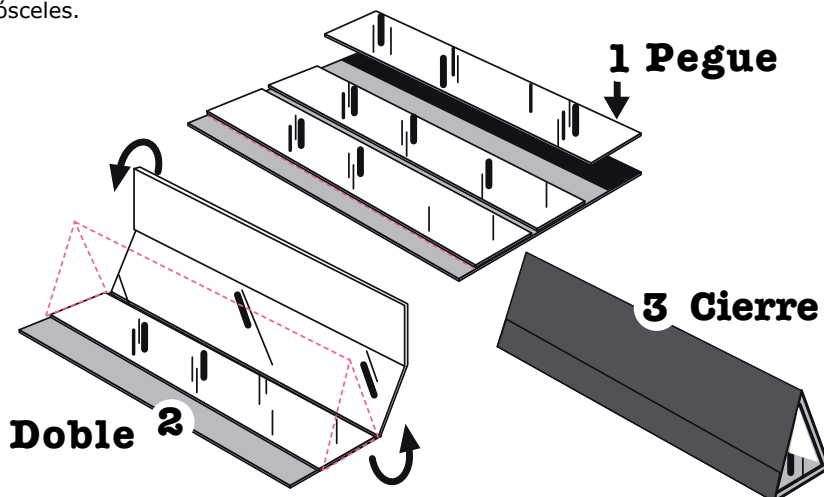
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 modelos de caleidoscopios, 3 espejos, 1 cartón, 1 cinta adhesiva, 1 tubo de pegamento

27

Fabrique dos caleidoscopios

Construya dos modelos, uno sobre la base de un triángulo equilátero, el segundo sobre la base de un triángulo isósceles.



Hágalo usted mismo

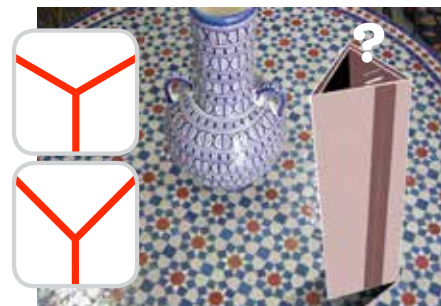
MATERIAL: Modelos de mosaicos a observar, 2 caleidoscopios

28

29

Observe las simetrías en el caleidoscopio

- Elija un mosaico y sitúe el caleidoscopio adecuado en el lugar correcto. Recupera en tamaño mayor el mosaico.
- Coloque uno de los espejos sobre las líneas rojas. Va a encontrar un embañosamiento del suelo de una casa.



¿Qué retener?

Las teselaciones regulares son repeticiones hasta el infinito de un mismo motivo.

Aquí, a través de simetrías especulares, el motivo se va a reproducir y generar un embañosado por cuadrados, hexágonos o de cualquier otro conjunto de polígonos con un número par de lados. Muchos artistas como **Escher** utilizan esta misma técnica, con motivos más figurativos.

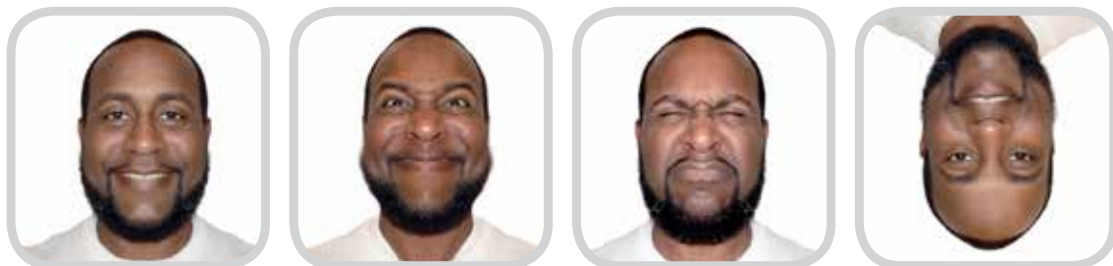
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 fotografía, 1 par de tijeras ó 1 cutter

¿Quién está detrás del espejo?

- Tome una fotografía de un rostro.
- Córtela en 2 por simetría y realice estos efectos especulares.

¿Cuál es el rostro correcto?



Caleidoscopios



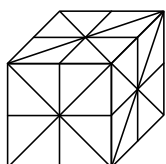
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 3 patrones de pirámide, 1 cutter ó 1 par de tijeras, 3 triángulos espejados
1 tubo de pegamento



Pirámides-espejo

- Construir una pirámide espejada con ayuda de los modelos proporcionados.
- Coloque objetos o un líquido a su elección en el fondo del caleidoscopio.
- ¿Qué observa?



Para ir más lejos

Si se corta un poliedro regular (cubo, tetraedro,...) a lo largo de todos sus planos de simetría, se obtienen pirámides que, transformadas en caleidoscopio, permiten encontrar el poliedro de partida, así como una familia de volúmenes que tienen las mismas simetrías de base.

Aplicaciones de las matemáticas

- Artesanos creando un mosaico a partir de zeliges (Fez - Marruecos)

- Especialista creando una nueva teselación con ayuda de l ordenador Kenitra - Marruecos).



MOTS CLÉS POUR SITES WEB:

Caleidoscopio - Mosaico - Teselación - Simetrías - Escher

¿Dónde estoy?



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 esfera de poliestireno o 1 balón, 1 rotulador

Teselaciones de esferas

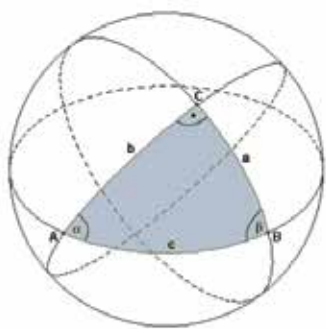
Observe estas teselaciones de la esfera. ¿Puede imaginar otras? Intente dibujarlas sobre el balón. Para cada teselación, calcule los ángulos del polígono embalsador.



¿Qué retener?

Como sobre el plano, las teselaciones de la esfera son cubrimientos sin agujeros ni superposiciones con ayuda de uno o varios polígonos esféricos (es decir, que se aplican sobre la esfera). La teselación es regular si se utiliza un único motivo (triángulo equilátero, cuadrado,...) que se distribuye de la misma manera alrededor de cada vértice. Las teselaciones regulares de la esfera son deformaciones esféricas de poliedros regulares. Teselar la esfera permite definir, por ejemplo, el número óptimo de satélites que son necesarios para cubrir todo punto de la Tierra.

Para ir más lejos



Calculando los ángulos de los polígonos dibujados sobre la esfera, puede descubrir propiedades de la geometría esférica:

- ¿Cuál es la suma de los ángulos de un triángulo esférico?
- ¿Puede construir un triángulo esférico con 3 ángulos rectos?
- ¿Cuál es la relación entre la suma de los ángulos de un polígono esférico y su área?

La historia del cazador de osos

Es la historia de un cazador que sale tras el rastro de un oso. Camina recto hacia el sur durante una hora, después ve que el oso ha girado hacia el este. Hace lo mismo y camina durante una hora para llegar a un punto donde el oso ha girado de nuevo, hacia el norte. De nuevo, hace lo mismo y sigue el rastro durante una hora aún. ¿Y entonces? Se da cuenta que ha regresado a su punto... ¡de partida!

Pregunta 1: ¿Cuál puede ser el color del oso?

Pregunta 2: ¿Cuántas soluciones puede haber?

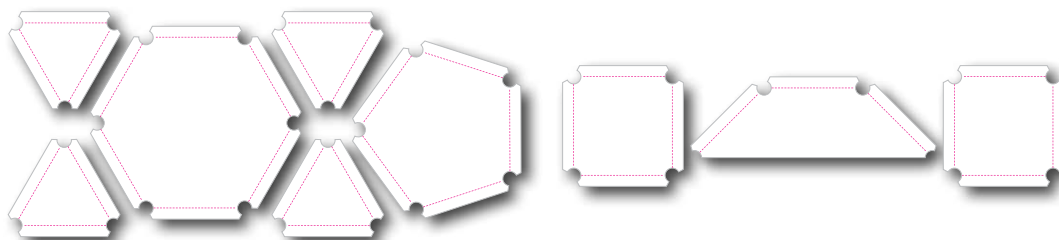
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 hoja de patrones de polígonos regulares, 2 ó 3 cartones flexibles, gomas elásticas

33

Construir un balón con cartón

Con estos polígonos regulares, construya un balón que se acerque lo más posible a una esfera.

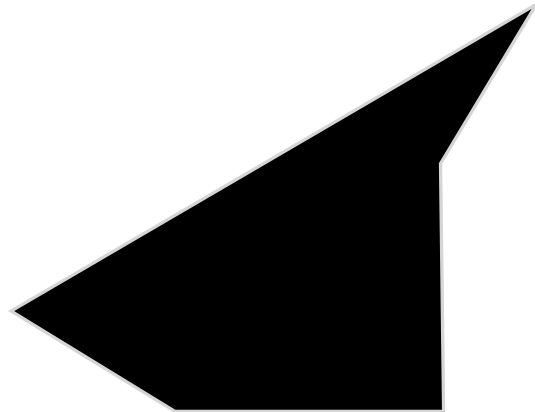
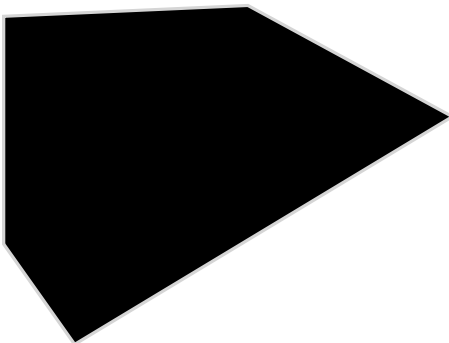
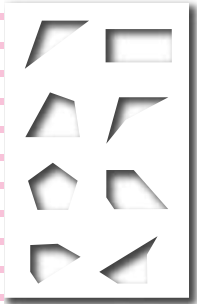
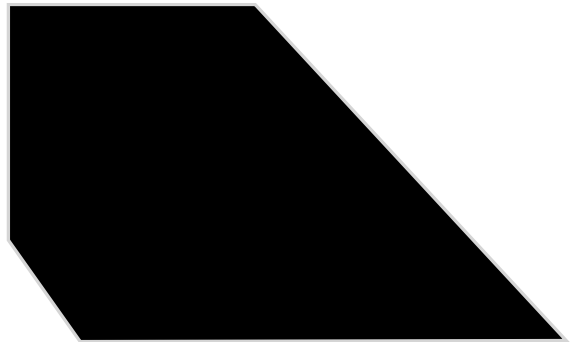
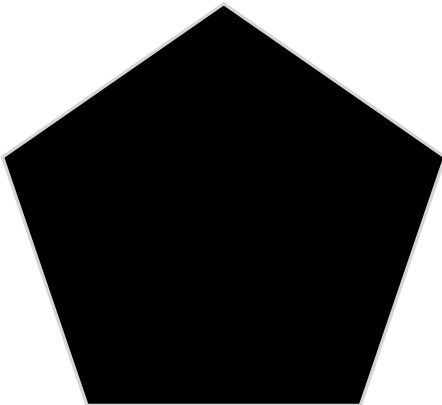
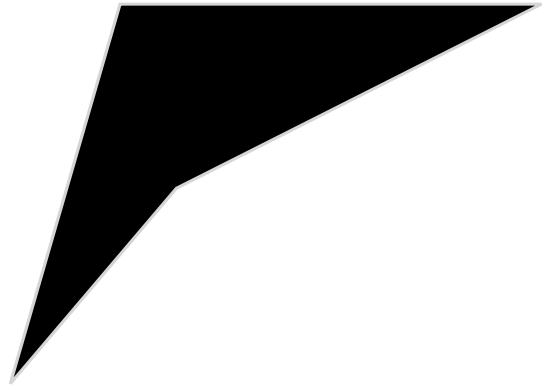
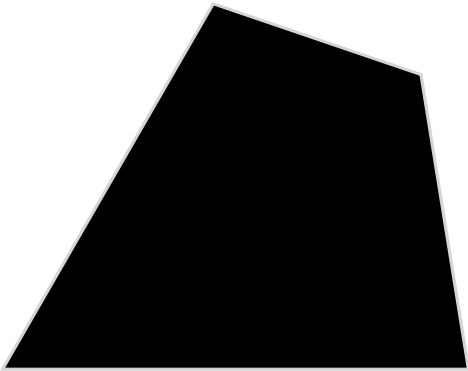


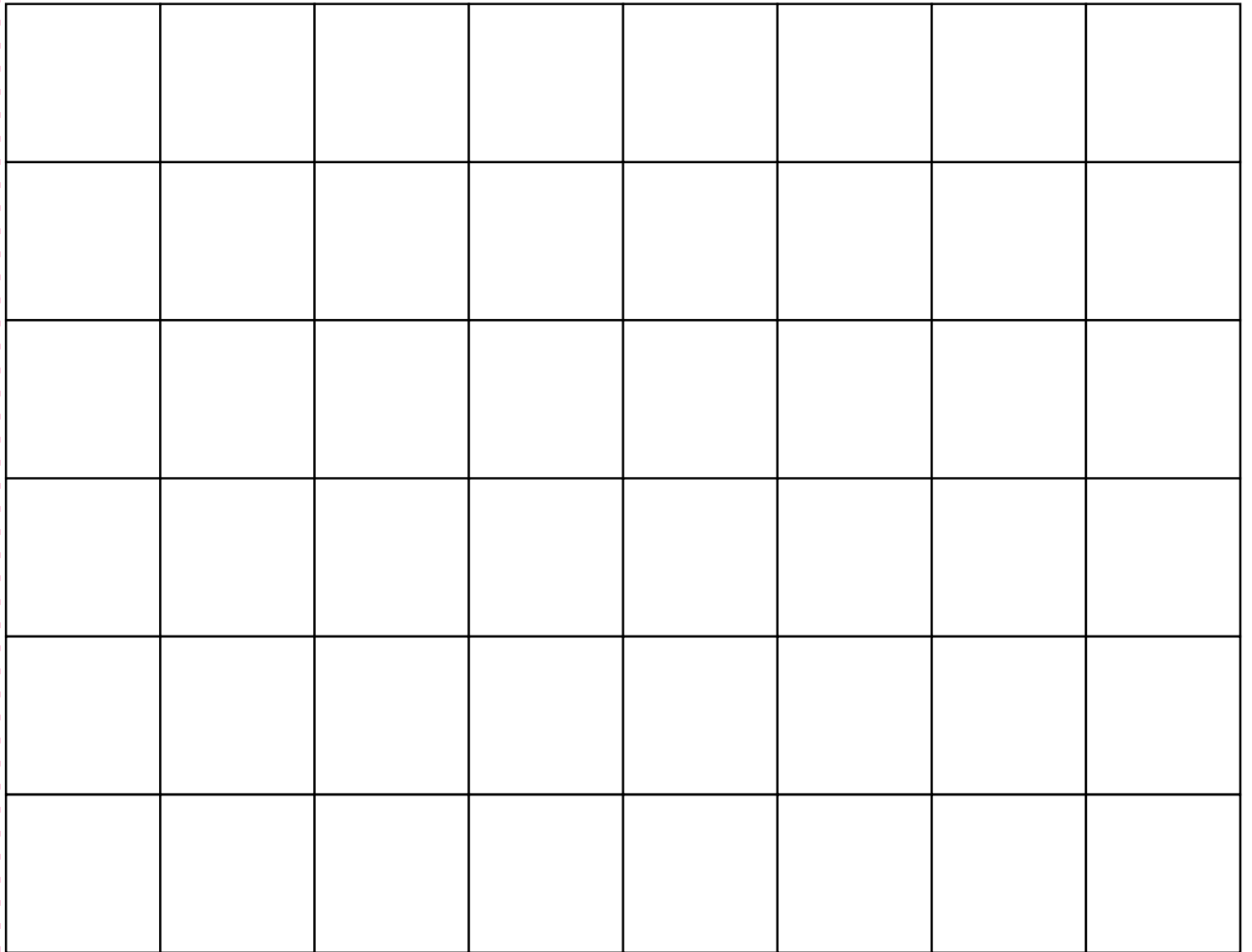
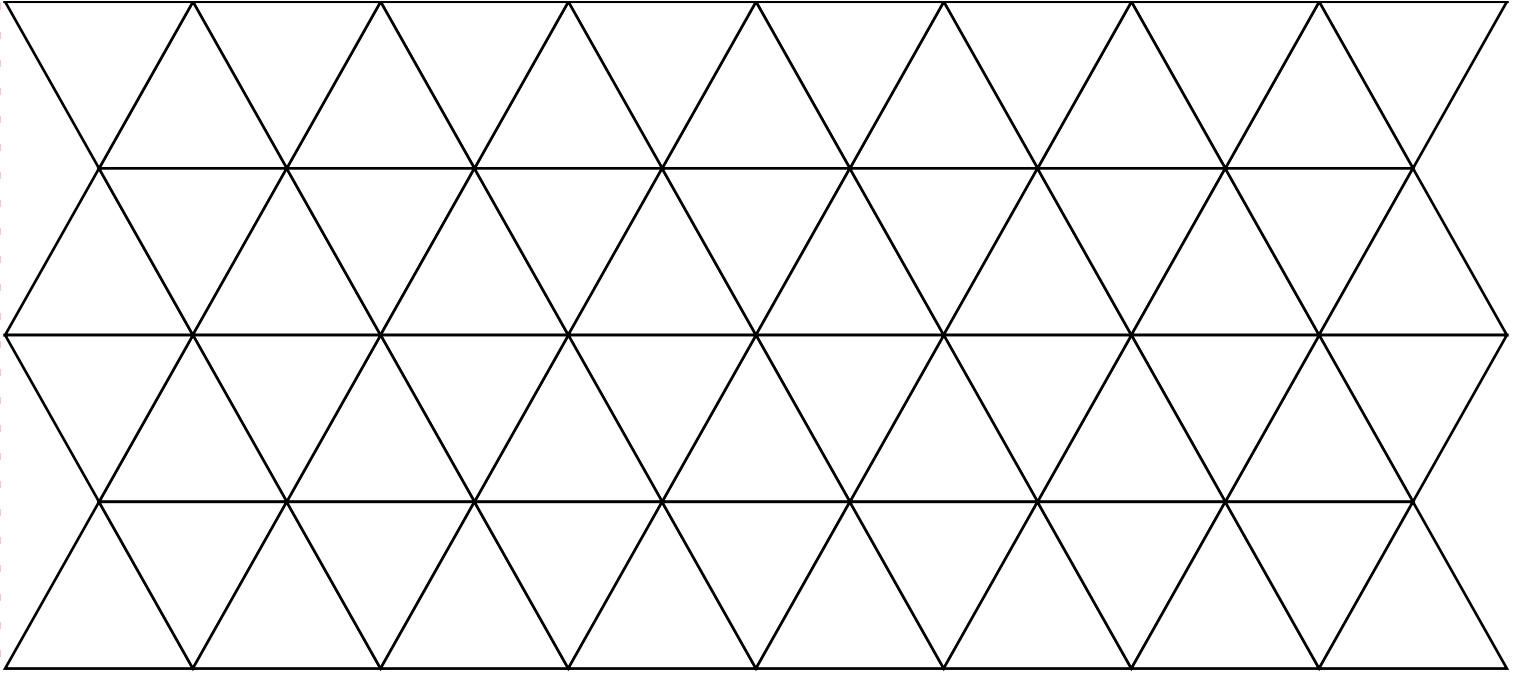
Aplicaciones de las matemáticas

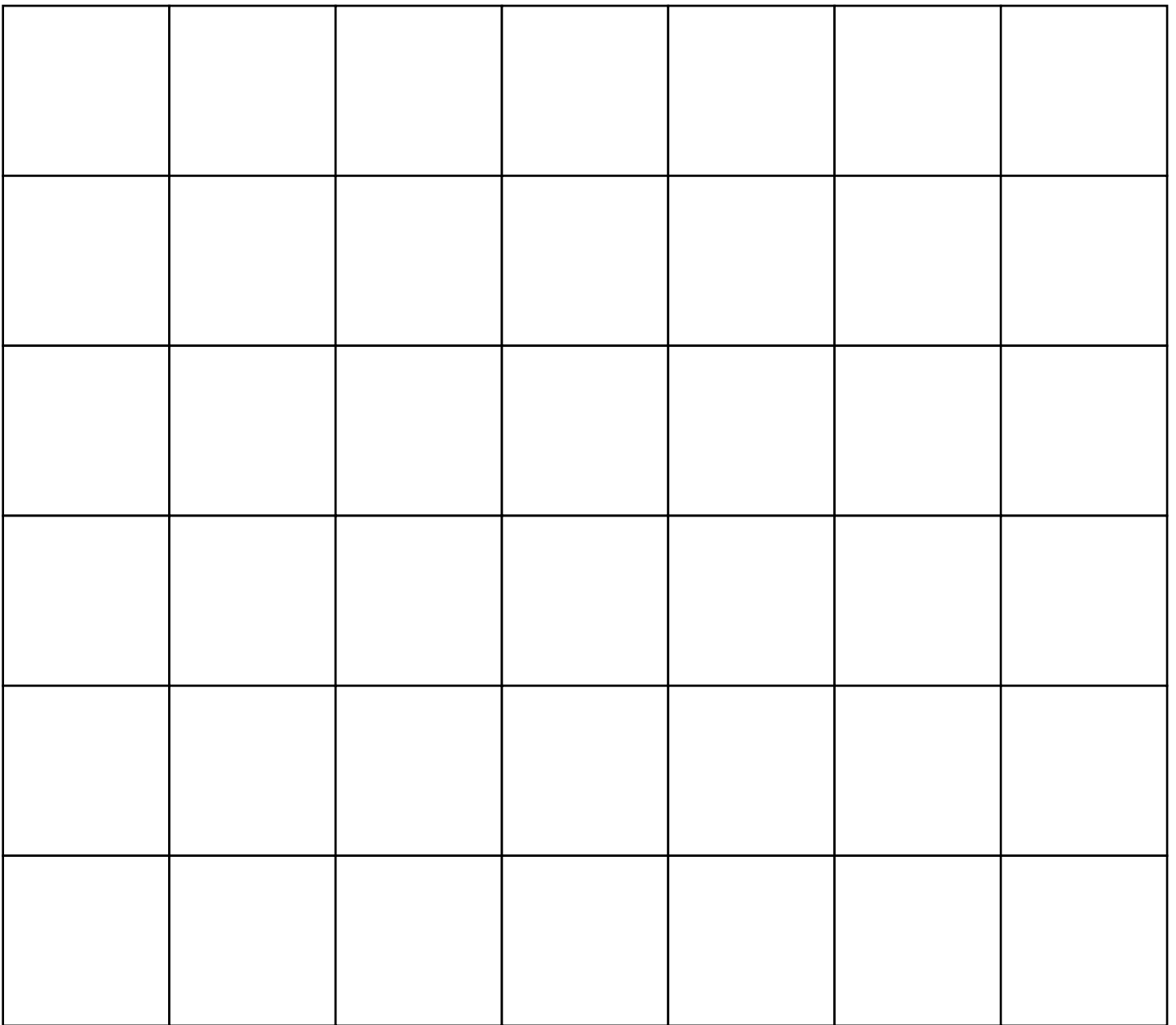
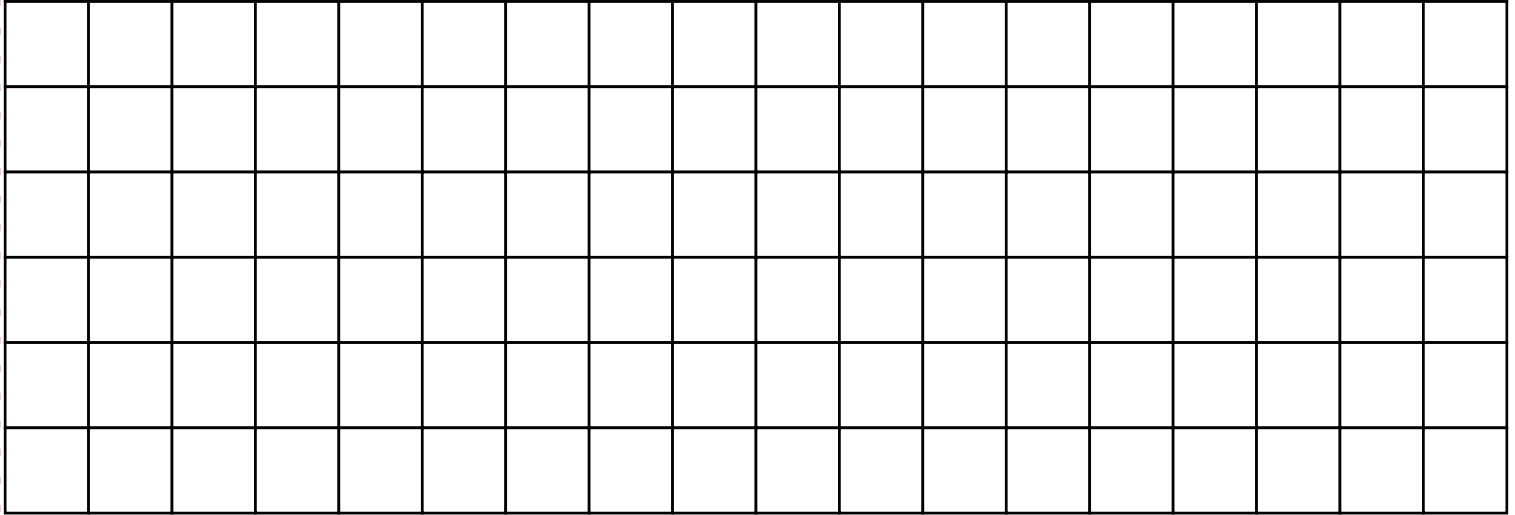
Los arquitectos se inspiran a veces en estructuras esféricas. Se utilizan en la comunicación vía satélite y en los sistemas de posicionamiento a través de satélites (GPS o Galileo) que intentan cubrir la Tierra utilizando el menor número de satélites posible.

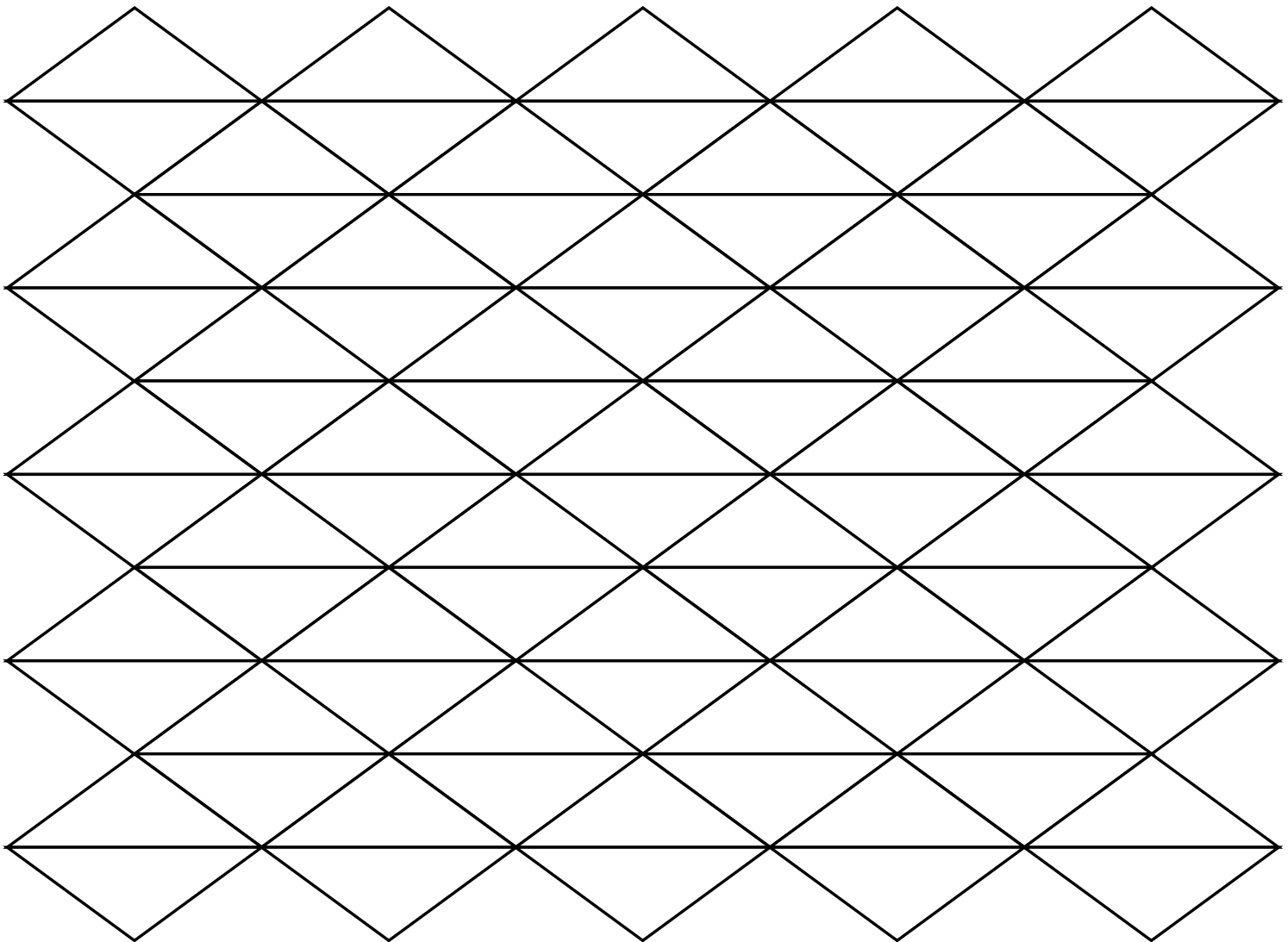
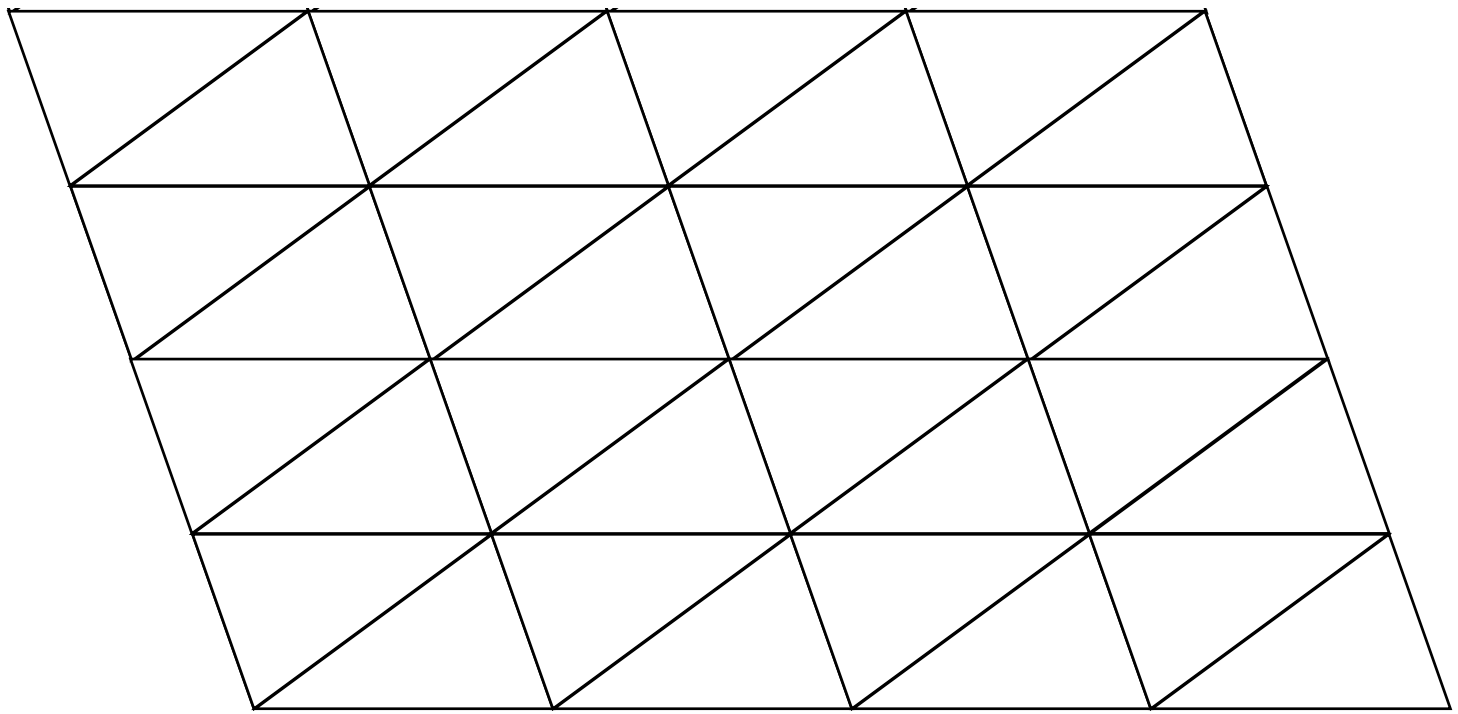
PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

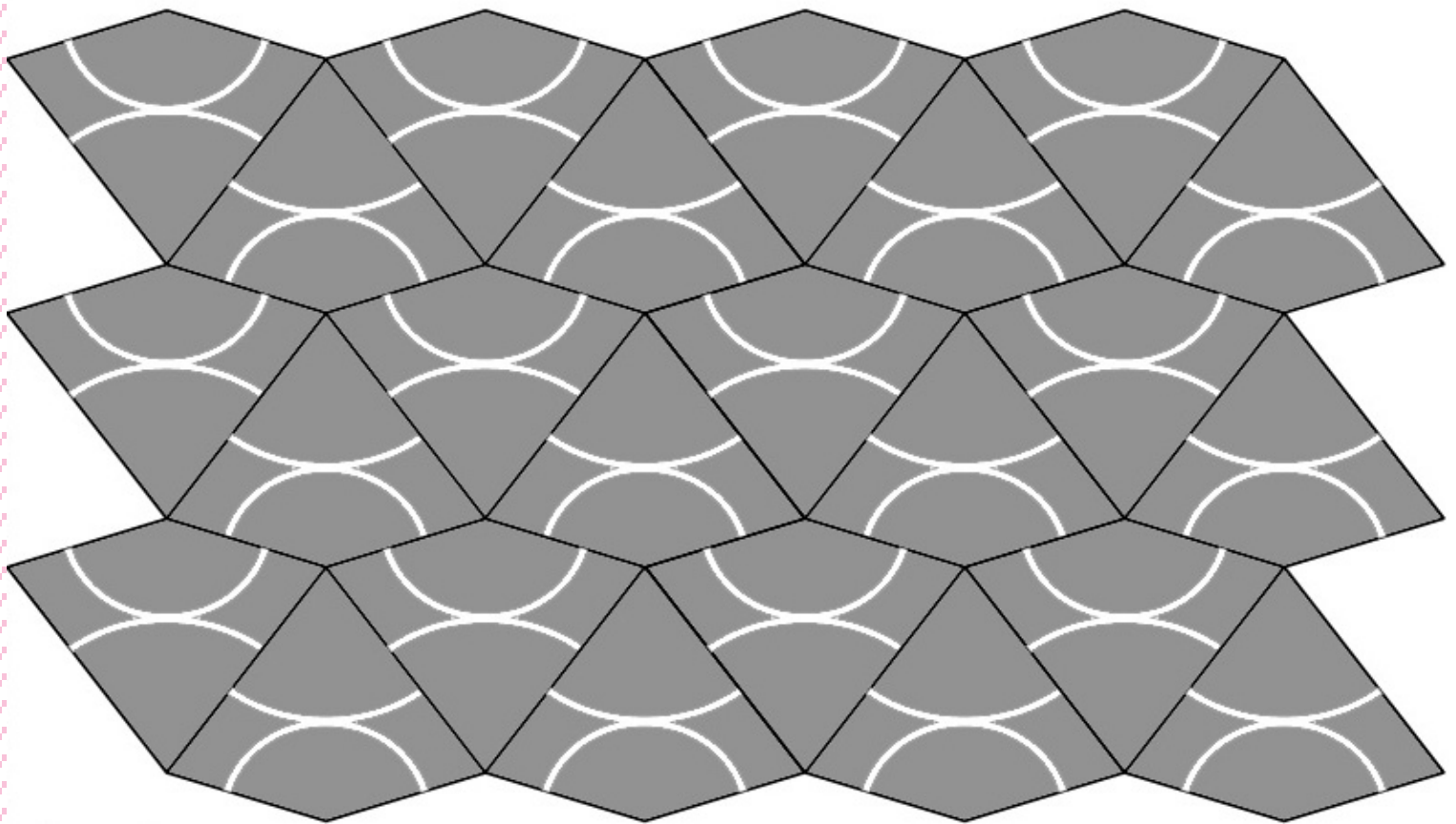
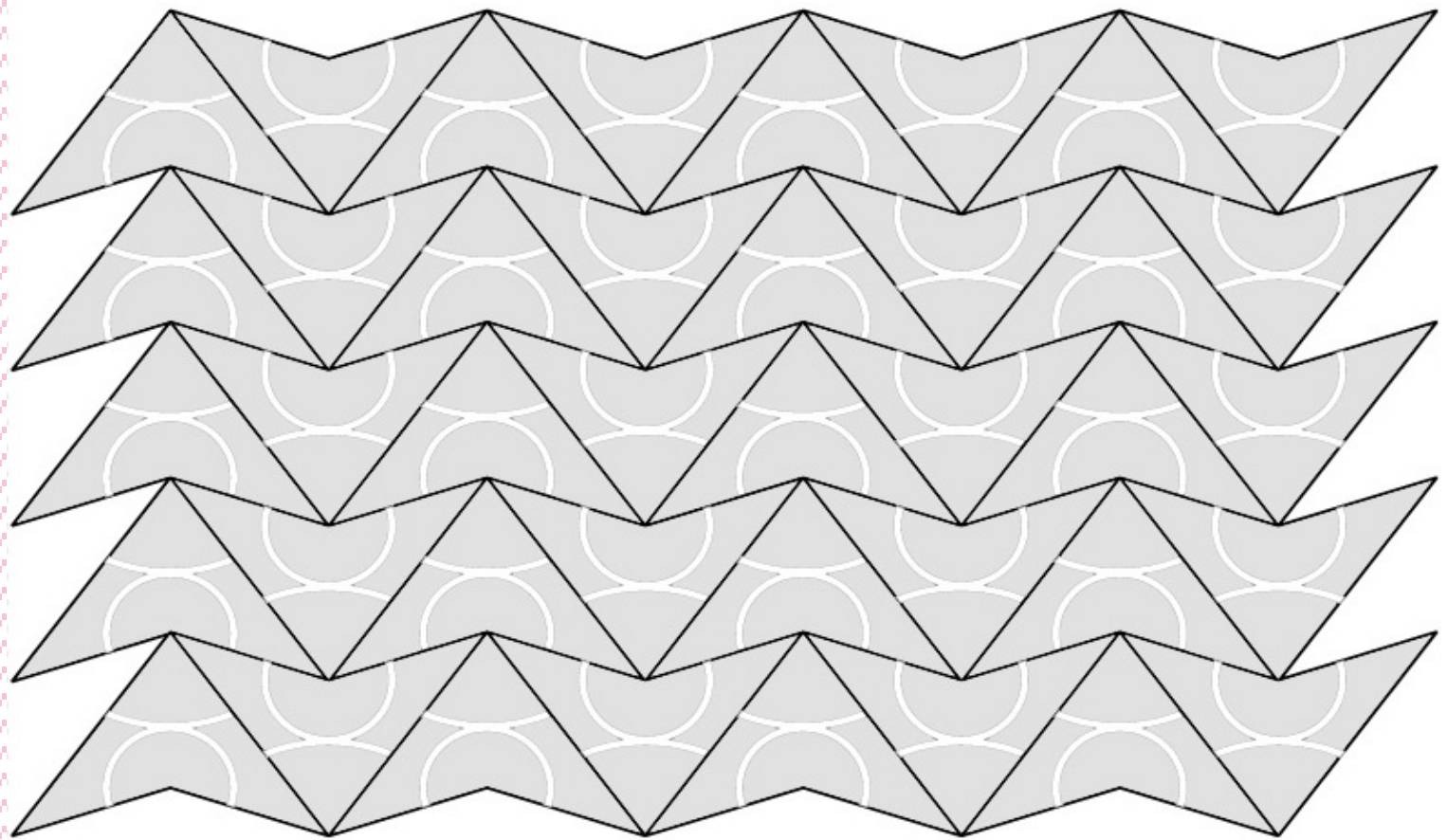
Geometría esférica - Teselaciones de la esfera - Escher

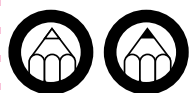


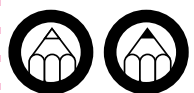


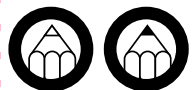


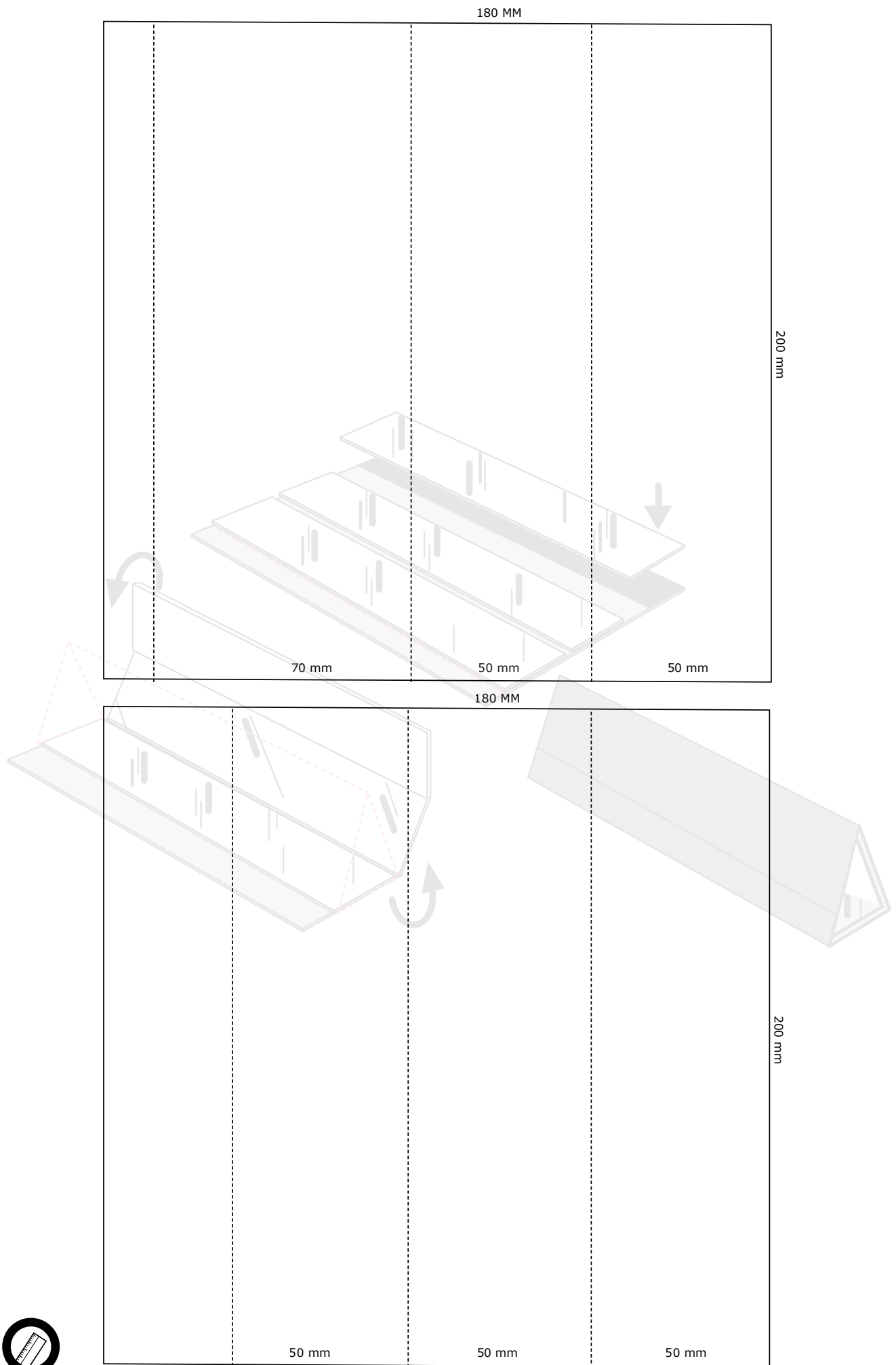


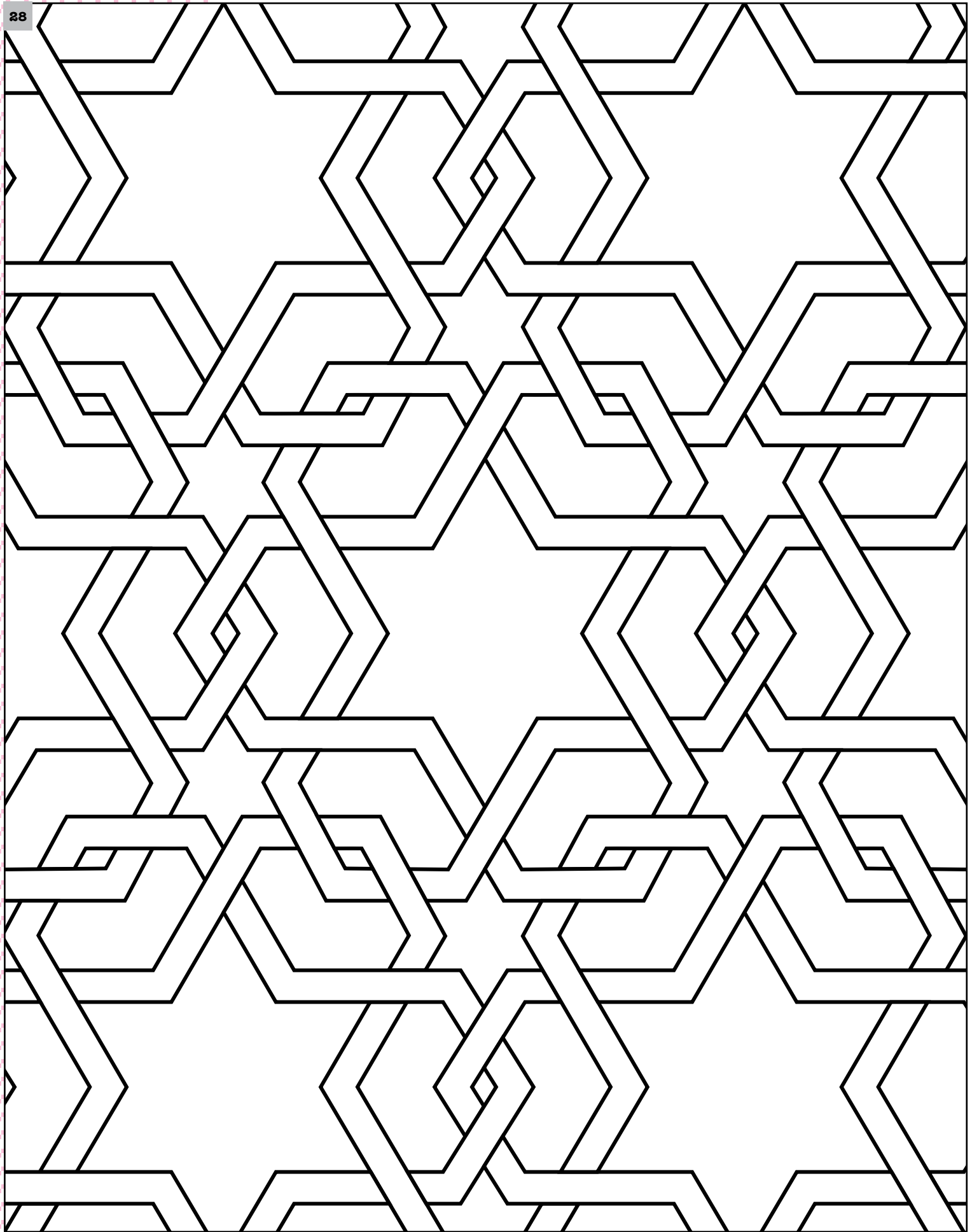


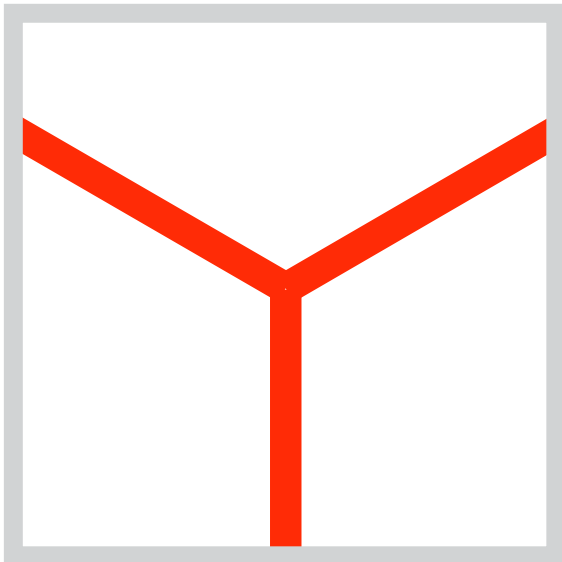




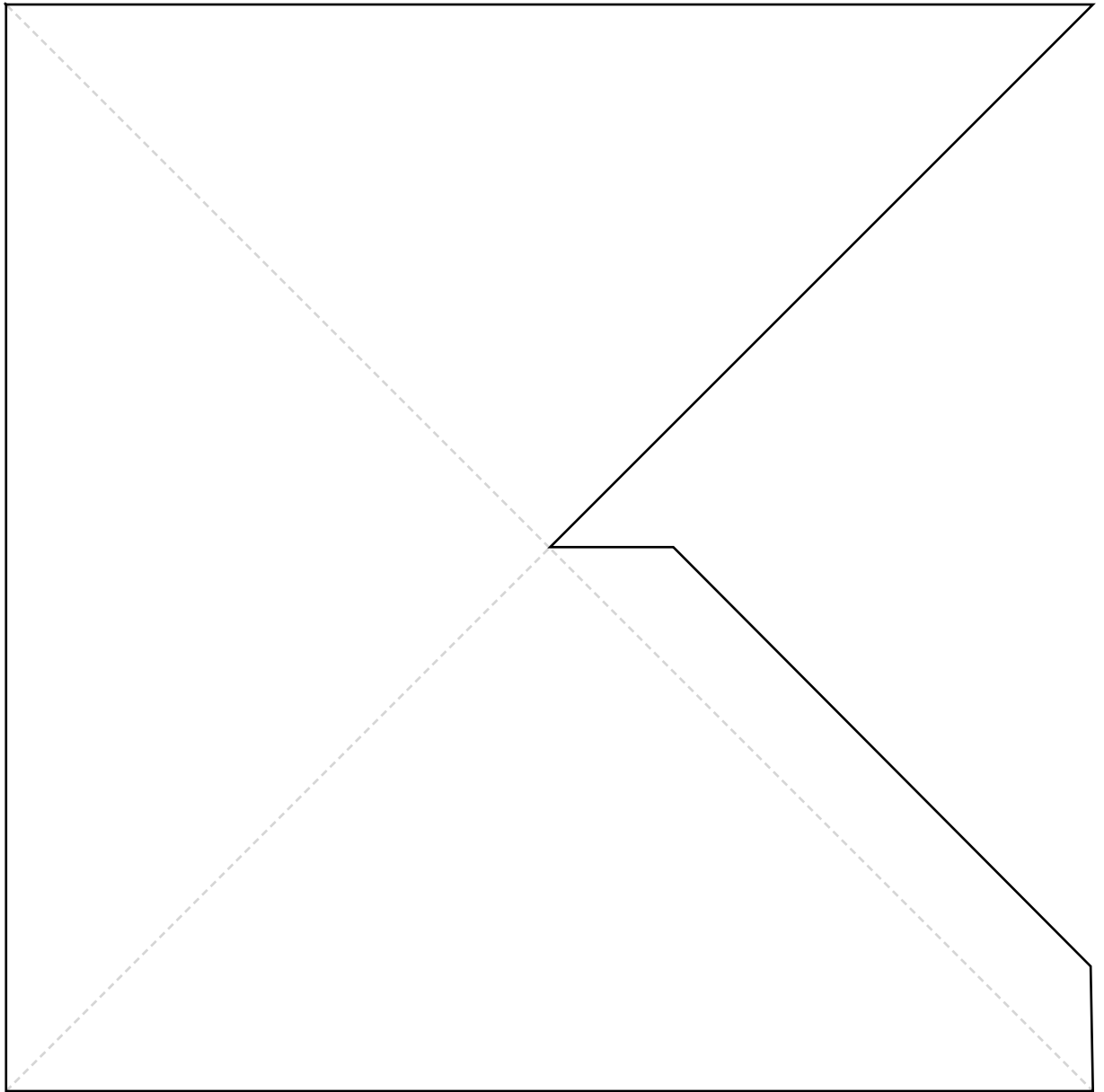




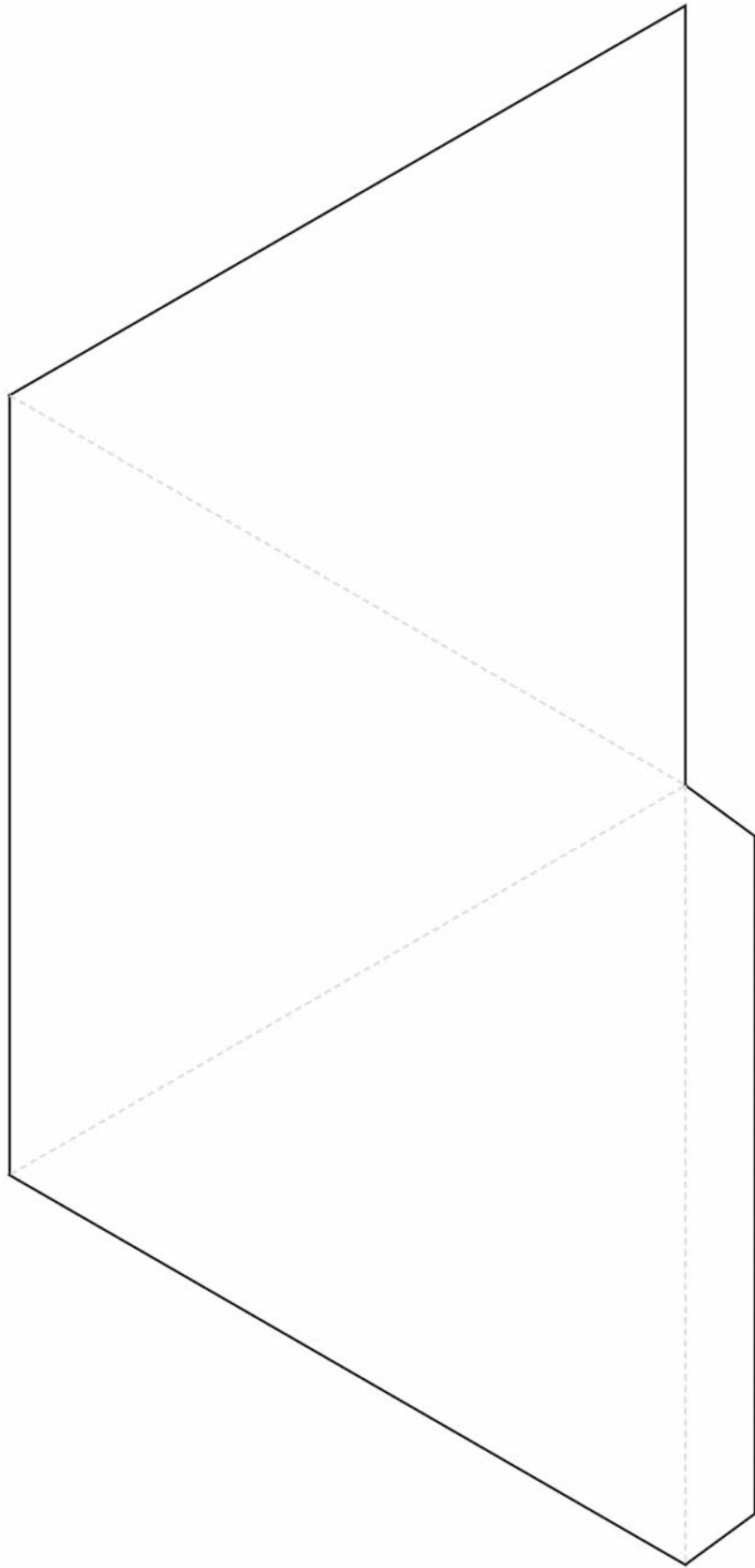




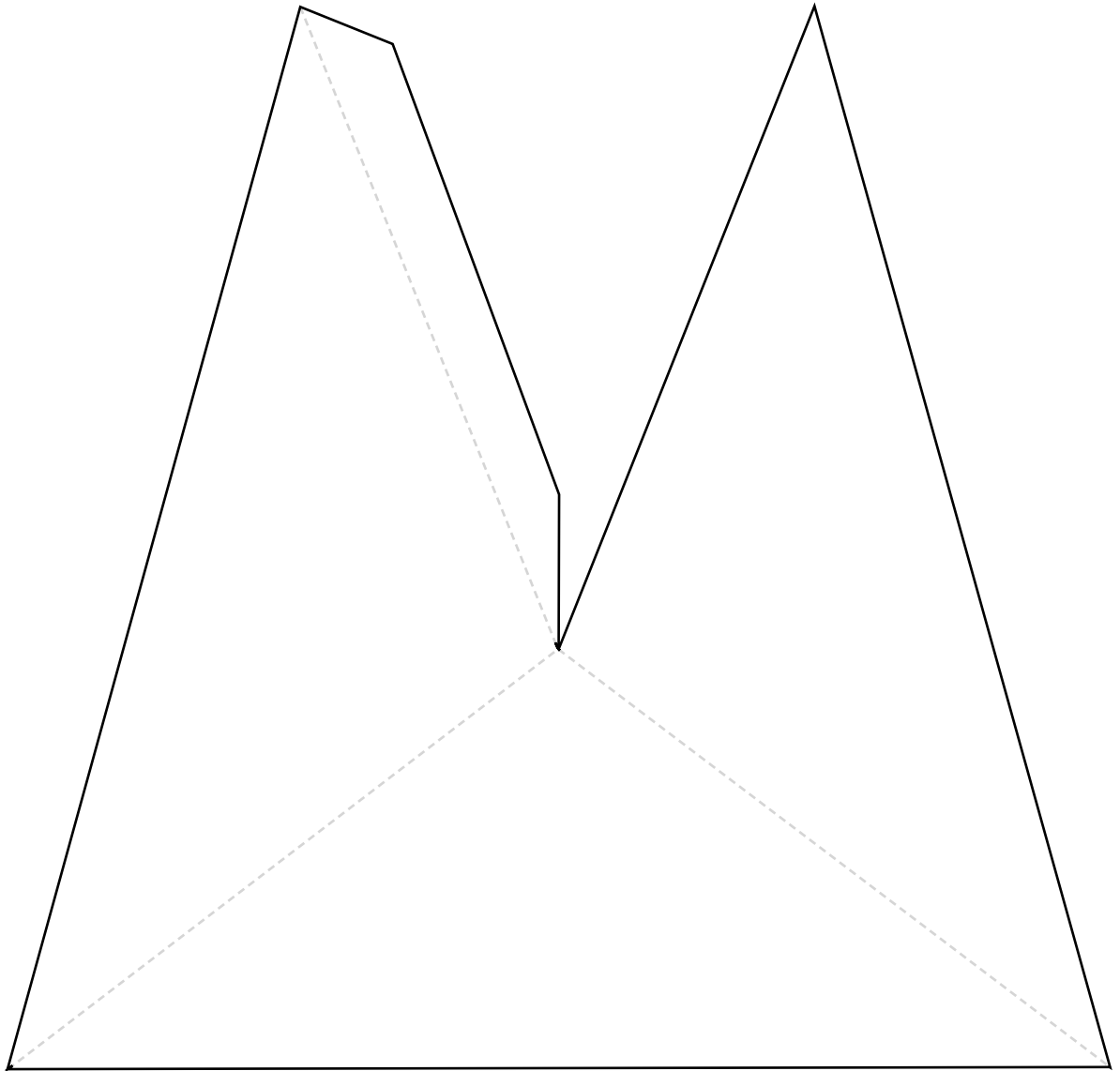
1

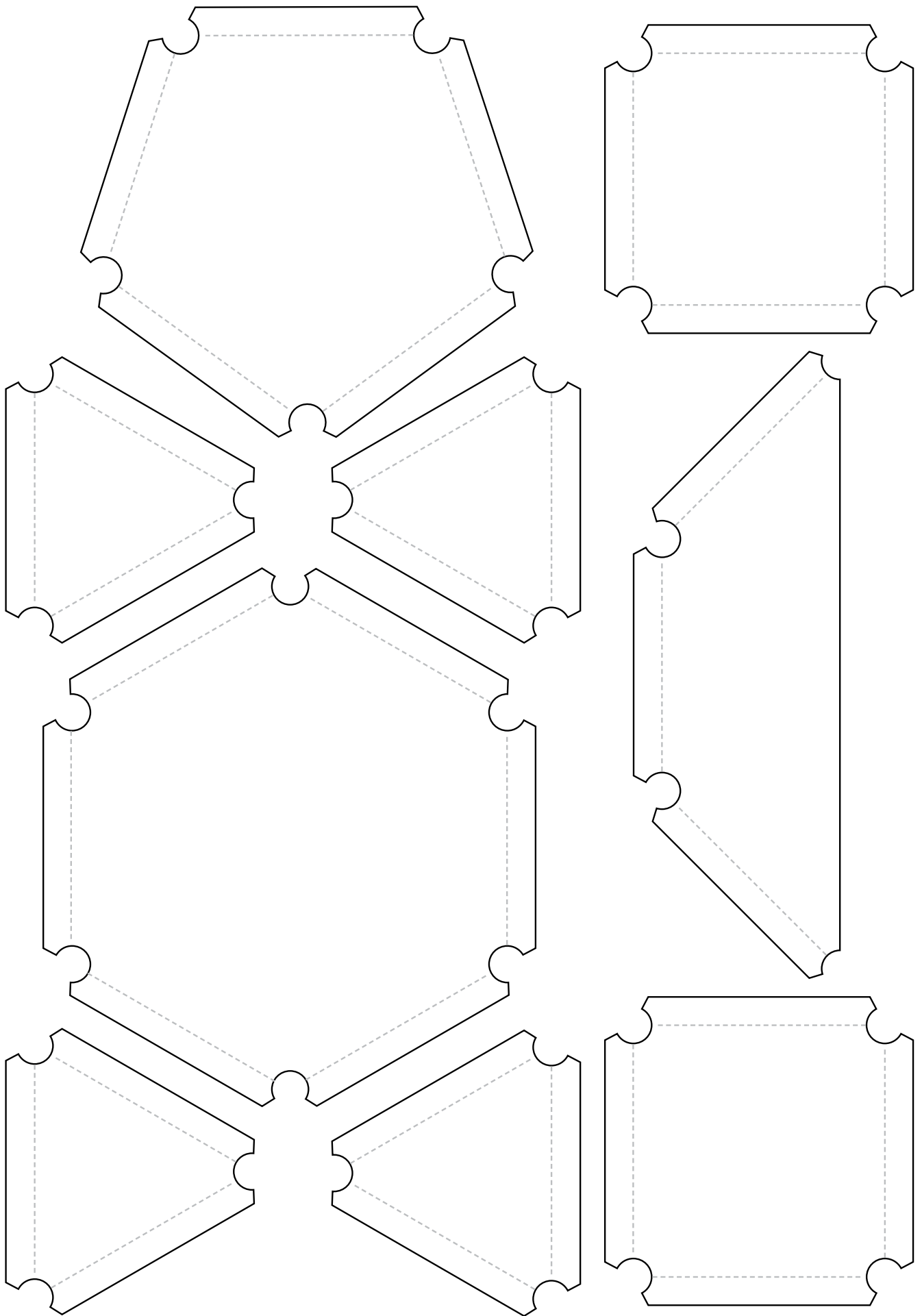


2



3







3. Llenar el Espacio



Amontonar naranjas



Poliedros



Problemas complejos

Amontonar naranjas



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 hoja cuadrículada, monedas, canicas o naranjas...

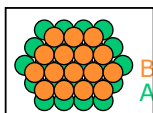
39

Amontone, amontone....

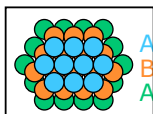
- Coloque el mayor número posible de piezas iguales en un cuadrado de lado 1, 2, 3, 4, ..., 10 unidades.
- Amontone el máximo número de bolas unidad sobre una base cuadrada de lado 10. Calcule la densidad de cada empaquetamiento.



¿Qué retener?



En un cuadrado de lado 10, se pueden colocar más de 100 discos! ¿A partir de que valor es posible colocar más discos que el cuadrado del lado? En el plano, la densidad* máxima que se puede obtener usando discos idénticos es del 90,6%. Es decir, hay menos un 10% de espacio vacío.

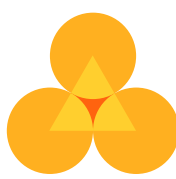


En el espacio tridimensional, cuando el empaquetamiento es regular, la densidad* máxima se obtiene (como en las redes cristalinas) cuando las canicas se sitúan en los vértices y los centros de las caras de un empaquetamiento de cubos. Esta distribución se llama "empaquetamiento cúbico con caras centradas". Su densidad es del 74%.

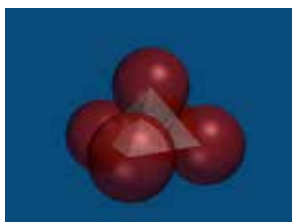
BAAPara apilamientos de canicas de diferentes diámetros o de formas aplanadas, el problema de la densidad máxima no está aún resuelto.

* la densidad es la proporción de la superficie o del volumen ocupados por las piezas en el interior de la envoltura que las contiene (aquí, el cuadrado, la pirámide o el cubo ocupados)

Para ir más lejos



Calcular la densidad de estos empaquetamientos de discos consiste en comparar en el cuadrado (o el triángulo) el área de la parte ocupada por los discos con respecto al área del cuadrado (o del triángulo).



Calcular la densidad de estos empaquetamientos de bolas consiste en comparar en el cubo (o en el tetraedro) el volumen de la parte ocupada por las bolas con respecto al volumen de la pirámide (o del tetraedro).

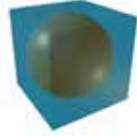
Amontonar naranjas



Para ir más lejos

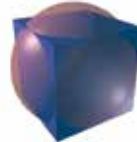
Cuestión 1

Entre un kilo de café molido y un kilo de café en grano, ¿cuál es el que ocupa el menor volumen?



Cuestión 2

Coloque una esfera en un cubo que sea tangente a las 6 caras del cubo. Estime cual es la relación entre los volúmenes (sin hacer el cálculo) Haga lo mismo para la relación entre las áreas. Compruebe, haciendo el cálculo, que **ambas relaciones son iguales**. Es uno de los métodos que permitió a **Arquímedes** encontrar el área y el volumen de la esfera.



Cuestión 3

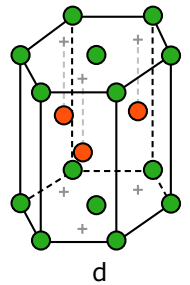
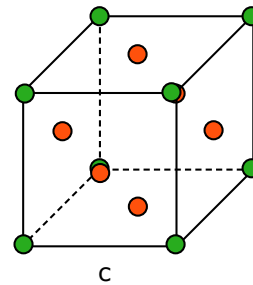
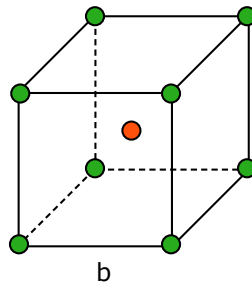
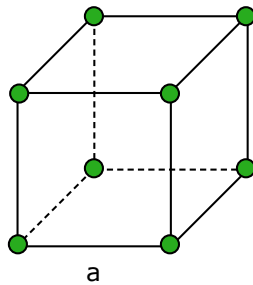
En un cubo, coloque una esfera que sea tangente a las aristas del cubo. Hágase las mismas preguntas.

El comentario esta vez es el siguiente:

la relación entre los volúmenes es el doble de la densidad máxima de empaquetamientos de esferas.

Algunos resultados fáciles de obtener son:

- a. Empaquetamiento cúbico simple - Densidad: $\pi / 6$
- b. Empaquetamiento cúbico centrado - Densidad: $\pi \sqrt{3} / 8$
- c. Empaquetamiento cúbico con caras centradas - Densidad: $\pi \sqrt{2} / 6$
- d. Empaquetamiento hexagonal compacto - Densidad: $\pi \sqrt{2} / 6$



Aplicaciones de las matemáticas

Todas las empresas interesadas en el envasado de objetos, de granos, de píldoras, ...

Los físicos e ingenieros están interesados en materiales y empaquetamientos de átomos. ¡Los empaquetamientos se emplean también en la codificación informática de mensajes y sus correctores automáticos (códigos de Hamming)!

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Empaquetamientos - Densidad - Kepler - Hale



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Patrones de poliedros, tijeras o cúter, pegamento

40

41

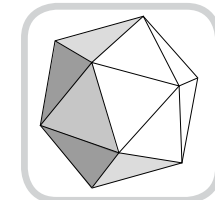
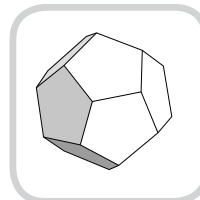
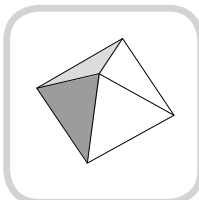
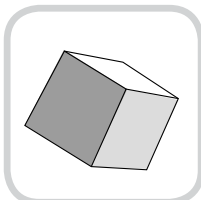
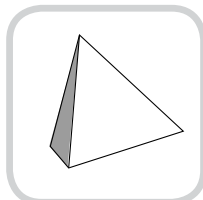
42

43

44

Fabrique poliedros

- A partir de un patrón de cartón o de polígonos regulares ensamblados, construya los 5 sólidos platónicos, un tetraedro doble, una pirámide de base cuadrada, ...
- Elija un poliedro y hágalo girar.
- ¿Cuántas caras tiene? ¿Cuántos vértices? ¿Y aristas?



¿Qué retener?

Un poliedro regular es un sólido cuyas caras son un mismo polígono regular, distribuidas de la misma manera alrededor de cada vértice. Existen 5, llamados **sólidos platónicos**.

Es semi-regular si las caras están hechas a partir de 2 ó 3 tipos de polígonos regulares. Existen 13, llamados **sólidos arquimedianos**.

Para los poliedros convexos, regulares o no, existe una relación entre el número de Vértices, de Aristas y de Caras:

$$V + C = A + 2.$$

Fue descubierta por **Euler** en 1752.

¿Qué sucede para un grafo planar?
¿Para un sólido con un agujero?
¿Con dos agujeros?

Rellene el cuadro de debajo:

Poliedro	Caras	Vértices	Aristas
cube	6	8	12
...			

¿Existe alguna relación entre estos números?

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Patrones de polígonos, hojas de cartón, tijeras, una taladradora

45

46

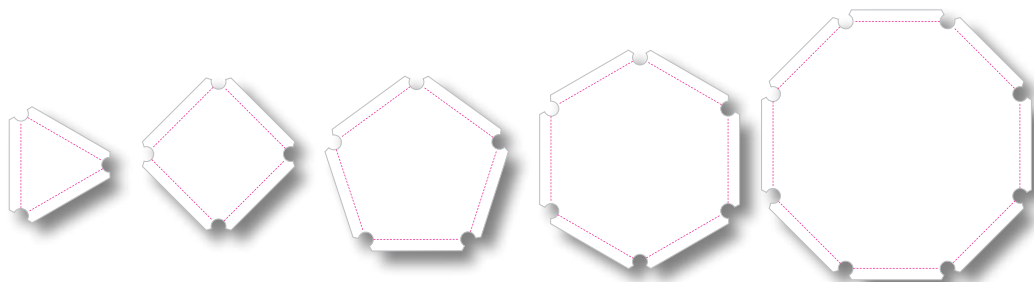
47

48

49

¡Fabrique, deduzca!

- En grupos, recorten polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 u 8 lados, como se indica.
- Ensámblenlos para construir un poliedro regular, semi-regular.
- ¿Cuántos poliedros regulares diferentes pueden construirse? ¿Y semi-regulares?



Aplicaciones de las matemáticas

Estas estructuras del espacio son utilizadas por los arquitectos. Pero se encuentran también en la naturaleza e interesan también a los físicos (empaquetamientos), los biólogos y los naturalistas (diatomeas).

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Poliedros - Euler - Platón - Arquímedes

Problemas complejos

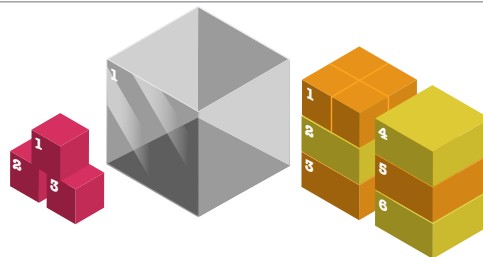


Hágalo usted mismo

MATERIAL: 3 pequeños cubos de madera (o de espuma, ...), 6 placas (del mismo material), hechas a partir de cuatro cubos pegados en plano, 1 recipiente de 3x3x3 unidades

¡Rellene el cofre!

El desafío: rellene el cubo de tamaño 3x3x3 con ayuda de estos dos tipos de cajas



¿Qué retener?

En la vida cotidiana, encontramos habitualmente este problema: colocar el mayor número posible de objetos en una caja o la mayor cantidad posible de cajas en un baúl. Para los matemáticos – entre otros – es un **problema complejo**: cuantos más objetos hay, mayor tiempo se requiere para encontrar una solución. Y este tiempo aumenta exponencialmente con el número de objetos.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Una mochila y objetos para meter dentro

El problema de la mochila

El desafío: rellene la mochila lo más posible (en valor en euros) **sin sobrepasar los 15 kg.**



¿Qué retener?

Una pirámide el doble de alta tiene un volumen 8 veces mayor. De este modo, por recomposición, se pueden comparar los volúmenes de estas dos pirámides. Triplicando la altura, se puede incluso reencontrar la fórmula del volumen de cualquier pirámide:

$$\text{Volumen} = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{3}$$

Con otros sólidos, el problema de empaquetamiento es, en general, más complicado.

Para ir más lejos

Encuentre los poliedros que, como el cubo, rellenan ellos solos el espacio sin agujeros ni deformaciones.

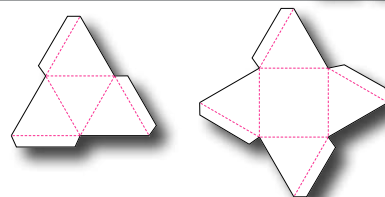
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 patrones de tetraedros, 1 cúter, 1 par de tijeras, 1 tubo de pegamento

50 51

La gran pirámide

Fabrique 6 tetraedros regulares y 6 pirámides con base cuadrada con las mismas caras triangulares. Con estas pequeñas pirámides, construya una pirámide el doble de alta. Compare los volúmenes de estas pirámides.

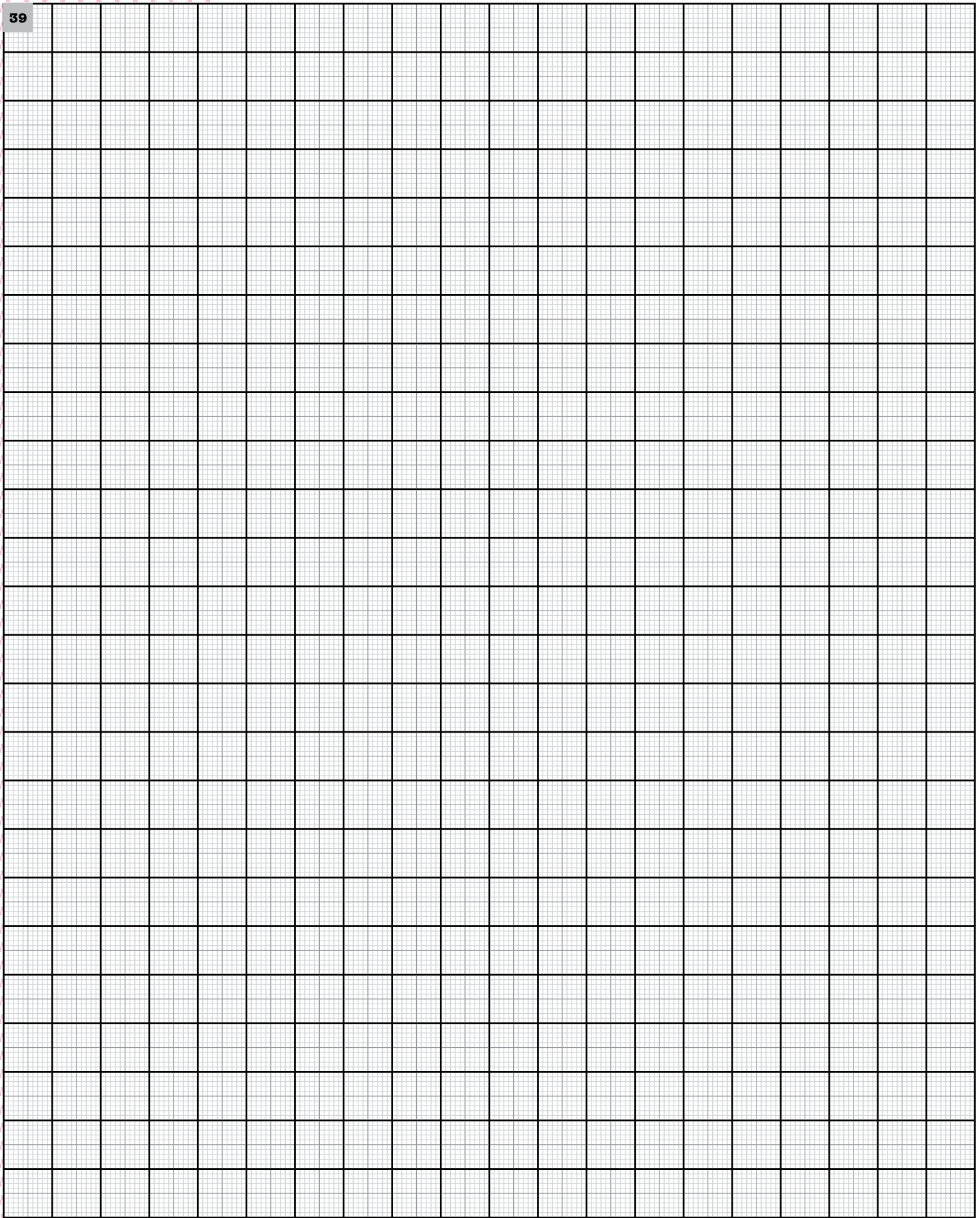


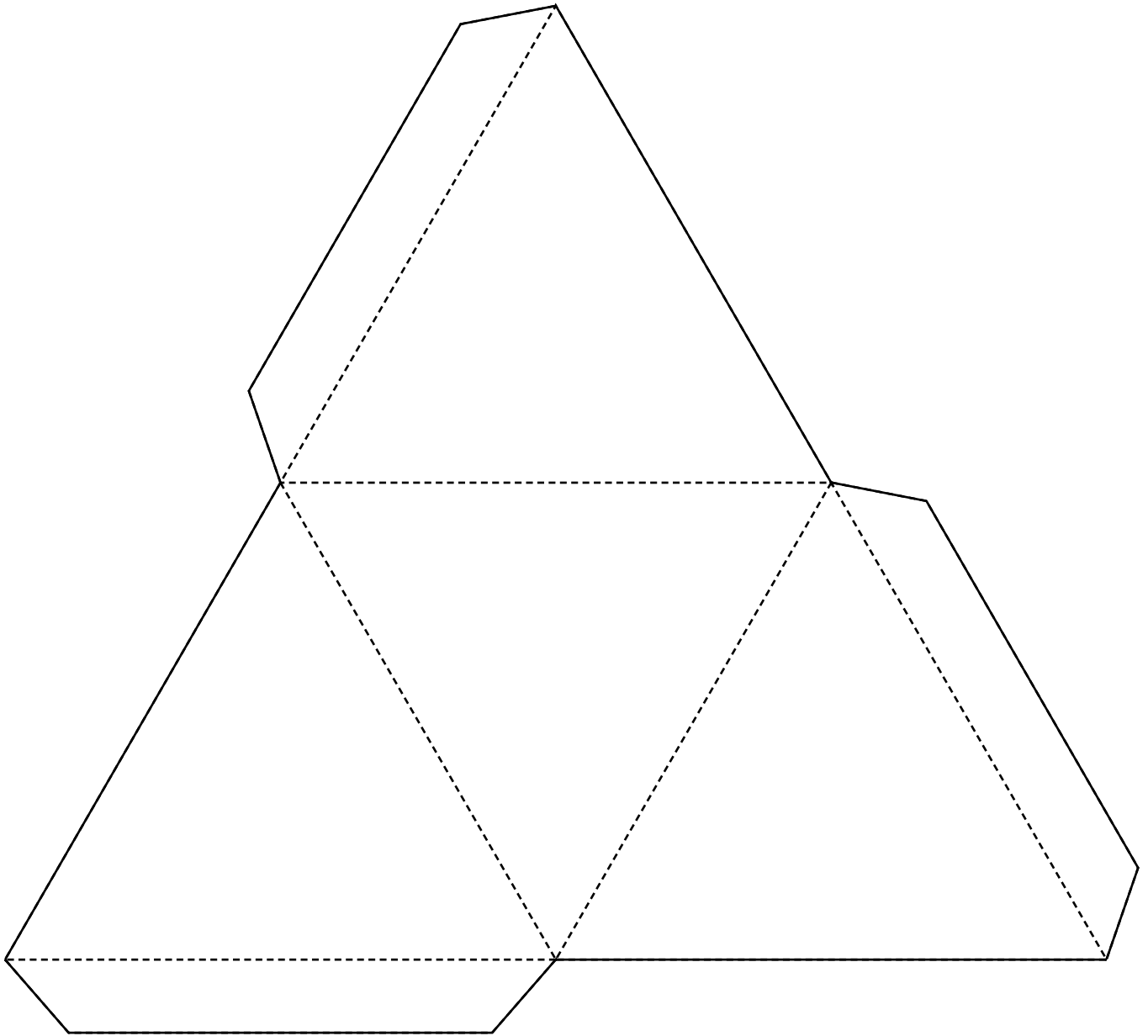
Aplicaciones de las matemáticas

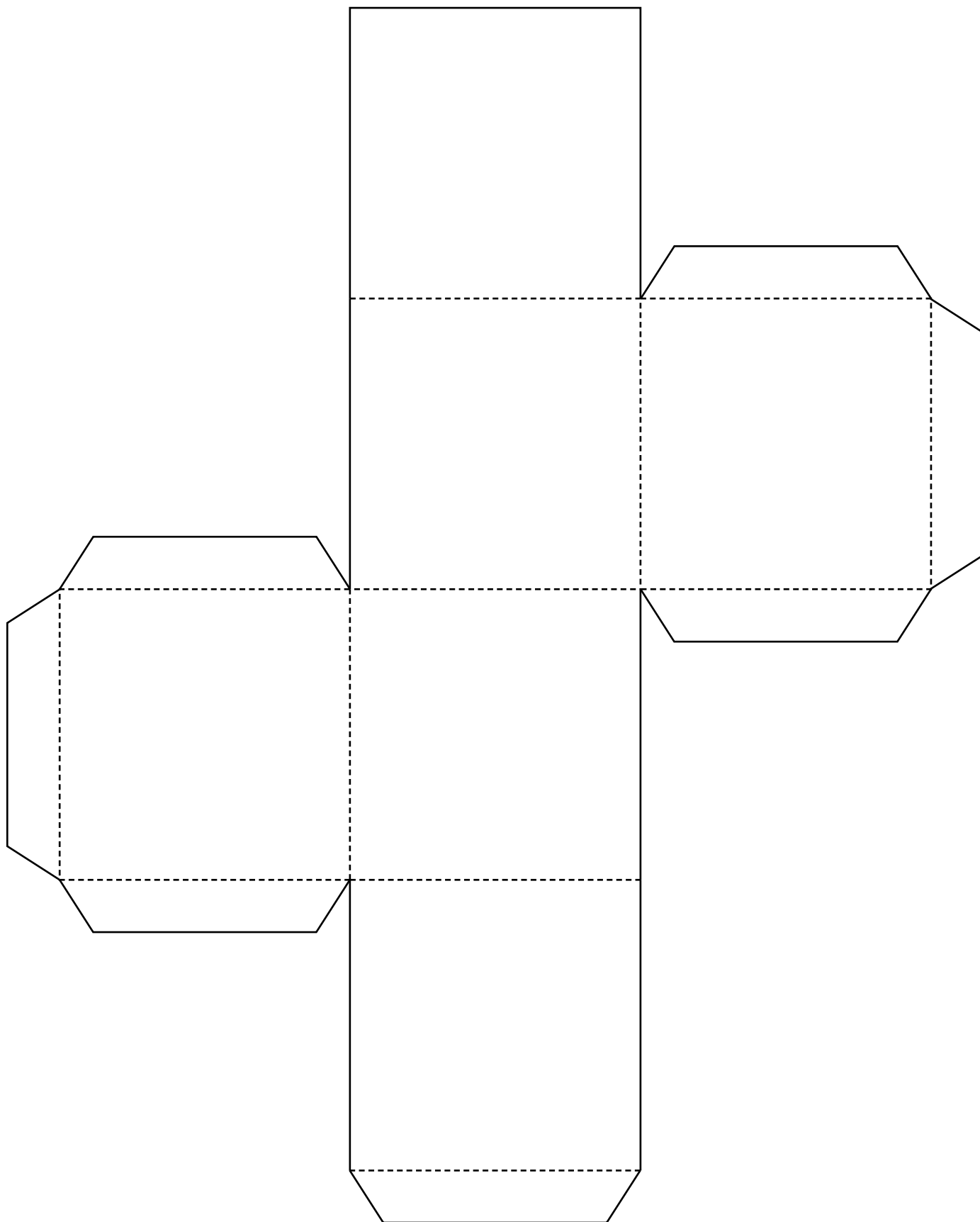
Fuera de la vida cotidiana, estos problemas de empaquetamiento óptimo interesan a los transportistas por carretera, aéreos o marítimos y a las empresas que se dedican al envasado.

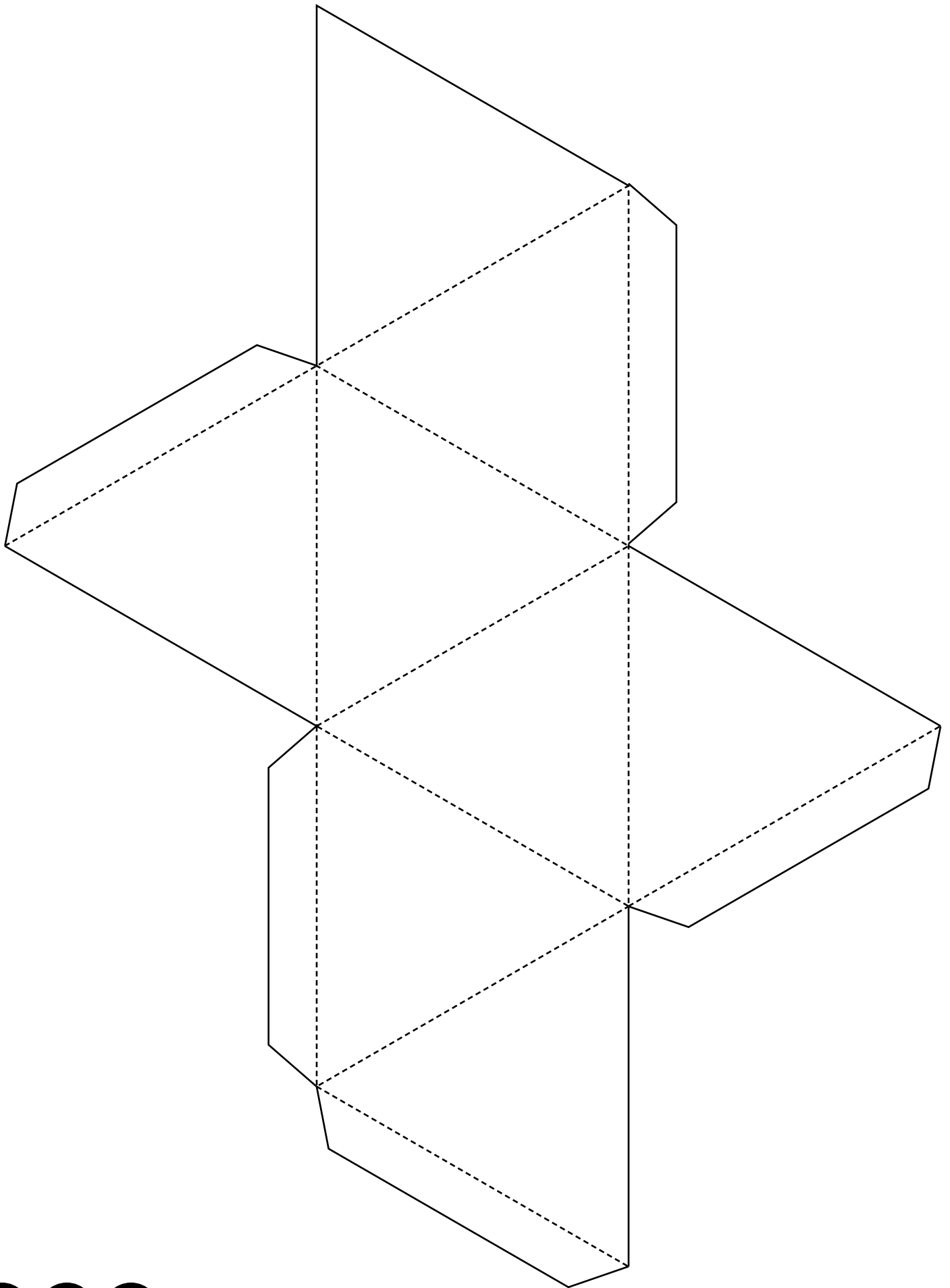
PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

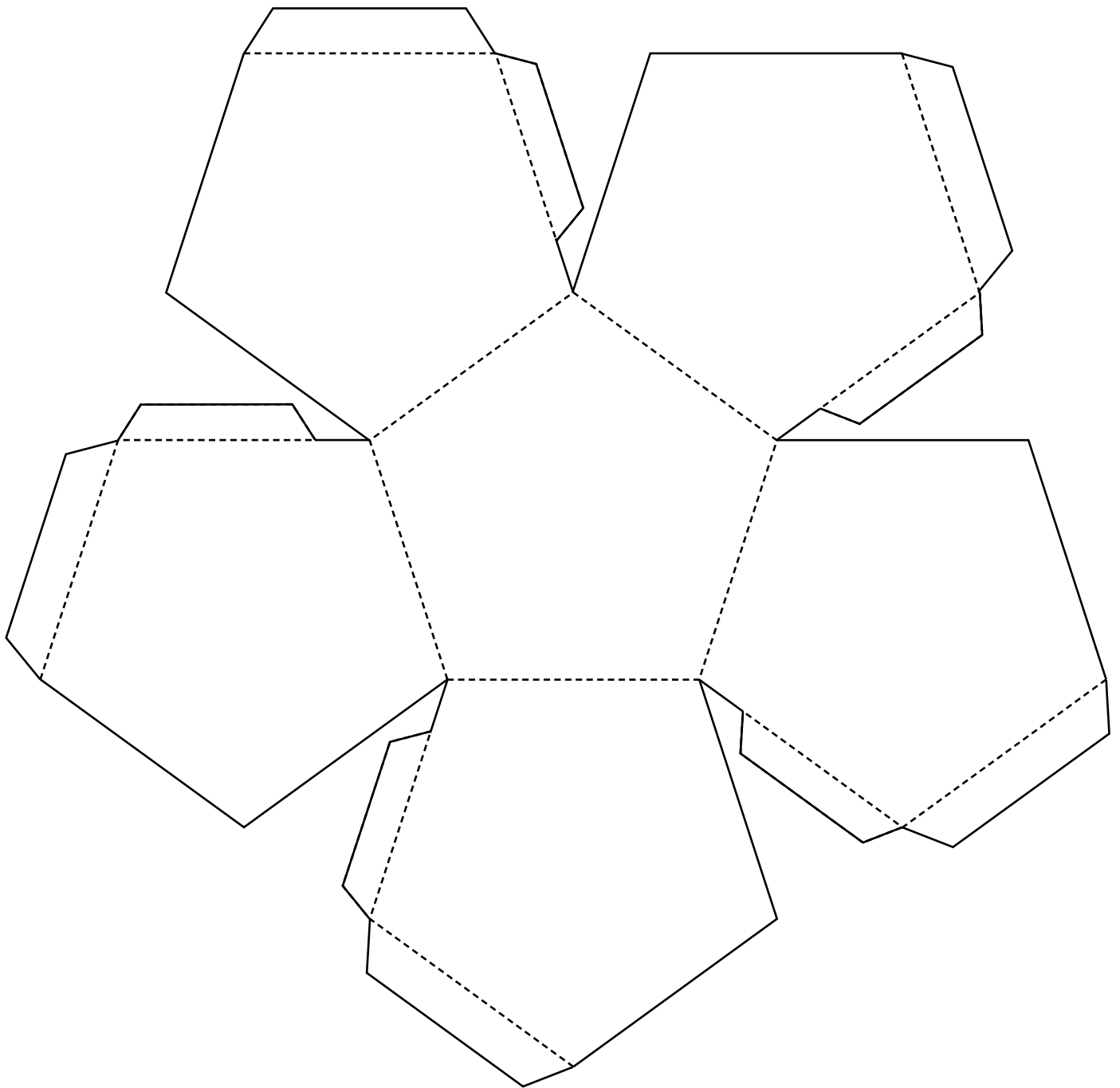
Volumen de pirámide - Problema complejo - Problema

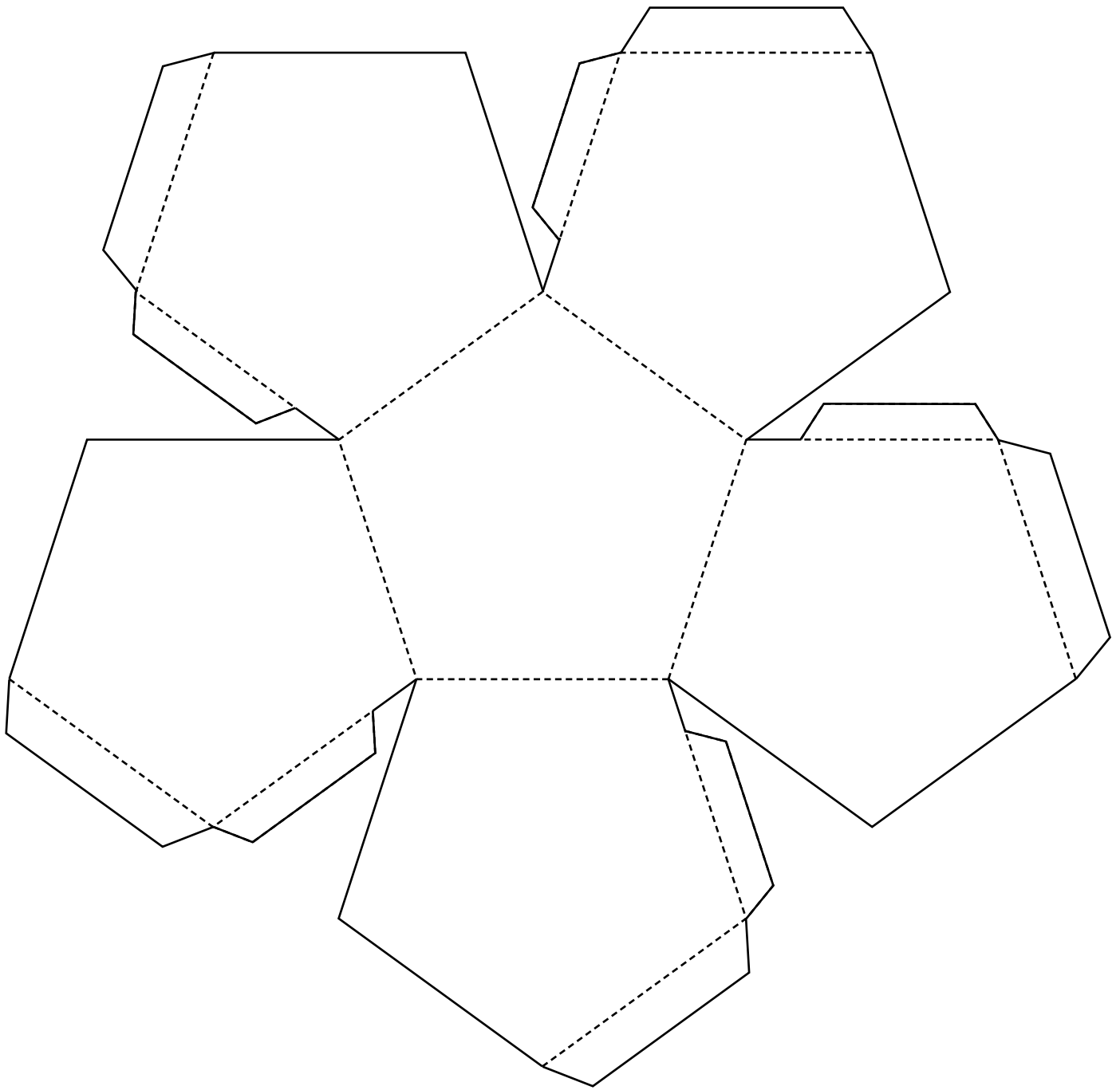


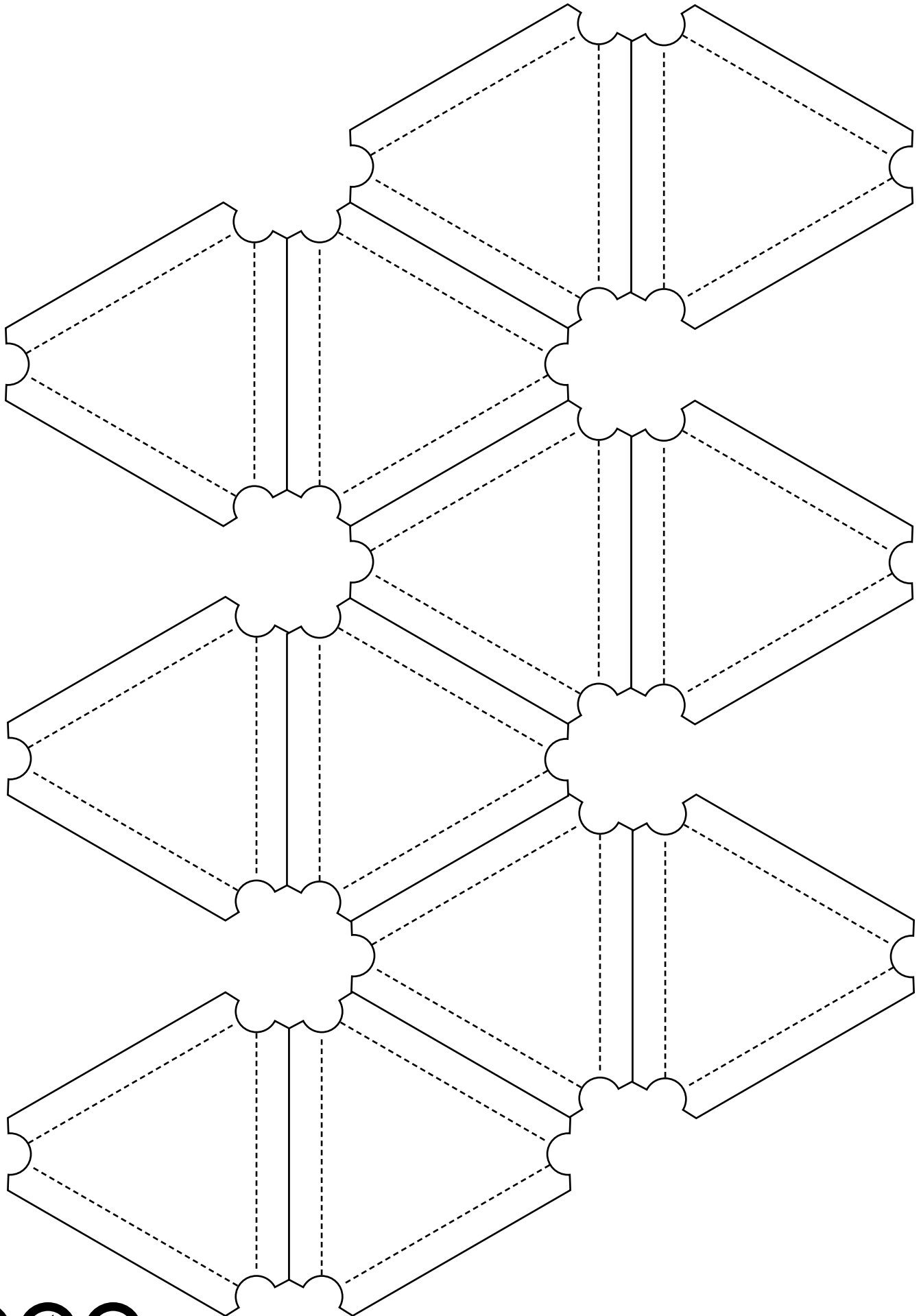


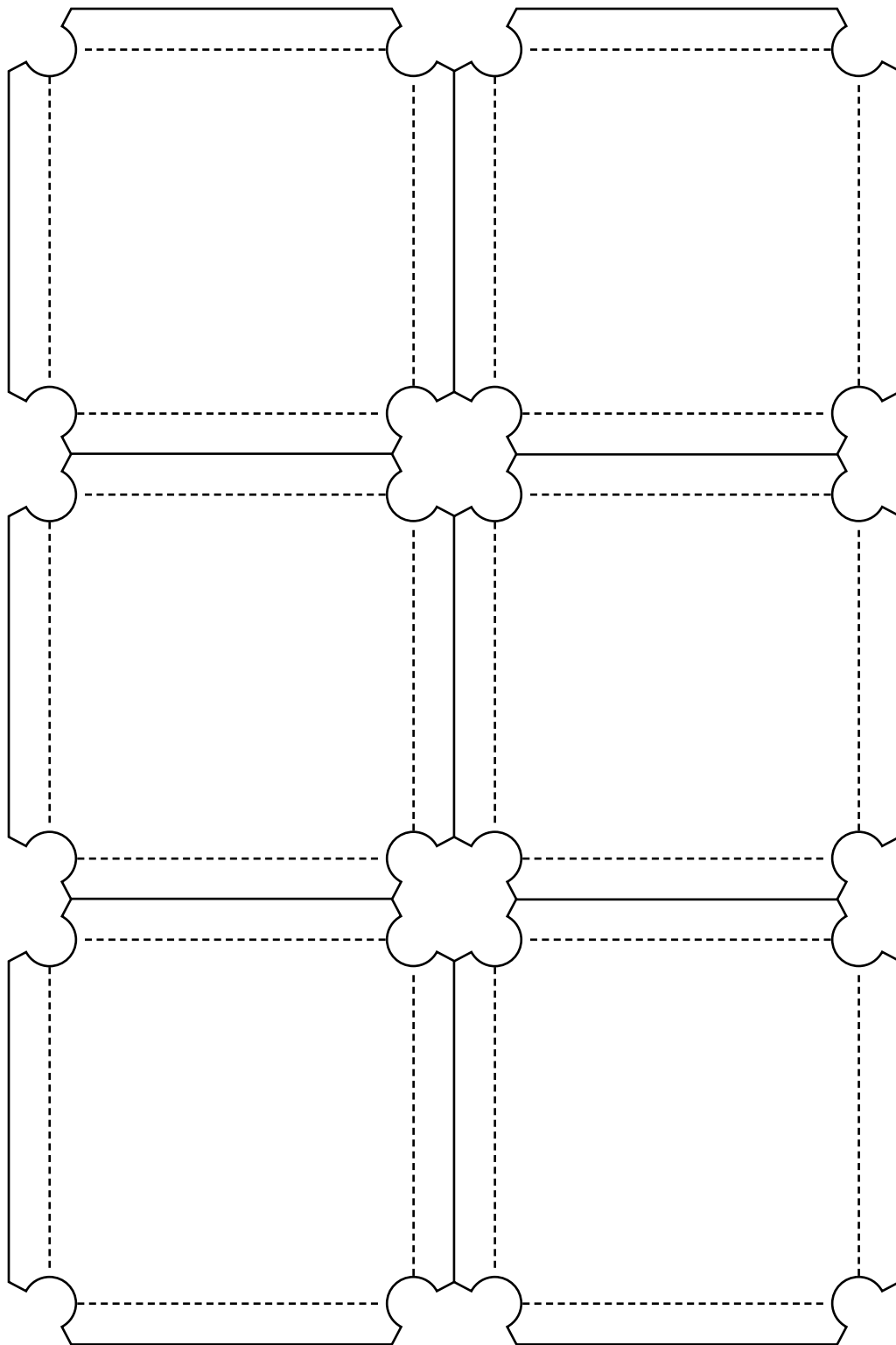


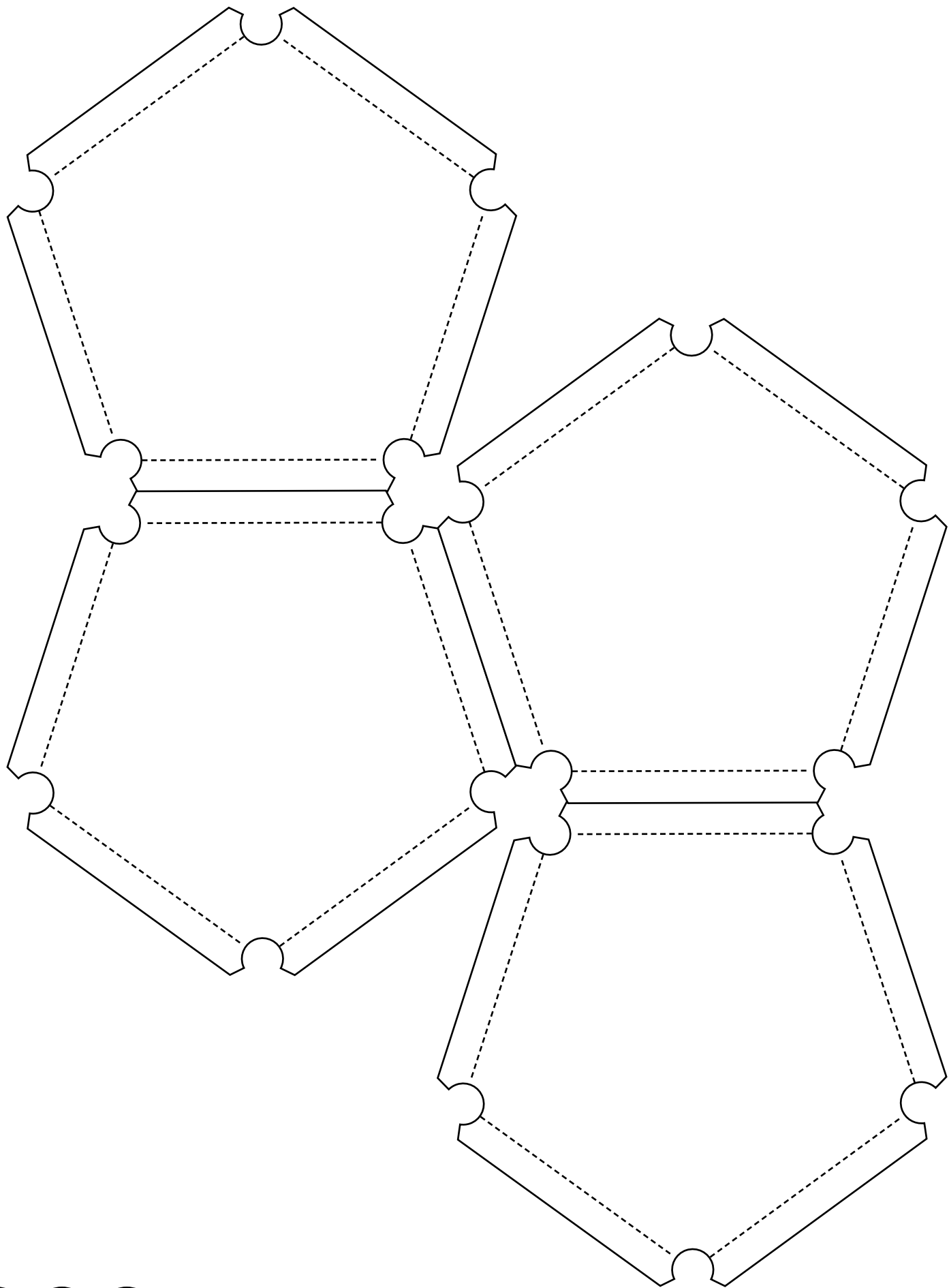


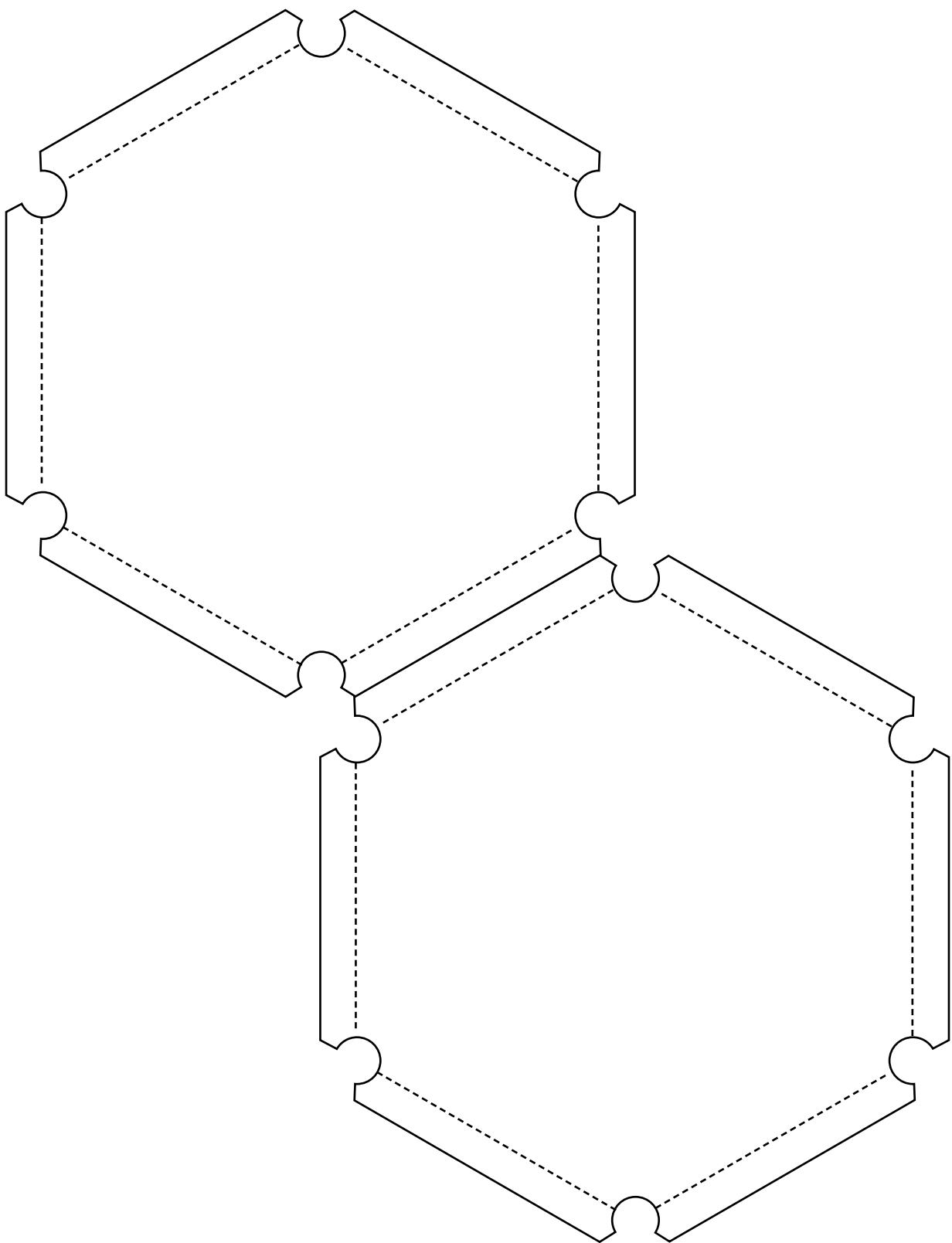
**1/2**

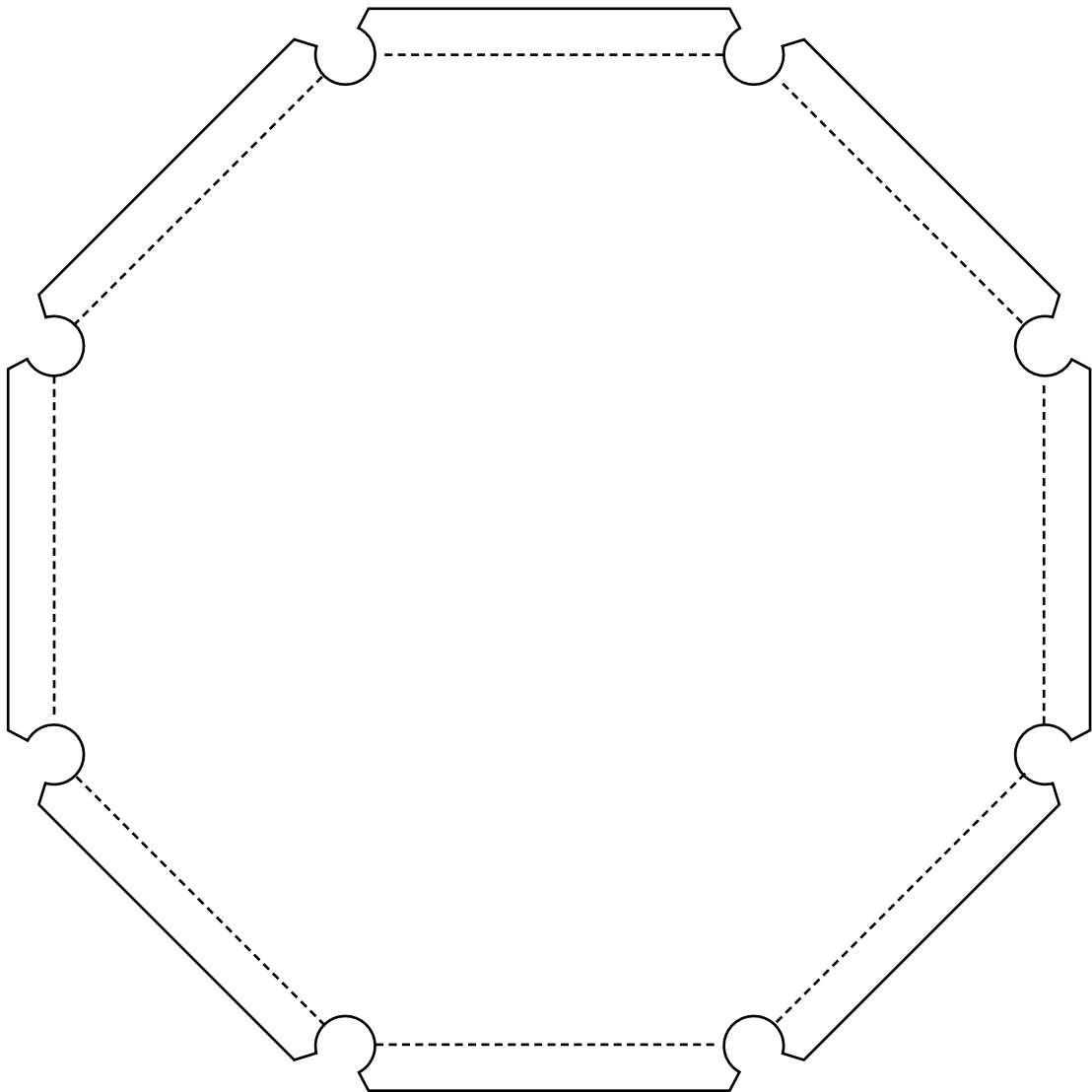
**2/2**

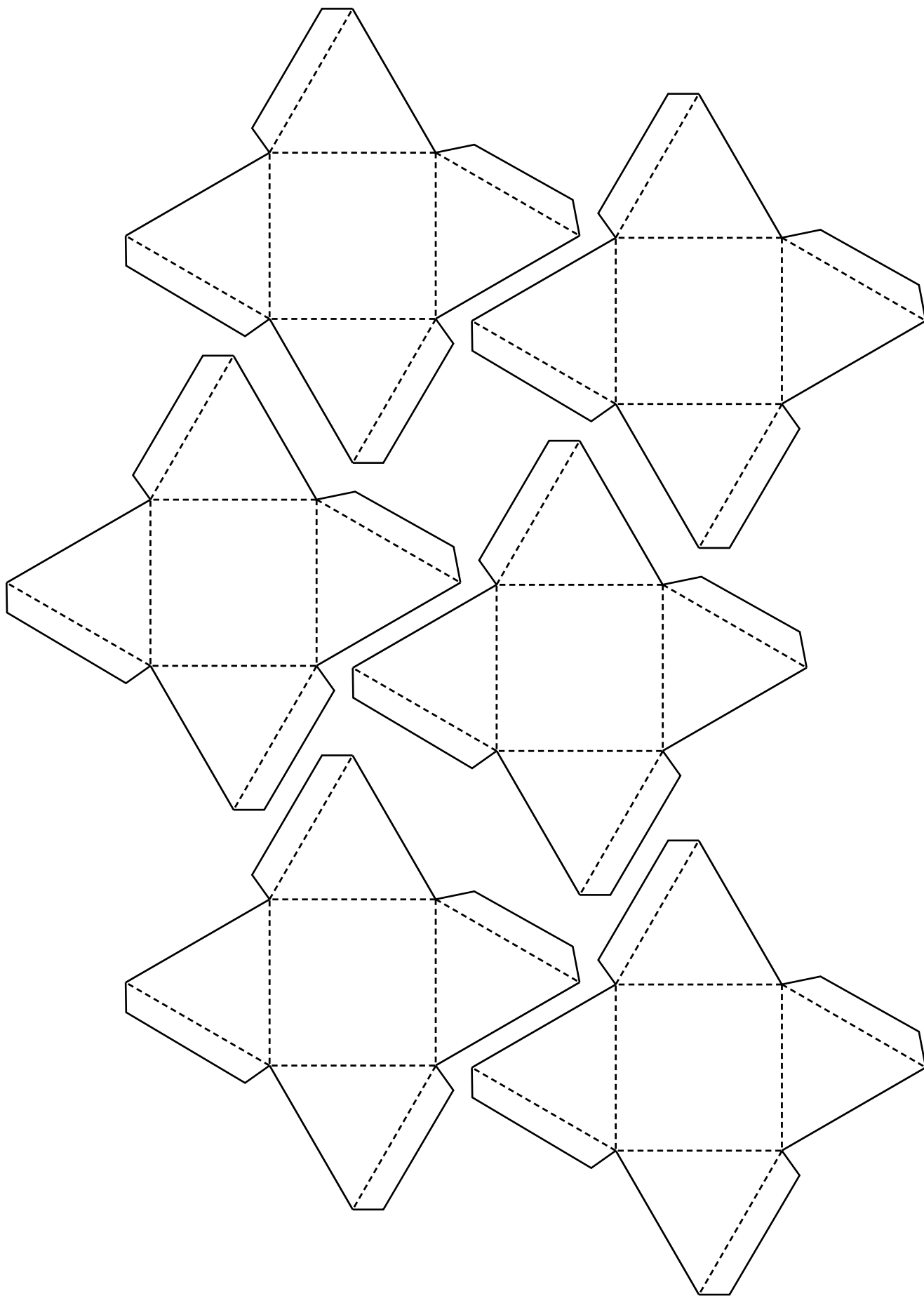


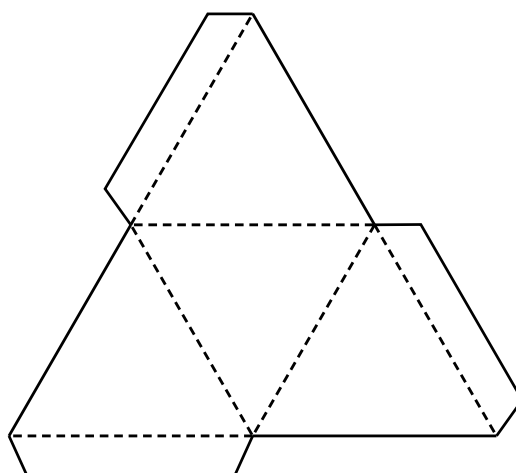
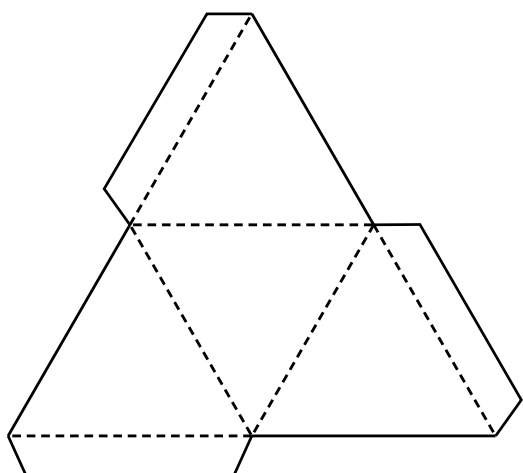
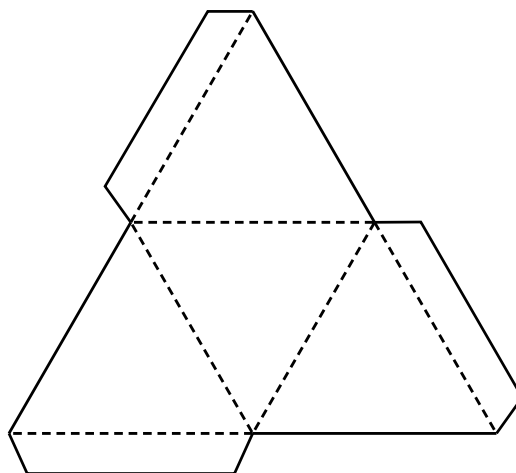
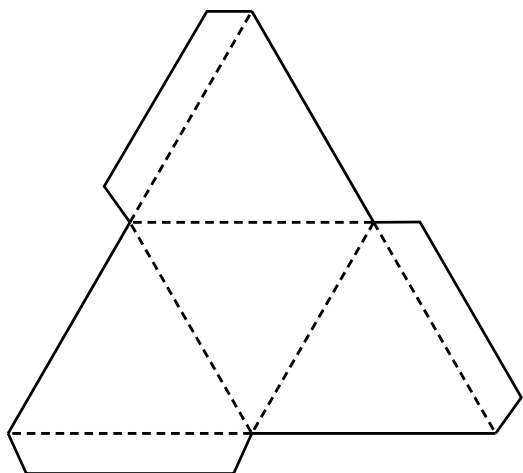
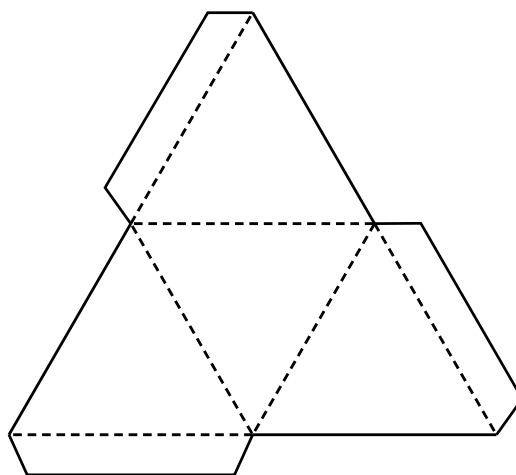
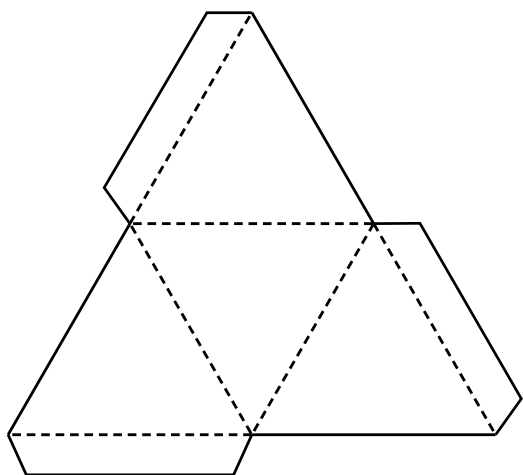














4. Conectarse



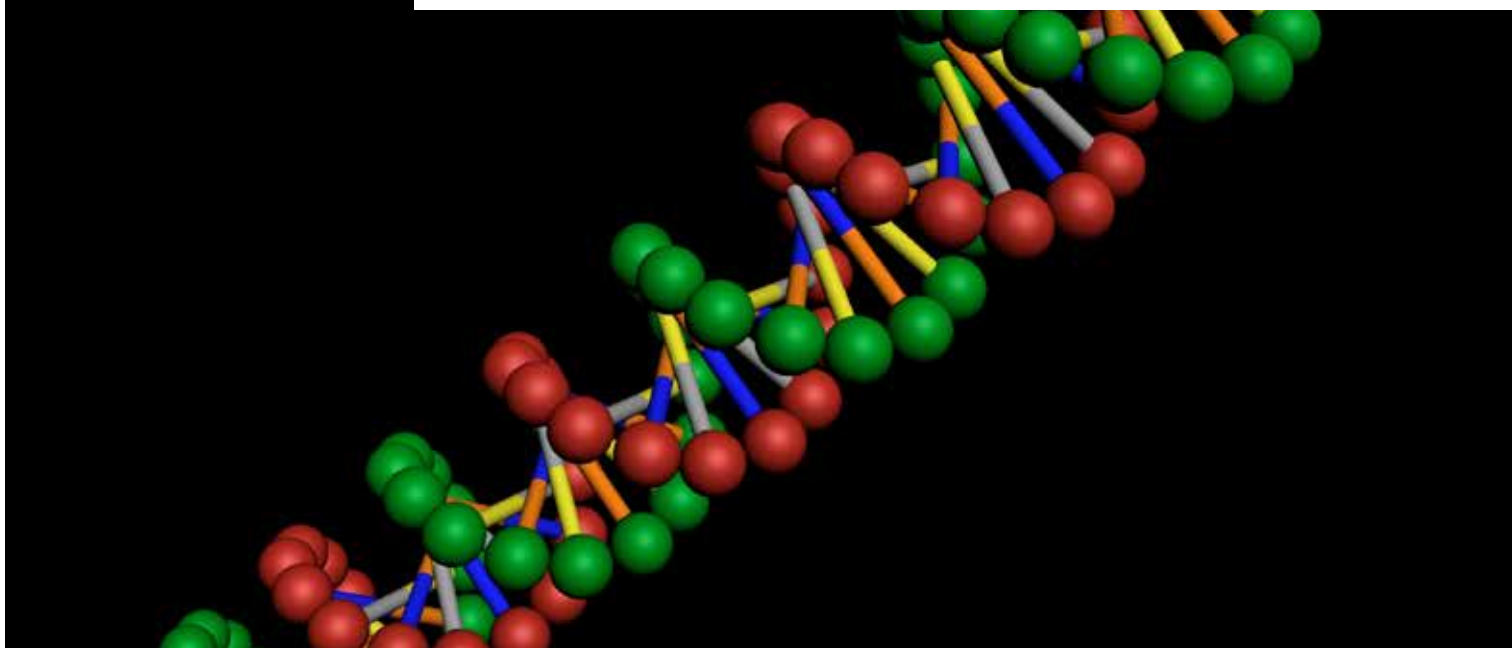
De un único trazo



¡Cuatro colores bastan!



¿Dígame?



De un único trazo



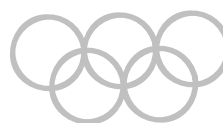
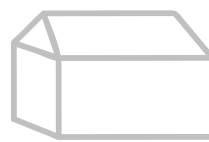
Hágalo usted mismo

MATERIAL: Modelos de dibujos, 1 lápiz

57

Dibuje de un único trazo!

Intente volver a trazar estas figuras sin levantar el "lápiz" del papel y sin pasar dos veces sobre la misma línea. ¿Cuándo es posible? ¿E imposible?



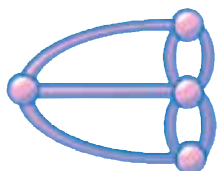
¿Qué retener?

Königsberg*, 1736

¿Es posible atravesar la ciudad cruzando cada uno de sus siete puentes una y sólo una vez? Para solucionar este problema, en el origen de la teoría de grafos, Euler extrae la información esencial: la ciudad está dividida en cuatro zonas separadas por las aguas del río, supongamos que representadas por cuatro "puntos", que deben conectarse mediante siete líneas que simbolizan los siete puentes. El problema se transforma entonces en el siguiente: en este dibujo, ¿existe un camino que pase sólo una vez por cada línea? Este fue el inicio de la **teoría de grafos**.

La respuesta de **Euler** fue: ¿cuántos puntos hay en los que concurran un número impar de trazos?

¡Sólo hay solución si dicho número es igual a cero o dos!



Pregunta: ¿Y si se añadiera un puente uniendo una isla con una de sus riberas (como sucede hoy en día)?

* Actualmente Kaliningrado (región rusa separada de Rusia por Polonia y

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Un juego de dominó sin las fichas dobles

Dominós - Dominós

Intente hacer una cadena con todas las fichas, siguiendo la regla del juego. Vuelva a comenzar sin las fichas que tienen un 6, después sin aquellas que llevan un 5, etc. ¿Es siempre posible? ¿Por qué?

Cada ficha de dominó representa la arista de un grafo con 7 vértices, numerados del 0 al 6. Cada camino euleriano corresponde a una cadena de dominó.

Aplicaciones de las matemáticas

La teoría de grafos se utiliza para modelizar y estudiar situaciones muy concretas como las redes de telecomunicaciones, los circuitos electrónicos, las redes de distribución -agua, gas, electricidad, correos...- y numerosos problemas de logística, transporte, producción...

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Grafos - Camino euleriano - Euler

¡Cuatro colores bastan!



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 mapa geográfico, 4 lápices o rotuladores

58

¡¡¡Con 4 colores como máximo!!!

Uno o dos jugadores

Intente colorear este mapa utilizando el menor número posible de colores.

La regla a seguir: dos países vecinos deben tener diferente color. ¡Incluso el mar cuenta!

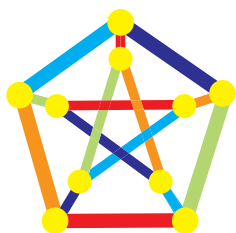
Pierde el primero que no puede ya jugar.



¿Qué retener?

El teorema de los 4 colores

La teoría de grafos ha permitido modelizar este problema y reducir el número de casos a estudiar. Pero sólo gracias a un ordenador se han podido analizar todos los casos posibles y se ha conseguido probar que son suficientes 4 colores (como mucho). Es posible encontrar un algoritmo de coloración automática para 6 colores. Pero este problema todavía no tiene solución para el caso de 4 colores. Es un problema "complejo": el tiempo de resolución empleado por los algoritmos crece de manera exponencial en función del número de "países". Algunos algoritmos no deterministas (como los algoritmos genéticos) permiten resolverlos más rápidamente.



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Poliedros regulares (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, pirámide...), lápices o rotuladores de 4 colores

59

60

61

62

63

¿Y en el espacio?

Construya un poliedro regular (u otro) respetando la regla de los 4 colores: dos caras adyacentes deben tener colores diferentes.

De la misma manera, construya un poliedro con un agujero e intente dividirlo en 7 regiones que precisen 7 colores diferentes.

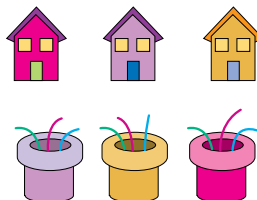


Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 dibujo en plano y sobre un toro

3 pozos y 3 casas

En cada caso, intente conectar estos tres pozos y estas tres casas mediante 3 redes de superficie sin que éstas se crucen.



Pregunta: ¿Y si se añaden un cuarto pozo y una cuarta casa?



Pregunta

Un lobo, una cabra y una col se encuentran en la ribera derecha de un río. Un barquero debe transportarlos al otro lado del río, pero sólo puede llevar a uno de ellos en cada viaje. ¡Ayúdelo!

¡Cuidado!

¡El lobo come la cabra y la cabra la col!!

Aplicaciones de las matemáticas

Estos algoritmos intentan resolver problemas de agrupamiento de objetos respetando ciertas reglas. Encuentran aplicaciones prácticas en la puesta a punto de programación de tareas (calendarios de operaciones, horarios, exámenes...), de redes de teléfonos fijos o móviles, de redes de comunicación por Internet, de transmisiones seguras vía web,...

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Coloreado de grafos - Algoritmos - Algoritmos genéticos



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 mapas, 1 lápiz

64

El viajante

Un viajante quiere visitar diez ciudades invirtiendo el menor tiempo posible en el trayecto. Debe salir de una ciudad y regresar pasando una única vez por todas las demás. Ayúdele a realizar su viaje.



Atenas

3 Berlín

4 1 Bruselas

5 4 3 Lisboa

4 1 1 3 Londres

4 3 2 1 2 Madrid

4 1 2 5 2 4 Oslo

3 2 1 2 1 2 2 París

1 2 2 4 2 3 3 2 Roma

3 2 2 5 2 4 2 3 2 Varsovia

¿Qué retener?

Las distancias pueden medirse en tiempo invertido, en coste de recorrido, en gastos de electricidad o agua...

Este tipo de problema, que tiene un enunciado muy simple, posee soluciones más largas de calcular cuanto mayor es el número de ciudades. Si con 10 ciudades se precisan 60 etapas de cálculo realizadas en un microsegundo por un ordenador, con 100 ciudades se necesitarían 2^{60} pasos de cálculos (2 multiplicado por 2 sesenta veces) y cientos de años para un ordenador. Cuanto más complejo es un algoritmo más « tiempo-máquina » precisa.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Modelos de dibujos, poliedros para fabricar, 1 lápiz, 1 cordón

62

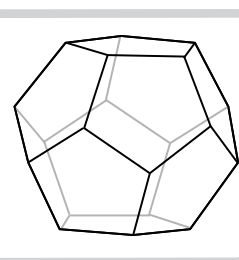
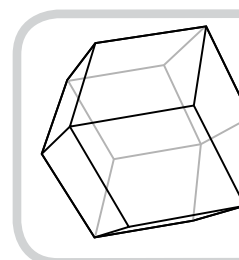
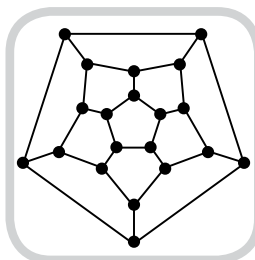
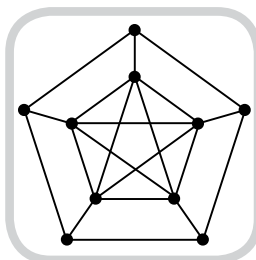
63

65

66

La vuelta del mundo

Elija una figura o un poliedro e intente encontrar un camino que pase una vez y sólo una por cada uno de los vértices.



¿Qué retener?

Encontrar un camino hamiltoniano, es encontrar un camino que pasa una vez por cada vértice. Este tipo de problema no ha encontrado aún una solución general. **Hamilton** demostró que hay soluciones para los veinte vértices de un dodecaedro regular (hecho de 12 pentágonos). ¿Sucede lo mismo para el otro dodecaedro (hecho de 12 rombos)?

¿Dígame?

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Un tablero de ajedrez, piezas para recortar, tijeras



¿Jaque a las damas?

- Intente colocar ocho damas sobre un tablero de ajedrez sin que ninguna de ellas pueda comer a las demás.
- Intente desplazar un rey de casilla en casilla para recorrer una sola vez todas las casillas (sin moverse en diagonal).
- Intente desplazar un caballo sobre un tablero de ajedrez pasando sobre cada una de las casillas una y sólo una vez.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 lápiz

De un Tema a Otro

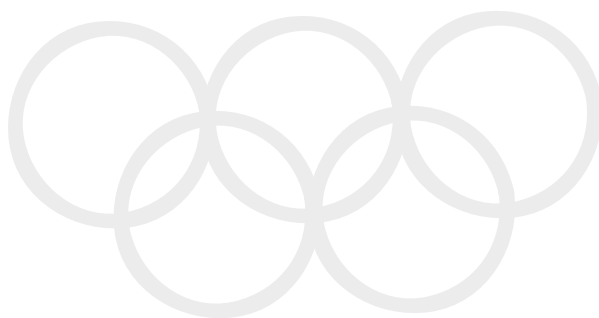
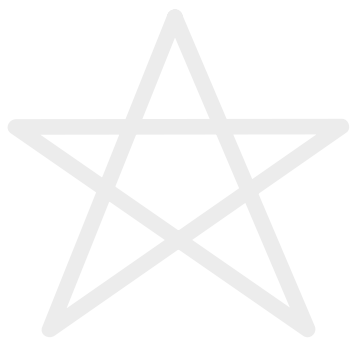
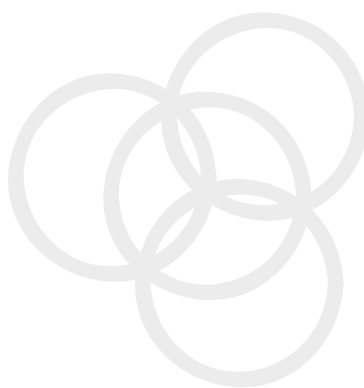
Que hay que hacer : Elija una palabra arriba y otra abajo y trate de pasar de una a la otra, cambiando nada más que una letra por vez, como por ejemplo, para pasar de un TEMA a OTRO. ¿y de DOS a MIL? ¿y de ... a ...?

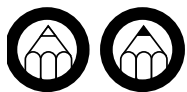
Aplicaciones de las matemáticas

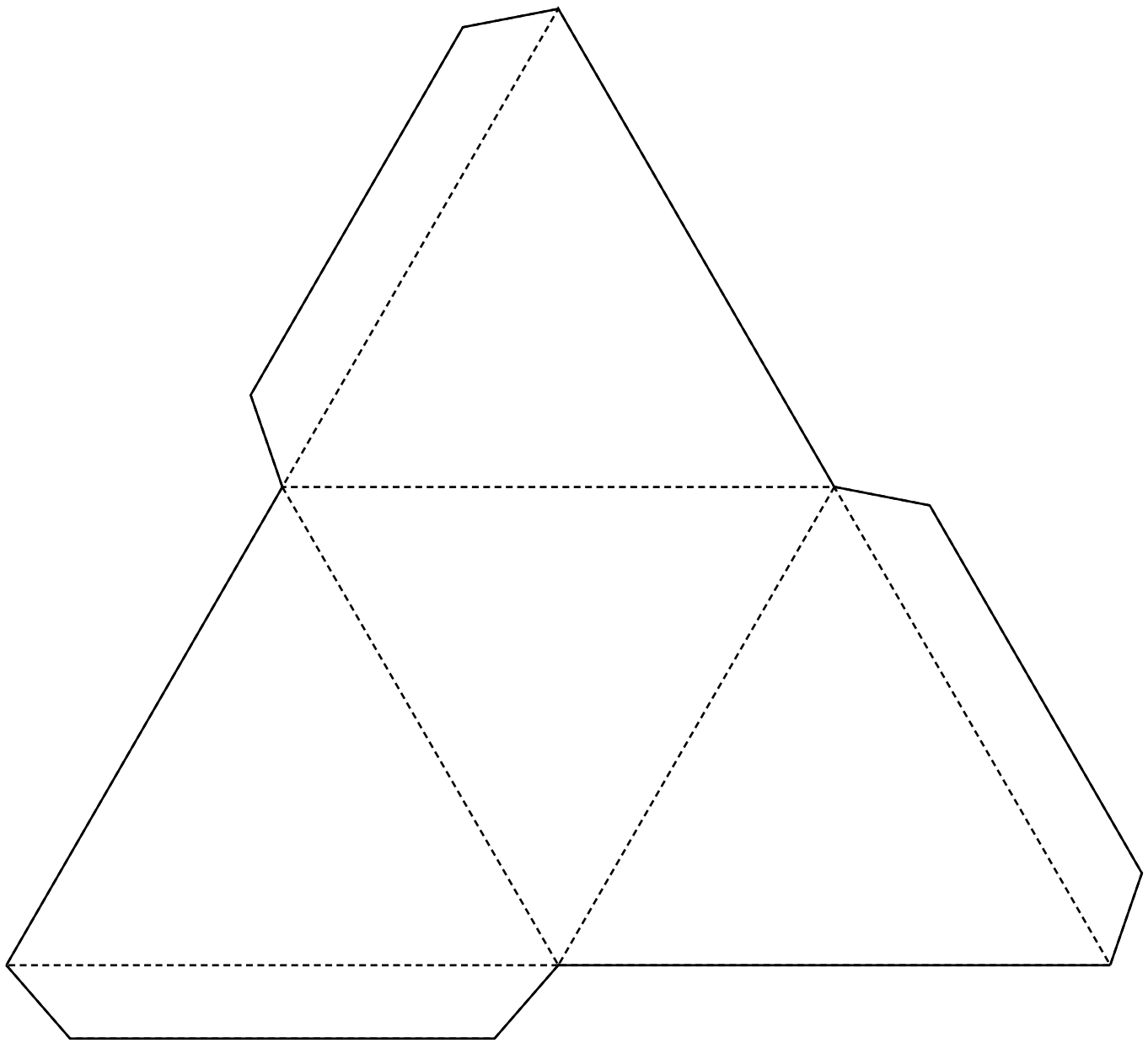
Matemáticos, informáticos y genetistas realizan numerosas investigaciones para encontrar algoritmos eficaces que puedan resolver estos problemas complejos... como el estudio de la secuenciación de las 30.000 a 100.000 bases (A-T C-G) de una molécula de ADN.

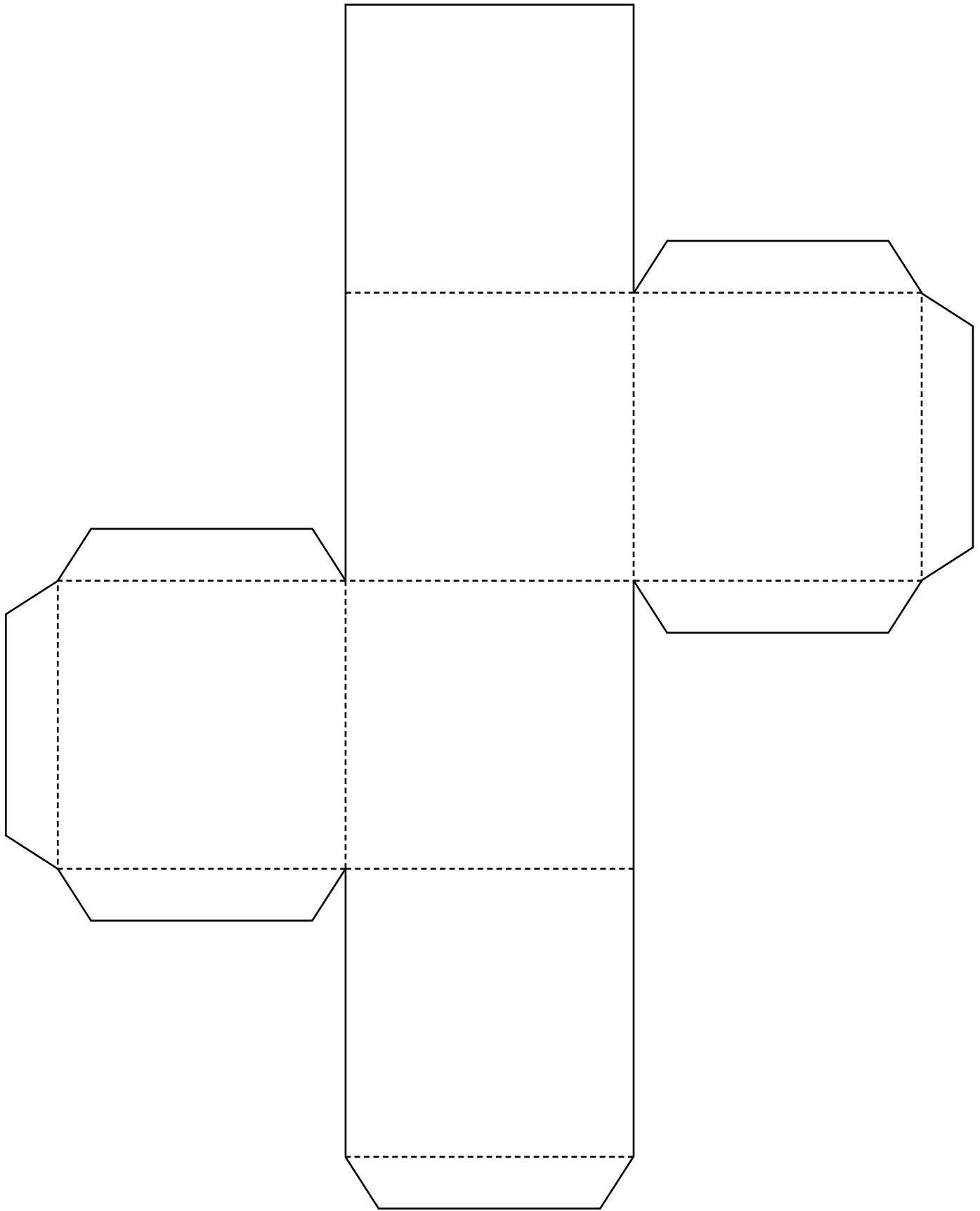
PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

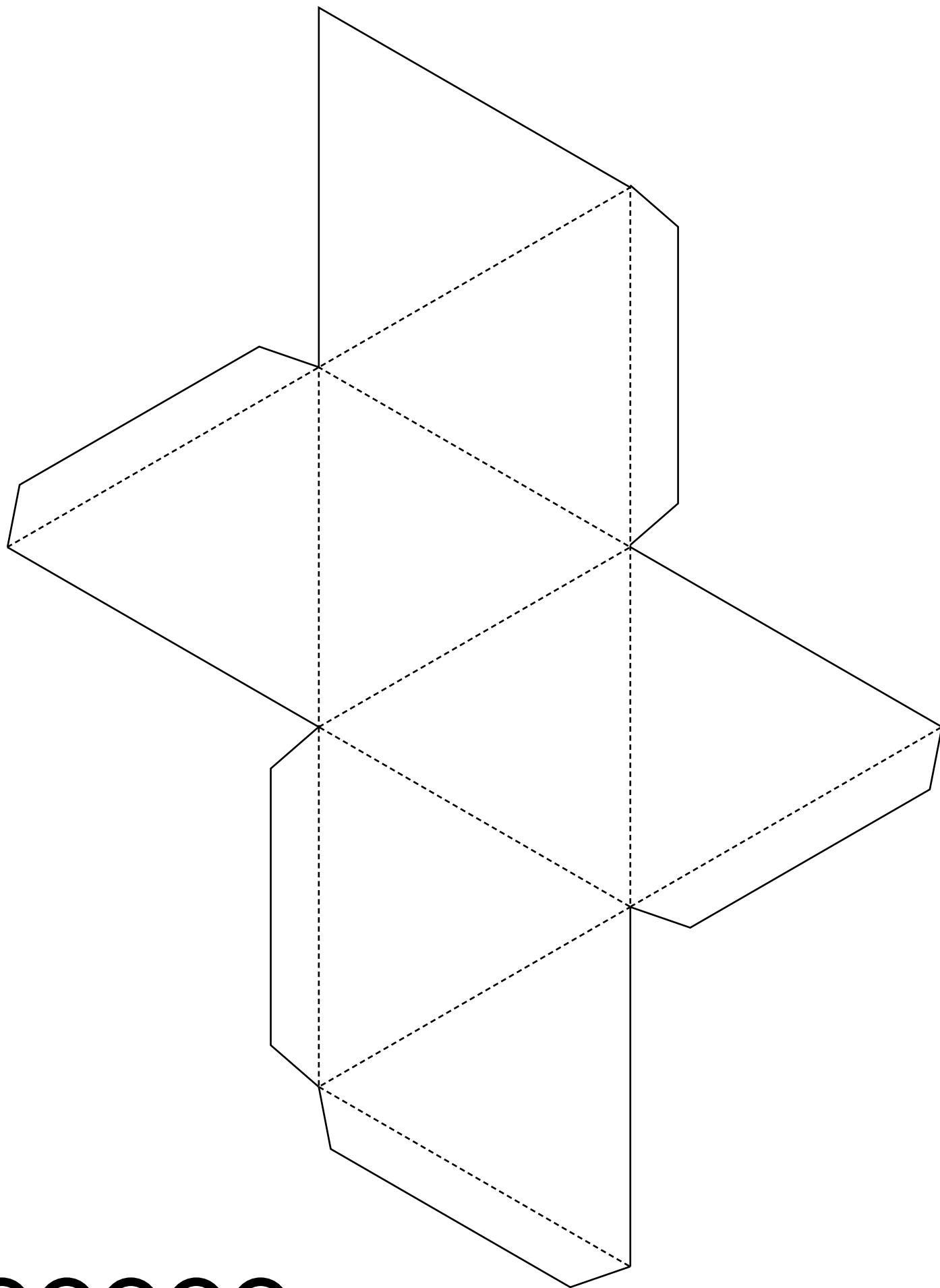
Grafos - Caminos hamiltonianos - Problema del viajante - Optimización

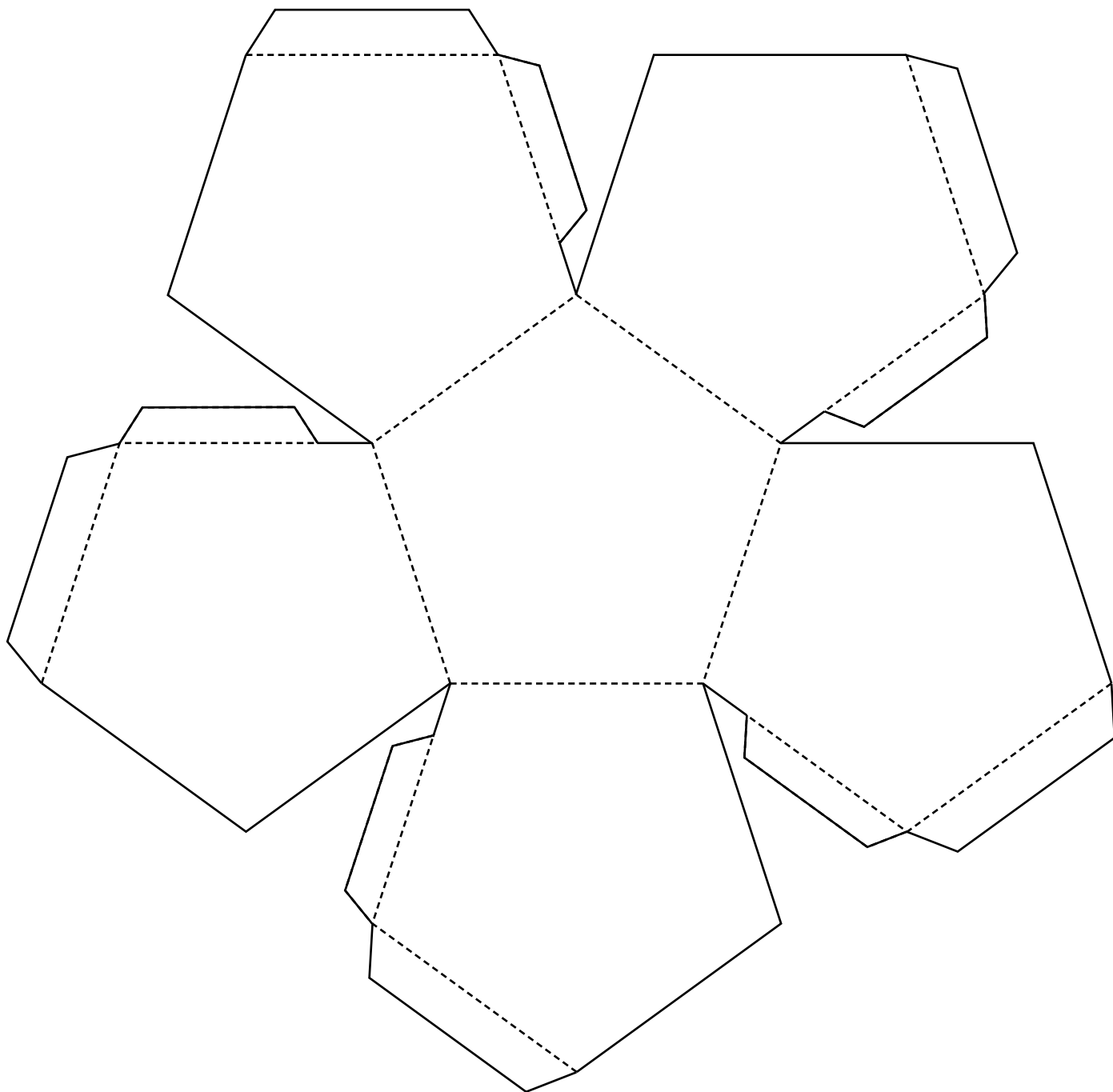


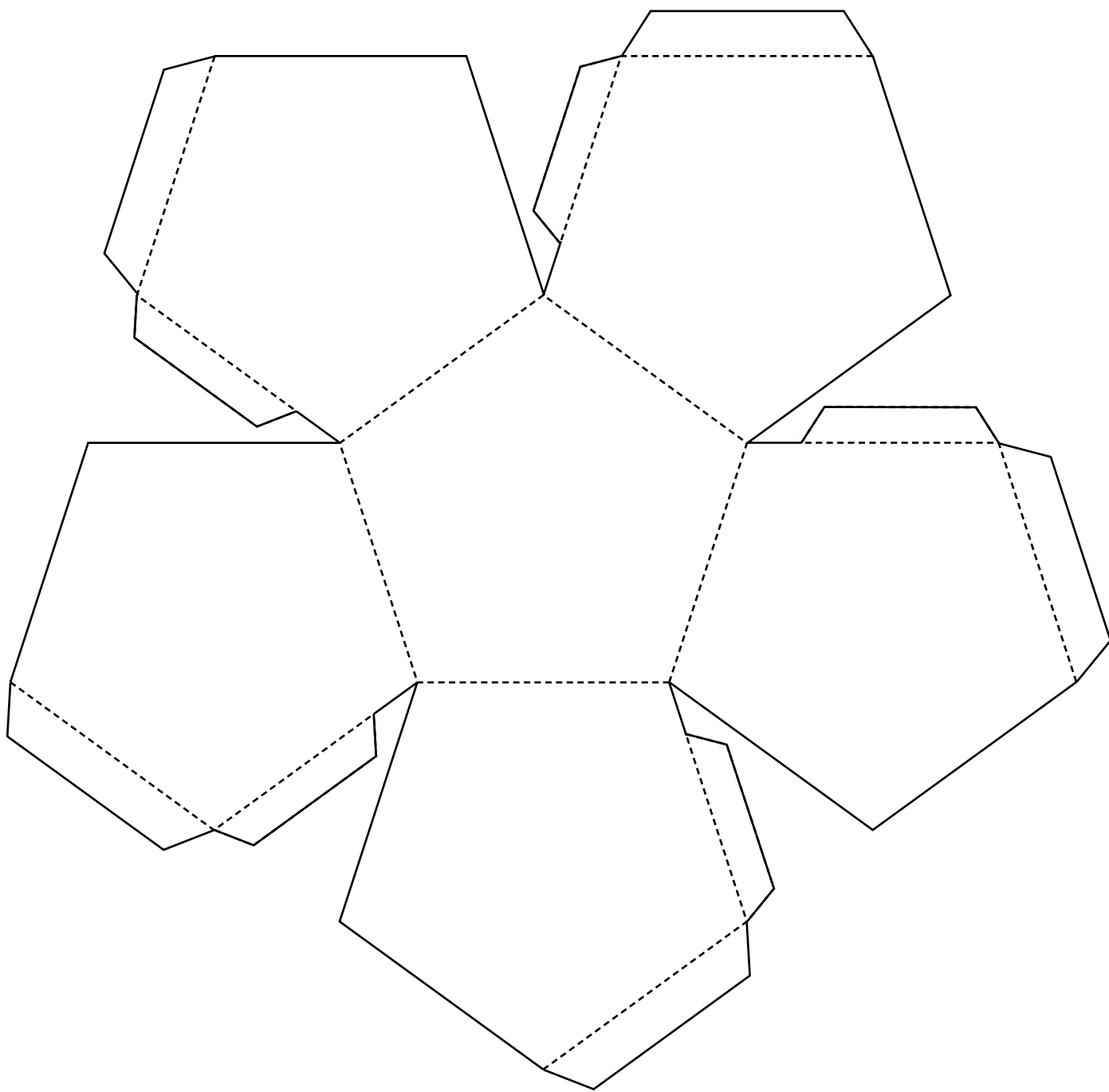








**1/2**

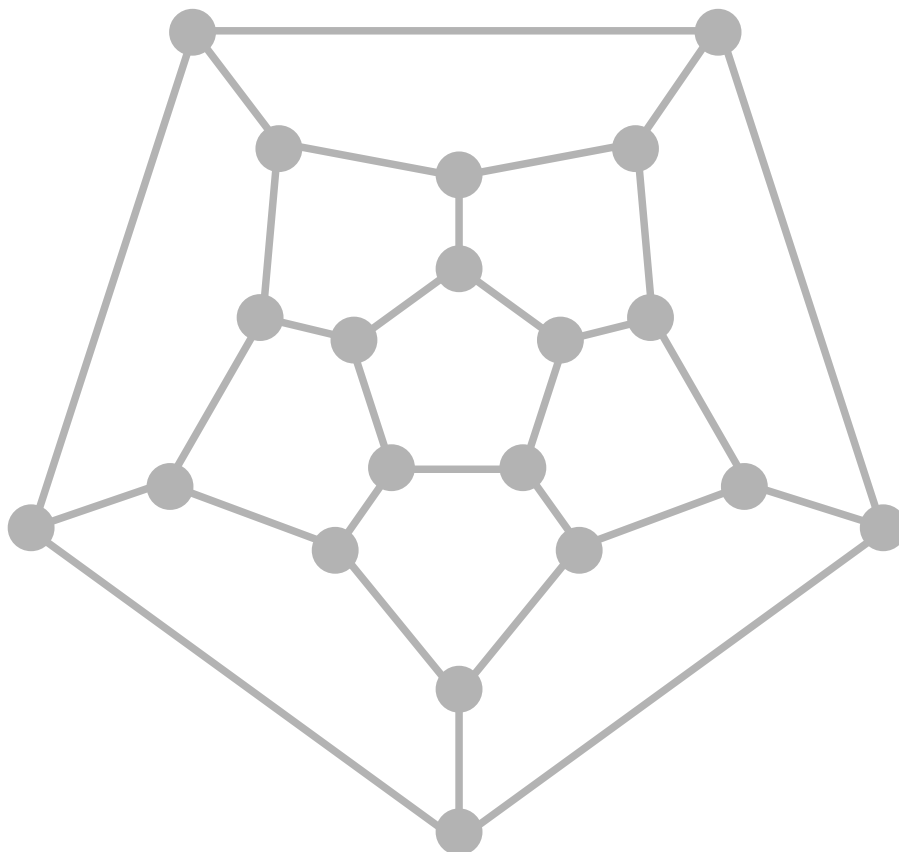
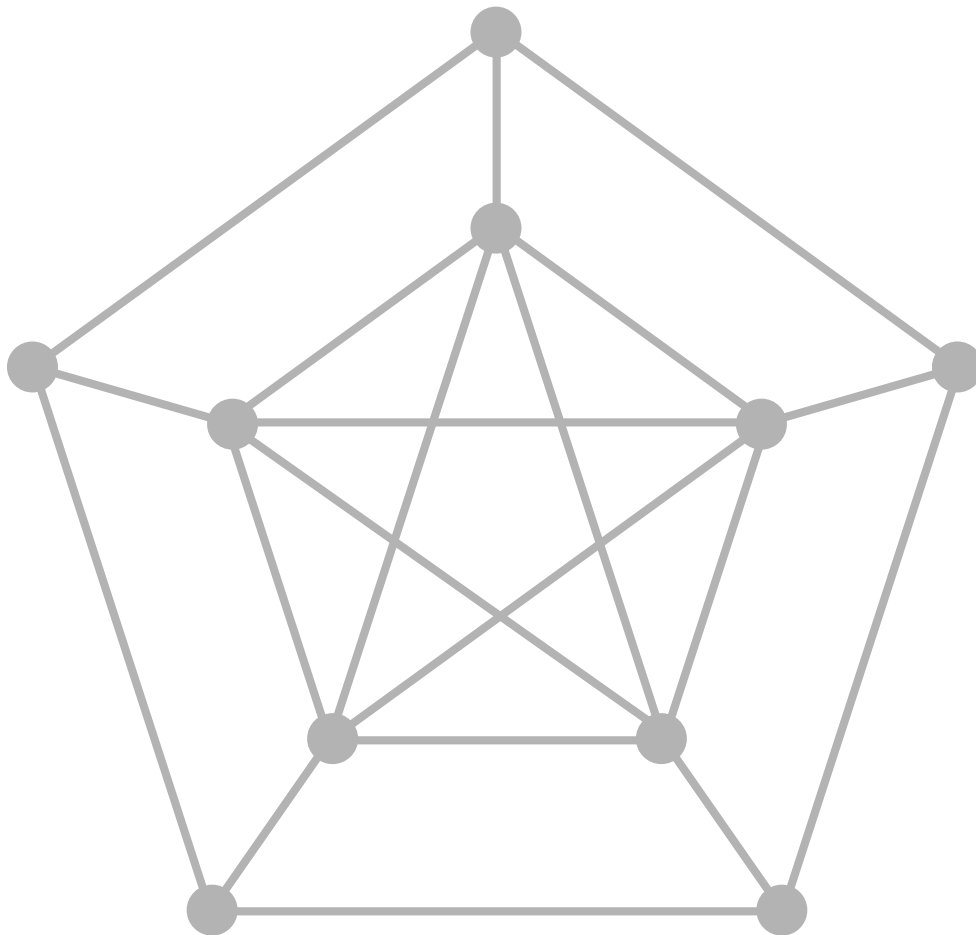
**2/2**

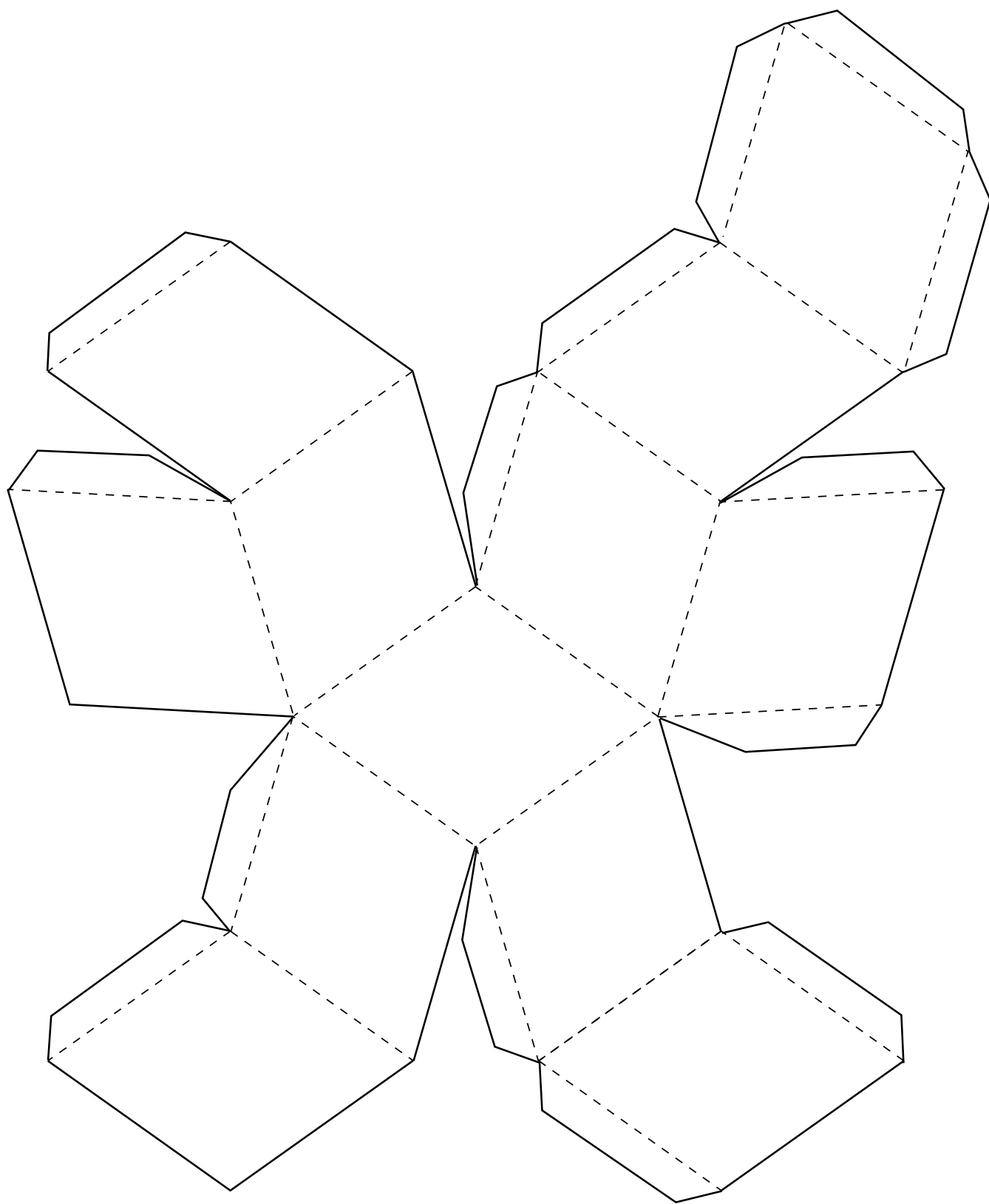


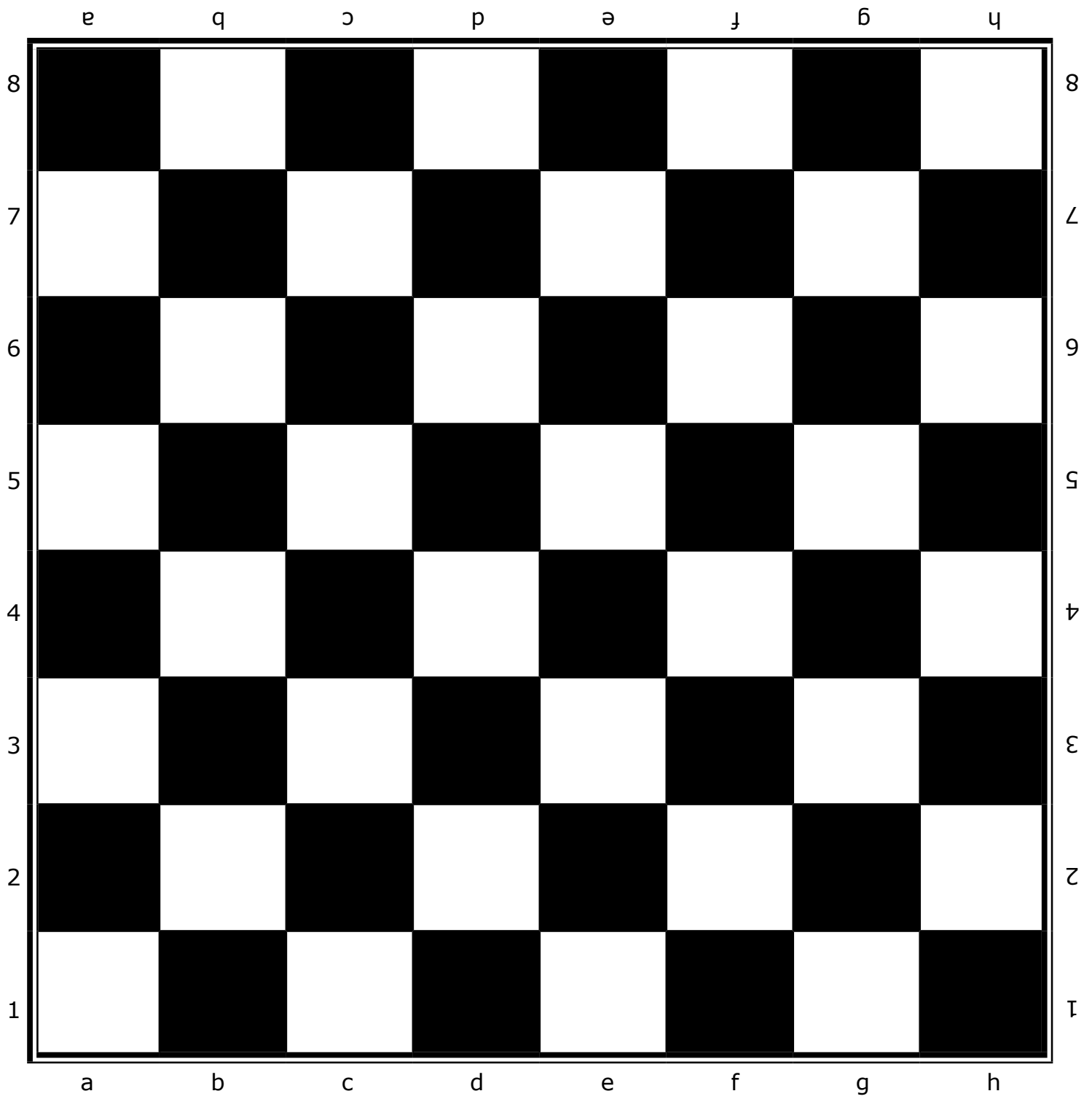
Atenas

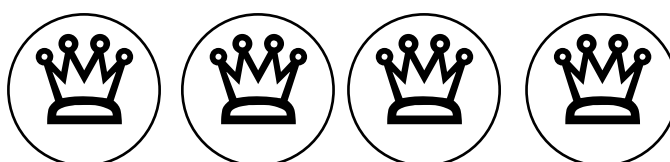
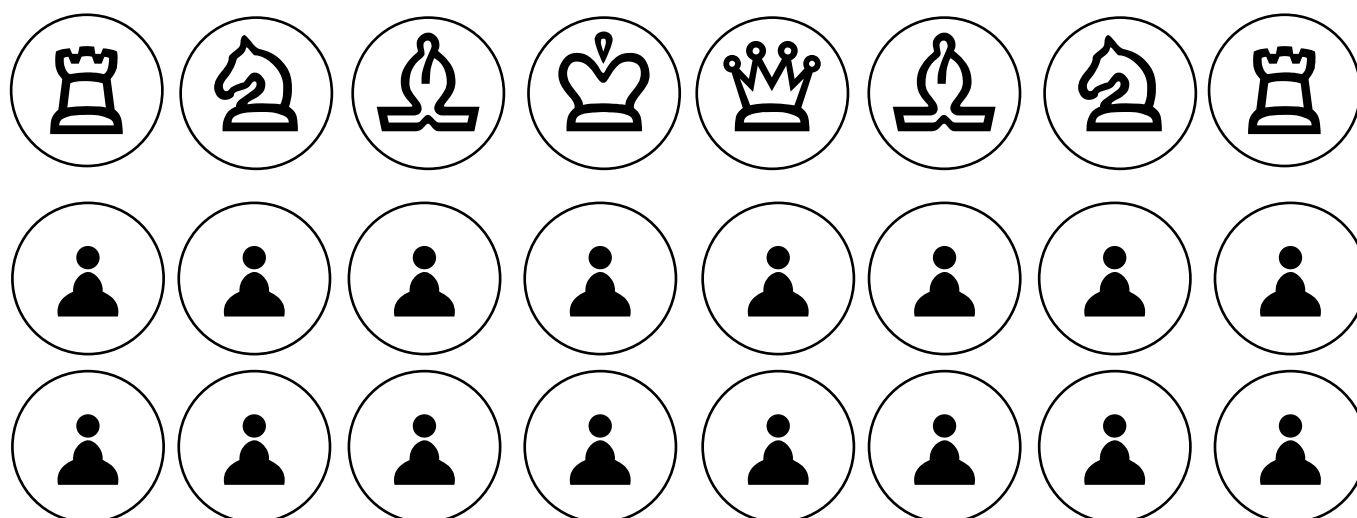
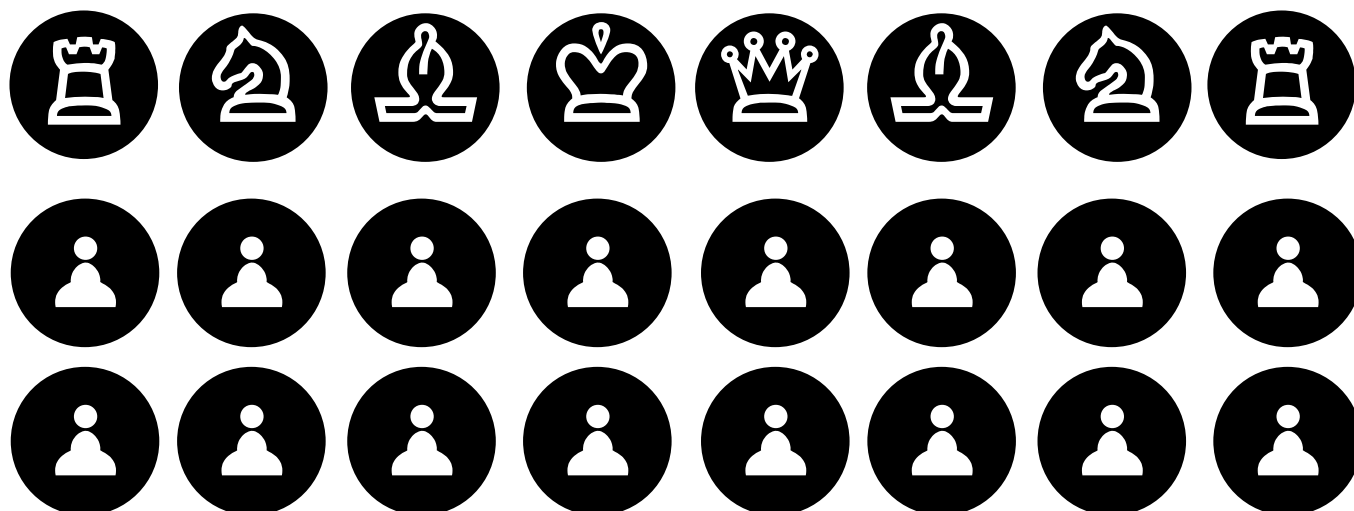
3	Berlín							
4	1	Bruselas						
5	4	3	Lisboa					
4	1	1	3	Londres				
4	3	2	1	2	Madrid			
4	1	2	5	2	4	Oslo		
3	2	1	2	1	2	2	París	
1	2	2	4	2	3	3	2	Roma
3	2	2	5	2	4	2	3	2 Varsovia

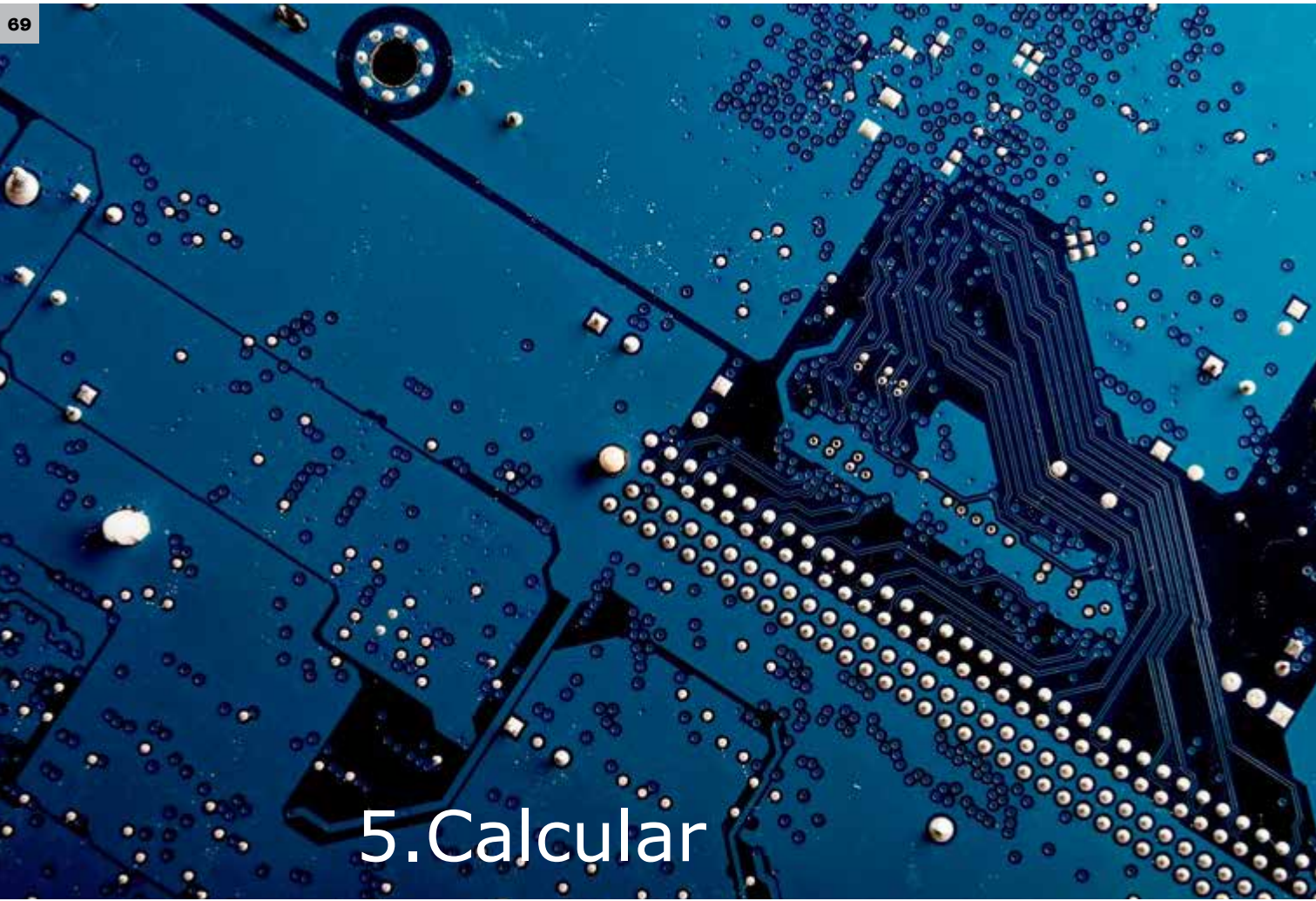












5. Calcular



Con la cabeza y las manos



Números primos



Imágenes digitales



Con la cabeza y las manos



Hágalo usted mismo

MATERIAL: ¡¡¡Los diez dedos de ambas manos!!!!

¡Cuenta con los dedos!

9X1... 9X2... 9X3... **9 X 4 =** 

Con las dos manos abiertas frente a sí mismo, se cuenta sobre los dedos hasta 4, empezando por la mano izquierda, y se baja el cuarto dedo.

- Se lee: **3** dedos levantados a izquierda para las decenas y **6** a derecha para las unidades, es decir **36**

Dos números entre 10 y 15 **6 X 8 =** 

Se cuenta hasta 6 con la mano izquierda como indica la animación. Queda levantado 1 dedo.

Se cuenta hasta 8 con la mano derecha. Quedan levantados 3 dedos.

- Resultado: **3+1** que hacen **4** decenas y **4x2** para los dedos que quedan bajados que hacen 8 unidades: **48**

Dos números entre 10 y 15 **13 X 14 =** 

Se cuenta hasta 13 con la mano izquierda como indica la animación. Quedan levantados 3 dedos.

Se cuenta hasta 14 con la mano derecha. Quedan levantados 4 dedos.

- Resultado: **3+4** que hacen **7** decenas y **3x4** para las unidades: es decir **100+70+12=182**

Dos números entre 15 y 20 **17 X 19 =** 

Se cuenta hasta 17 con la mano izquierda como indica la animación. Quedan levantados 2 dedos.

Se cuenta hasta 19 con la mano derecha. Quedan levantados 4 dedos.

Así: **2+4** que hacen **6 quincenas** y **2x4** para las unidades, es decir **90+8=98**

- Resultado: **15x15 + 98 = 225 + 98 = 323**

¿Qué retener?

Aprender a contar, es comenzar por estudiar sus tablas de suma y de multiplicación hasta 10. Pero basta con aprenderlas hasta el 5 y, después, saber contar con los dedos!

Así, para $(5+a) \times (5+b)$:

Para las decenas, cuando sumo los dedos levantados, calculo $10 \times (a+b)$.

Para las unidades, cuando multiplico los dedos bajados,

calculo $(5-a) \times (5-b) = 25 - 5(a+b) + ab$.

Compruebe que se tiene efectivamente $(5+a) \times (5+b)$.

Compruebe lo mismo para las otras multiplicaciones.

Para usar restas técnicas, basta con conocer los cuadrados de 10, 15... Pruebe esta técnica con los números entre 20 y 25...

Con la cabeza y las manos



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel y lápiz o pizarra, tiza y borrador

Cálculo mental Cálculo rápido

Sumas, restas

Proponga hacer – mentalmente – sumas y restas de números enteros de 2 cifras, de 3 cifras..., escribiendo los dos números y enunciándolos o escribiendo uno de ellos y enunciando el otro. Haga describir y analizar a los alumnos las diferentes técnicas de cálculo que han utilizado.

38+5
28+18
128+58
289+135...

27-18
66-19
151-28
197-19...

¿Quiénes somos?

- Nuestra suma es 25, nuestra diferencia 1.
- Somos tres números consecutivos y nuestra suma es 48.
- La suma de mis dos cifras es 12 y su producto 14.

El algoritmo de Kaprekar (matemático húngaro – 1949)

Tome un número entero, 5294 por ejemplo, y opere como sigue:

K(5294) = 9542 - 2459 = 7083
K(7083) = 8730 - 378 = 8352
K(8352) = 8532 - 2358 = 6174
Y K(6174) = !!!

Proponga estos cálculos con otros números y plantee conjeturar sobre los diferentes casos posibles.

Multiplicaciones, divisiones

- En primer lugar, haga aprender de memoria los cuadrados de 11, 12, 13, 15, 20, 25.
- Proponga realizar multiplicaciones y divisiones por 5, por 9, por 11, por 12, 13, 15, 19, 25, 50, 100.
- Calcule 46×96 y 64×69 . Extraño ¿verdad? Encuentre otros.
- Calcule 23×9 y 78×9 . Se dice que 23 y 78 están asociados. ¡Encuentre otros!

Asombrosas multiplicaciones !

¡Calcule, continúe y encuentre otros!

1 x 8 + 1 = ...	9 x 9 + 2 = ...
12 x 8 + 2 = ...	98 x 9 + 6 = ...
= ...?	= ...?
1 x 9 + 2 = ...	1 x 1 = ...
12 x 9 + 3 = ...	11 x 11 = ...
= ...?	= ...?

La conjetura de Siracusa

- Tome un número entero N y opere como sigue:
- Si N es par, divídalo por 2.
- Si es impar, multiplíquelo por 3 y añada 1.
- Recomience este cálculo sobre el resultado...

Por ejemplo: $20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \dots$

Proponga estos cálculos con otros números y plantee hacer hipótesis sobre los diferentes comportamientos posibles de estas sucesiones. (Se habla de altitud para el mayor número alcanzado en la sucesión, de duración de vuelo para la longitud de la sucesión antes de que vuelva a tomar el número de partida...) Este algoritmo, creado por **Collatz** y **Hasse** (matemáticos alemanes – 1932) ha dado lugar a una conjetura, llamada de Siracusa, aún no demostrada..

Con la cabeza y las manos



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papier et crayon

Cálculos y algoritmos

Dividir para multiplicar $57 \times 86 = ?$

La multiplicación al Ruso

57	86
28	172
14	344
7	688
3	1376
1	2752
	4902

La multiplicación per gelosia

x	8	6	
7	6	2	2
	5	4	
5	0	0	0
	4	3	
=	4	9	

O aún, cerca de la técnica clásica:

57
<u>x 86</u>
3042
+ 4056
<u>= 4902</u>

Para saber más

Con los ordenadores, para no tener que plantear líneas de productos para sumar y evitar problemas de llevadas... (¡a retener!) se utilizan otras técnicas de cálculos rápidos. Es el dominio de la algorítmica. El algoritmo del ruso **Anatolii Karatsuba** (1962) es de este tipo:

Calculemos 1234×5678 .

Se corta cada número en paquetes de 2 cifras para obtener:

$$\begin{aligned}
 1234 \times 5678 &= (12 \times 10^2 + 34) \times (56 \times 10^2 + 78) \\
 &= 12 \times 56 \times 10^4 + [(12 + 34) \times (56 + 78) - 12 \times 56 - 34 \times 78] \times 10^2 + 34 \times 78 \\
 &= 672 \times 10^4 + [46 \times 134 - 672 - 2652] \times 10^2 + 2652 \\
 &= 672 \times 10^4 + [6164 - 672 - 2652] \times 10^2 + 2652 \\
 &= 6720000 + 284000 + 2652 \\
 &= 7006652
 \end{aligned}$$

Ha bastado con hacer 3 multiplicaciones de números 2 veces más pequeños y algunas sumas de más pero muy sencillas. En la base de este algoritmo, encontramos las siguientes relaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
 (ax + b)^2 &= a^2x^2 + [(a+b)^2 - a^2 - b^2]x + b^2 \\
 (ax + b)(cx + d) &= acx^2 + [(a+b)(c+d) - ac - bd]x + bd \\
 y : 4ab &= (a+b)^2 - (a-b)^2
 \end{aligned}$$

Con la cabeza y las manos



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel y lápiz

Cálculo rápido y proporcionalidad

Como calcular rápidamente :

- En **6** h un aparato de climatización consume **7** Kw. ¿Cuántos consume en **18** h?
 En **9** h un aparato de climatización consume **18** Kw. ¿Cuántos consume en **108** h?
 En **32** h un aparato de climatización consume **27** Kw. ¿Cuántos consume en **8** h?
 En **21** h un aparato de climatización consume **17** Kw. ¿Cuántos consume en **90** h?

La doble proporcionalidad.

Complete tablas del tipo:

Consumo de patatas en una escuela (en kg) 

	NÚMERO DE DÍAS			
	1	20	40	100
NÚMERO DE ALUMNOS	1	0,1	2	
	5	0,5		20
	10	1		40
			30	150
	20	2		80

Cálculo del área de un rectángulo (en cm²) 

	1	4	5	6	10	12
	1	1				12
LONGITUD	1	1				12
	2	2		10		20
	3					
			16			
	5	5		30		

Cálculo del área de un triángulo (en cm²) 

	1	3	5	8	15
	1	0,5	1,5	2,5	4
BASE	1	0,5	1,5	2,5	4
	2,5		3,75		
	3				
	5		7,5	12,5	37,5

Hágalo usted mismo

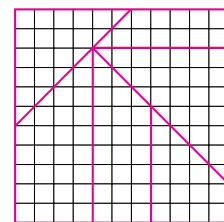
MATERIAL: 6 piezas del puzzle, 2 por cada grupo de alumnos, papel cuadriculado, regla, lápiz, tijeras

78 79

Cálculos y geometría

Puzzles a aumetar

Con estas 6 piezas reconstruya un cuadrado. Después fabrique el mismo puzzle en mayor tamaño respetando la siguiente regla: los trapecios cuya altura es de 4 cm deben aumentarse de tamaño para llegar a una altura de 7 cm. Cuando haya terminado, debe poder reconstruir un gran cuadrado con las 6 piezas aumentadas.



Para ir más lejos

Thales y la proporcionalidad

Fotos de las vacaciones:

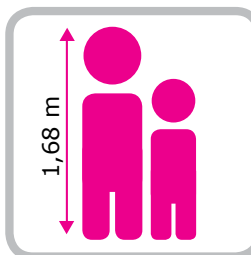
Papá y mis dos hermanos



Mi hermano pequeño y yo



Mi madre y mi hermana



Mi padre y mi hermana



¿Cuál es mi talla?

Con la cabeza y las manos



¿Qué retener?

La proporcionalidad es un eje esencial en el aprendizaje de las matemáticas y otras ciencias. Es también una herramienta muy presente en la vida cotidiana. Permite introducir la multiplicación y la división en la escuela. Es sobre todo esencial para comprender las relaciones entre magnitudes dotadas de una unidad de medida, en física y en otras ciencias.

Las propiedades utilizadas son:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$$

$$f(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y)$$

Dos funciones matemáticas entran en acción en estos cálculos:

La función "escalar":

$$\begin{array}{cc} 6 \text{ (h)} & 7 \text{ (Kw)} \\ 18 \text{ (h)} & ?? \text{ (Kw)} \end{array}$$

La función "de dimensiones":

$$\begin{array}{cc} 9 \text{ (h)} & 18 \text{ (Kw)} \\ 108 \text{ (h)} & ?? \text{ (Kw)} \end{array}$$

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel, lápiz

Cálculos aproximados

Orden de magnitud

Proponga estimar el orden de magnitud de cálculos verificados después con o sin calculadora. Así, el resultado de cada uno de estos cálculos ¿está comprendido entre 0 y 1, entre 0 y 0,1, entre 0 y 0,01, entre 1 y 2, entre 1 y 10?

$$\begin{aligned} & \text{¿¿¿} 125 \div 28 = 0,4464 \text{ ó } 4,4643 \text{ ó } 44,6428 \text{ ó } ??? \\ & \text{¿¿¿} 28 \div 1275 = 0,0022 \text{ ó } 0,0220 \text{ ó } 0,2196 \text{ ó } ??? \\ & \text{¿¿¿} 357 \div 176 = 0,203 \text{ ó } 2,028 \text{ ó } 20,284 \text{ ó } ??? \\ & \text{¿¿¿} 41,84 \times 2,25 = 9,414 \text{ ó } 94,14 \text{ ó } 941,9 \text{ ó } ??? \\ & \text{¿¿¿} 1/(1+\sqrt{2}) = 0,414 \text{ ó } 2,142 \text{ ó } 4,142 \text{ ó } 21,421 \text{ ou } ??? \end{aligned}$$

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel, lápiz, calculadora ó ordenador

¡Nuestro ordenador nos engaña!

Elija un número comprendido entre 0 y 1. Multiplíquelo por 2.

- Si el resultado es inferior a 1, multiplíquelo de nuevo por 2.
- si no, reste 1 y multiplique el resultado por 2.

Y recomience 60 veces. Repita los mismos cálculos con un número muy próximo. ¿Qué observa?

- Elija de nuevo un número más cercano y recomience los cálculos.
- Intente también con números como $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-1$ ó $\pi-3$ y con números decimales muy próximos.

Para contar, usamos números enteros y decimales. En el mercado, más vale saber hacer un rápido cálculo mental o aproximado incluso si se dispone de una calculadora...

El ordenador no utiliza más que números decimales con sólo algunas decenas de decimales. Les leyes matemáticas ya no son respetadas y conducen a menudo a errores.

Ejemplo:

0,3	0,305
0,6	0,61
0,2	0,22
0,4	0,44
0,8	0,88
0,6	0,76
0,2	0,52
0,4	0,04
0,8	0,08
...	...

Aplicaciones de las matemáticas

Algunas técnicas de cálculo pueden utilizarse en la vida cotidiana. Otras son demandadas por matemáticos e informáticos para permitir a los ordenadores calcular cada vez más deprisa y mejor o para verificar deprisa la exactitud de las tarjetas bancarias.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Cálculo - Cálculo rápido - Cálculo mental - Cálculo aproximado - Orden de magnitud - Algoritmos de cálculo

Números primos



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 3 casillas de números enteros sobre 6, 20, después 30 columnas, papel, lápiz

80

81

37	26	15	4	3	2	31
25	17	6	5	14	13	2
14	3	5	3	2	29	18
4	19	8	7	16	11	24
41	20	9	4	15	10	27
30	1	7	23	12	5	26
43	4	13	46	47	48	49

¡Siguiendo la pista a los números primos!

Es primo todo número entero distinto de 1 que no es divisible más que por 1 y por sí mismo.

Para cada cuadro:

- tache el 1 y ponga en negrita el primer número no tachado, en este caso el 2
- tache todos los múltiplos de 2 (posteriores a 2)
- ponga en negrita el siguiente número no tachado, el 3 que es primo
- y recomience hasta no tener ya más números que tachar.

Observe, siguiendo el cuadro utilizado, las propiedades de esta técnica.

¿A partir de que número entero ha parado usted? ¿Qué puede usted concluir?

Esta técnica – llamada **criba de Eratóstenes** – permite obtener todos los números primos de la lista.

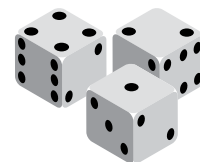
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 3 dados

Juegue al 421

Tire los 3 dados.

Escriba las 3 cifras en la pizarra. Gana el que, con estas tres cifras, construye el mayor número primo. Cada alumno puede decir porque tal o tal número propuesto no es primo.



¿Qué retener?

Criterios de divisibilidad por...

- un número entero es divisible por 2 si su última cifra es un múltiplo de 2,
- divisible por 4 si... por 8 si ...
- divisible por 3 si... (lo mismo por 9). ¿Por qué?
- divisible por 5 si...
- divisible por 11 si ...
- ¿Y por 7? ¿y por 13?

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Una lista de números primos

La gran familia de los números primos

En la familia de los números primos:

- encuentre gemelos (es decir, números impares consecutivos) como 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13... ¿y las ternas? Conjetura no demostrada: ¡existe una infinidad de primos gemelos!
- encuentre los primos que difieren en 4. ¡Habría tantos como de números gemelos!
- ¡Encuentre los primos que difieren en 6!
- Compruebe si el producto de los primeros números primos +1 es primo. Esto permite probar que hay un número infinito de números primos. Pero cuanto mayores son, son más escasos.
- Compruebe que todo número par (inferior a 100 por ejemplo) puede escribirse como suma de 2 números primos (¡es la **conjetura de Goldbach** que hará ganar una gran suma de dinero a quien la demuestre!).

Números primos



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel, lápiz

La gran familia de los números enteros

- Escriba 10101, 1001, 101, 11, como productos de números primos.
- Haga lo mismo con 304, 305, 403, 404, 504, 604... Todo número entero se descompone de manera única en producto de números primos.
- Fuera de la familia de los enteros primos, encuentre los números perfectos (es decir, iguales a la suma de sus divisores como $6 = 3 + 2 + 1$). Observe que $1/6 + 1/3 + 1/2 = 1$ y que sucede lo mismo para los demás números perfectos encontrados.
- Encuentre números enteros producto de dos primos diferentes. ¡Gana el que encuentre el mayor!

Los códigos secretos utilizados hoy en día están basados en números que son el producto de dos números primos muy grandes. Encontrarlos sobrepasa el tiempo de cálculo de los ordenadores más potentes.

- Encontrar el MCD y el mcm (máximo común divisor y mínimo común múltiplo) de 28 y 70, de 330 y 900, de 276 y 483,...
- Compruebe sobre estos ejemplos que $\text{MCD}(a,b) \times \text{mcm}(a,b) = ab$.

Aplicaciones de las matemáticas

Los trabajos de investigación sobre números primos y sus relaciones con la informática son abundantes y numerosas cuestiones quedan aún por resolver.

La seguridad de las redes informáticas y de comunicación está estrechamente relacionada con los números primos (criptografía, códigos correctores de errores, algorítmica, etc.).

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Números primos - Criterios de divisibilidad - Eratóstenes - Euclides Criptografía Códigos secretos con clave públicae

Imágenes digitales



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel, lápiz

¡ 1 + 1 = 10 !!!

En base 2, los números enteros se escriben usando sólo el 0 y el 1:

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110...

Calcule en base 2, colocando la adición : 101 + 11, 101 + 101, 111 + 111...

Después 101 x 11, 101 x 101, 111 x 111

$$\begin{array}{r} \text{||} \\ + \text{||} \\ \hline \text{||0} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{||} \\ \times \text{||} \\ \hline \text{||} \\ \hline \text{||01} \end{array}$$

¿Qué retener?

Después de haber contado con piedras, los hombres han inventado el sistema de numeración en base 10. Así, decir que hay 549 ovejas significa que hay de hecho $5 \times 10^2 + 4 \times 10 + 9$. Este sistema utiliza diez símbolos, las cifras y tiene en cuenta la posición de cada una de ellas (de derecha a izquierda). Gracias a la lógica matemática, el sistema de numeración en base 2 permite hoy en día representar situaciones donde no hay más que dos estados: verdadero o falso, si o no, la corriente pasa o no pasa, el imán es imantado o no, la luz se refleja mucho o poco. Lo digital que invade nuestra vida cotidiana consigue reproducir la realidad con una calidad cada vez mayor. Compensa el aspecto elemental del sistema binario a través de la cantidad tan elevada de información que puede tratar rápidamente.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: 3 imágenes digitales

¿72 dpi o 300 dpi?

Estas 3 imágenes tienen las mismas dimensiones:

7 x 4,35 cm.

- ¿De cuántos cuadrados unidad (se llaman píxeles) constan (anchura x altura)? Es la talla de la imagen en píxeles.
- La imagen 1 tiene una resolución de 75 dpi (dot per inch o punto por pulgada), la 2: 150 dpi y la 3: 300 dpi.
- ¿Cómo varía el número de cuadrados en función de la resolución?



imagen 1



imagen 2



imagen 3

El peso de las fotos

¿Cómo varía el peso de las imágenes? Complete el cuadro contigo:

Una misma imagen, digitalizada en 75 dpi, está aquí presentada en 75, 150 y 300 dpi.

La primera resolución, suficiente para la representación en una pantalla, produce una imagen impresa pixelada.

La segunda es suficiente para tabletas y teléfonos inteligentes.

La tercera, 4 veces más fina, permite obtener una impresión clara y suavizada de fotografías.



Talla de la imagen		Resolución en dpi	Peso en K octetos
pulgadas	cm		
3,74x2,39	8,74x5,39	75	125 Ko
		100	?
		150	?
		300	?
1,90x1,18	4,45x2,75	75	?
		100	?
		150	125 Ko
		300	?
0,94x0,59	2,20x1,39	75	?
		100	?
		150	?
		300	125 Ko

¿Qué retener?

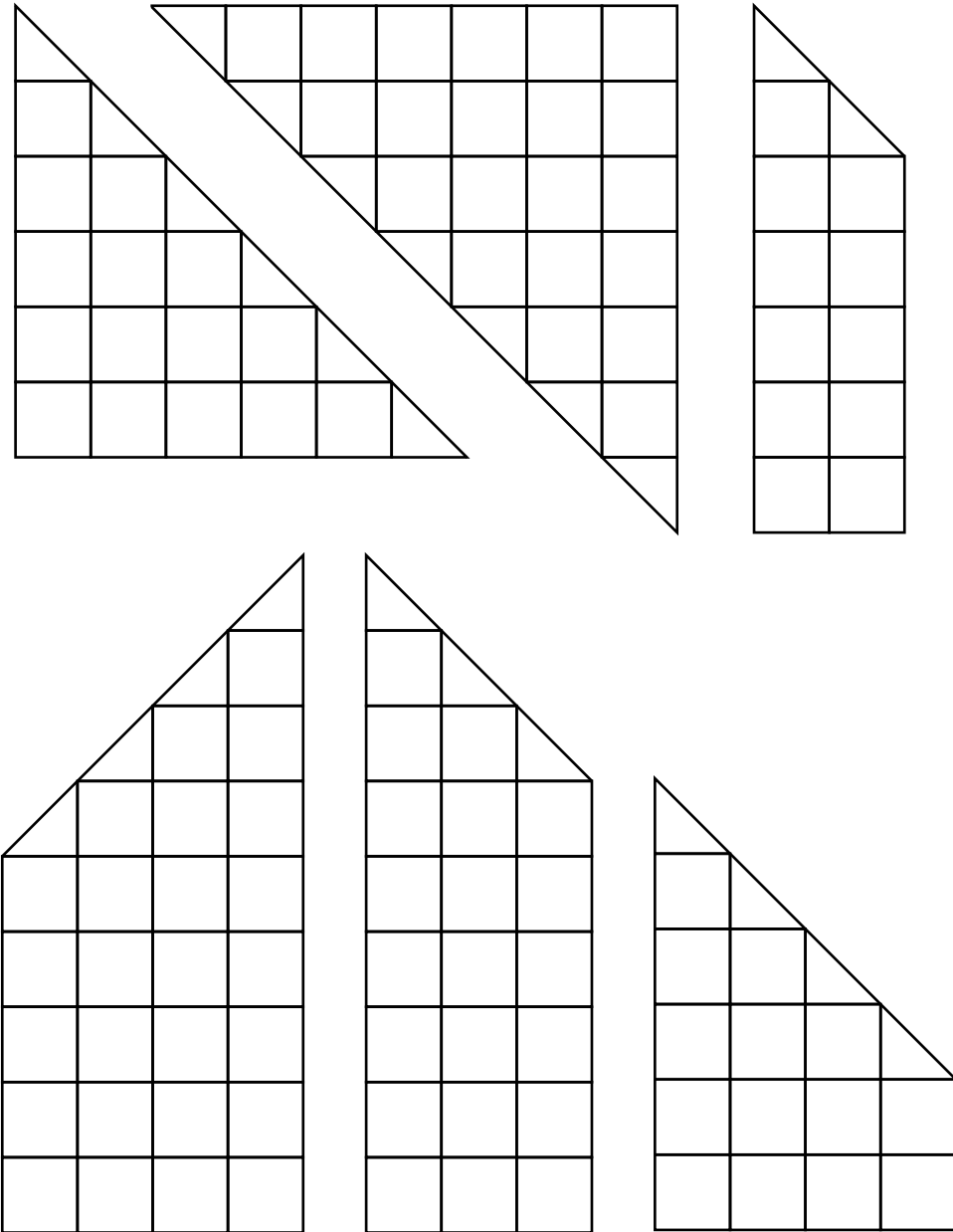
Una imagen digital está formada por cuadrados unidad, los píxeles y cada cuadrado es una mezcla de 3 ó 4 colores: rojo, verde, azul (RGB) para las pantallas y cian, magenta, amarillo, negro (CMYB) para las imprentas. Para una misma superficie, cuantos más píxeles hay, mayor es la definición.

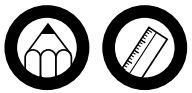
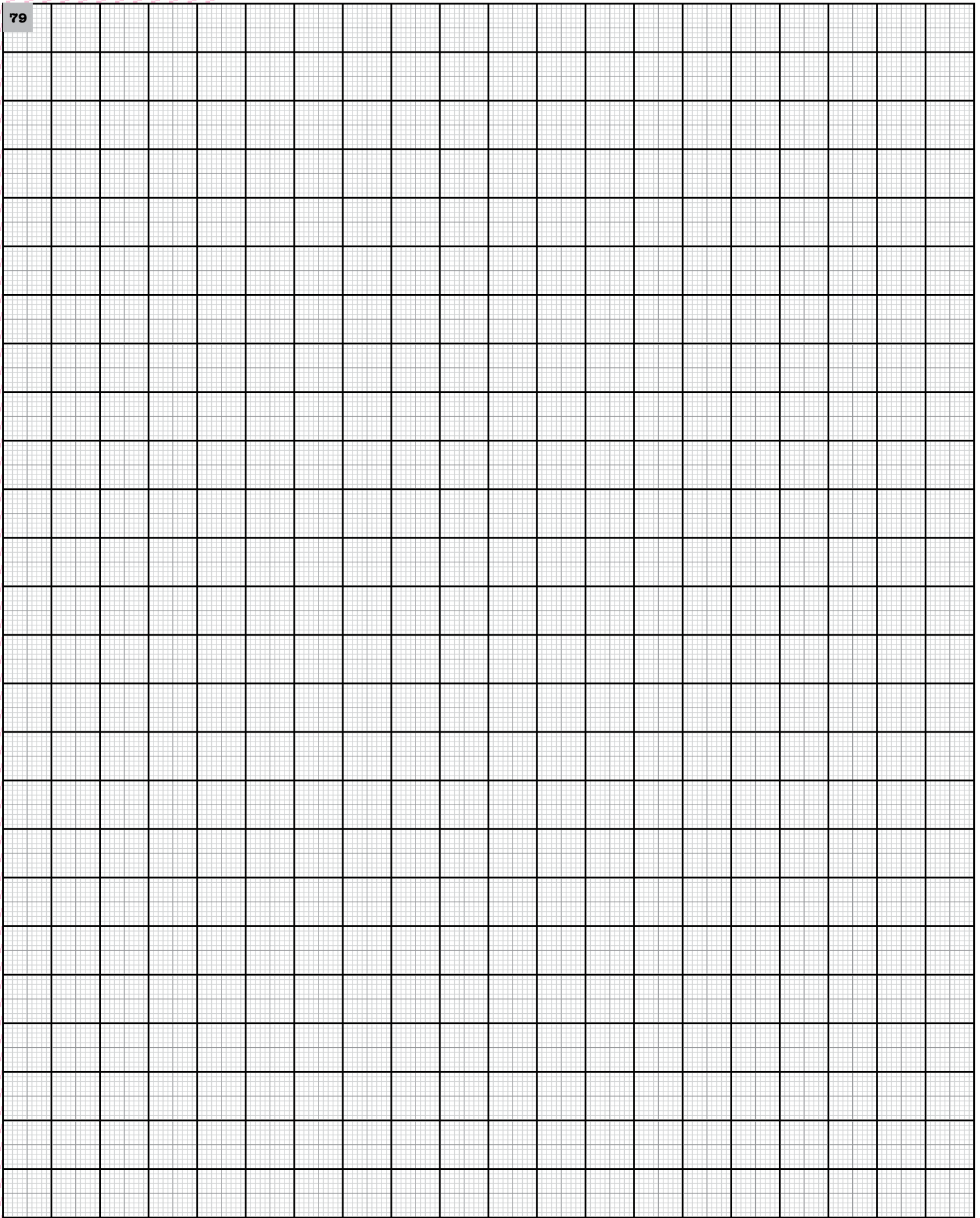
Aplicaciones de las matemáticas

Fotografía, CD, DVD, Internet, telefonía móvil, TV de alta definición... todos utilizan imágenes digitales. Para almacenar, transmitir, analizar, tratar, comprimir, corregir, modificar las imágenes, las matemáticas se han hecho indispensables.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Píxel - Compresión de imágenes - Impresión digital





1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126
127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138
139	140	141	142	143	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200





1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600

6.Construir



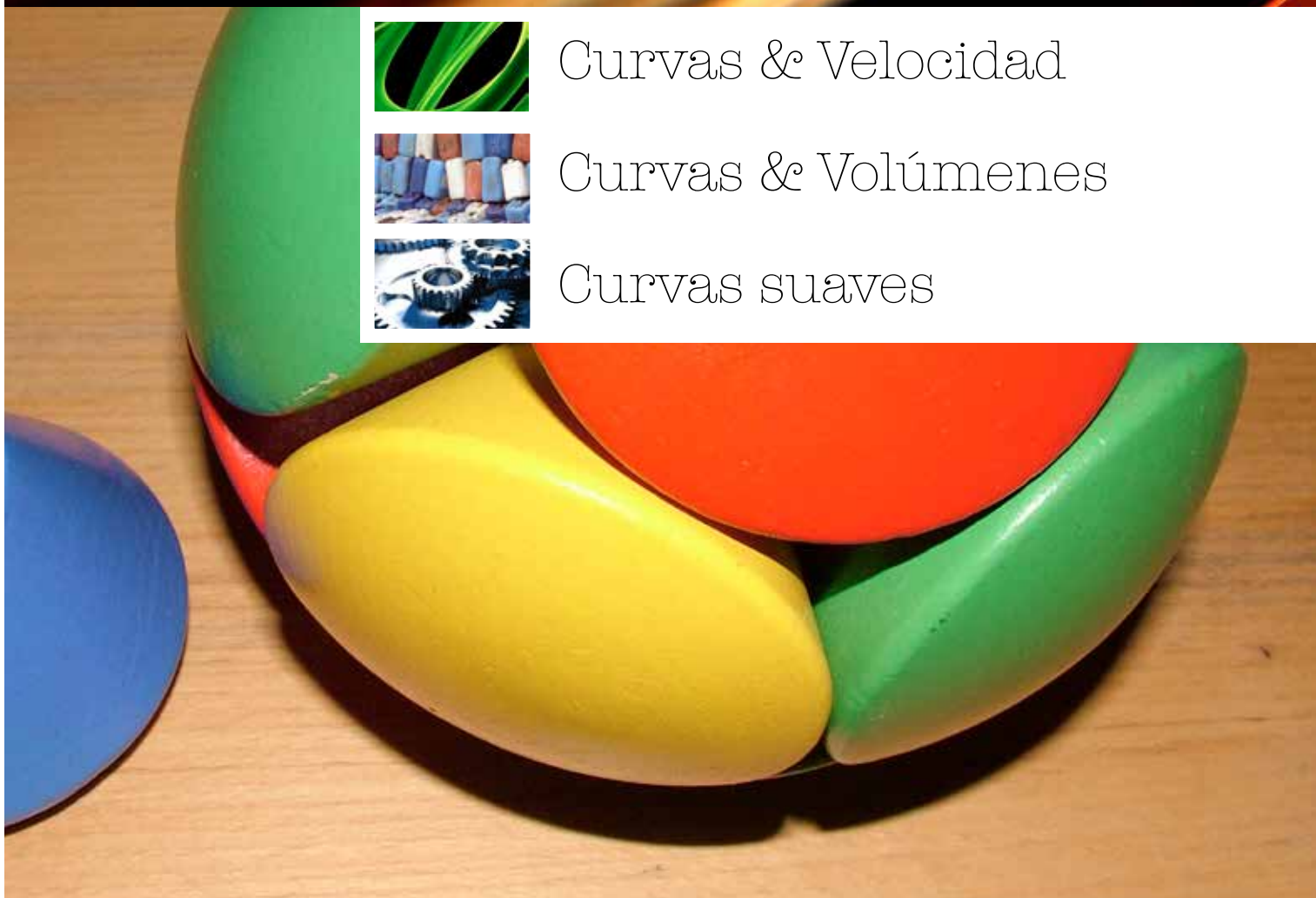
Curvas & Velocidad



Curvas & Volúmenes



Curvas suaves





Hágalo usted mismo

MATERIAL: Dibujos de 5 circuitos de carrera, 1 gráfico de velocidad

88

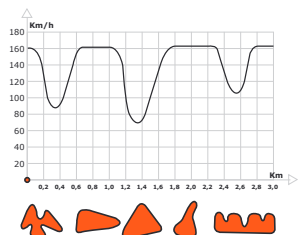
¿Qué retener?

Velocidad y aceleración

La **velocidad** es una medida física que permite conocer y describir la evolución de una cantidad (casi siempre una distancia) en función del tiempo. Se expresa en metros por segundo, en kilómetros por hora, en nudos en marina y en mach en aviación.

La **aceleración** es la variación de la velocidad de un objeto en función del tiempo.

Se dice que la función "velocidad/tiempo" es la derivada de la función "distancia/tiempo". De la misma manera, la función "aceleración" es la **derivada** de la función "velocidad". Describe la evolución de la tangente a la curva velocidad/tiempo en cada punto.



¿En qué circuito estamos?

Este gráfico es el de la velocidad de un coche de carreras a pleno rendimiento durante la tercera vuelta del circuito.

Preguntas:

- ¿En qué circuito puede estar?
- ¿En qué sentido da vueltas?
- ¿Dónde se encuentra la línea de partida?

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel cuadriculado, un lápiz

89

¿Sabe usted leer un gráfico?

- Cada uno imagina un circuito automovilístico y lo dibuja, construye el gráfico de las velocidades para una vuelta del circuito y lo pasa a su vecino que ha hecho lo mismo.

Pregunta: a partir del gráfico realizado por su vecino, encuentre el circuito en el que ha pensado. Gana el que lo encuentra el primero.

- Traduzca en forma de gráfico la siguiente historia: Un caminante sube una cota de 4 km a 2 km/h, se para durante una hora y baja por el mismo camino a 4 km/h.
- Dos ciclistas participan en una carrera de ida y vuelta. El primero recorre la ida a 60 km/h y la vuelta a 40 km/h. El segundo realiza la ida y la vuelta a 50 km/h. ¿Quién llega el primero?

Para ir más lejos...

¡Ruede más rápidamente!

- Un automóvil rueda a 100 km/h de media en vez de a 90 km/h.
- ¿Qué tiempo gana en un recorrido de 90 km?
- Un ciclomotor rueda a una velocidad de 50 km/h en vez de a 45 km/h.
- ¿Qué tiempo gana en 45 km? ¿Y en 90 km?

¡Frene a tiempo!

Entre el momento en el que el conductor percibe un obstáculo y el que comienza a frenar transcurre un **tiempo de reacción** estimado entre 1 y 2 segundos.

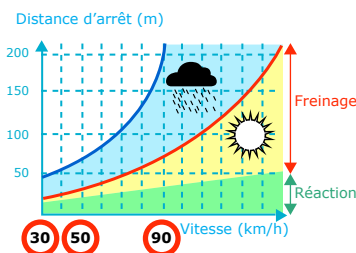
La **distancia de frenado**, que depende de la velocidad y del estado del vehículo, se estima en tiempo segundo $0,08v^2$, donde v es la velocidad del vehículo expresada en m/s.

- Calcule la distancia que recorre un automóvil antes de pararse cuando rueda a 90 y a 100 km/h.
- Calcule también la distancia recorrida por el ciclomotor a 45 y 50 km/h.

¡Y por tiempo de lluvia!

La distancia de frenado depende también del estado de la carretera. Sobre la carretera mojada, la distancia de frenado aumenta en un 40%.

- Volver a calcular las distancias de parada anteriores.
- Realizar una tabla y una gráfica con las distancias de parada en función de la velocidad y del estado de la carretera.



Aplicaciones de las matemáticas

El cálculo variacional (o cálculo diferencial) se ha desarrollado durante los siglos XVII y XVIII. Permite describir la evolución de la pendiente de la tangente a una curva continua:

- si la función (o la curva) es creciente, las tangentes a la curva en cada punto tienen un coeficiente director positivo.
- Si la curva es decreciente, el coeficiente director de las tangentes es negativo.

Esta propiedad es utilizada por todos los que estudian fenómenos evolutivos, desde matemáticos hasta físicos, desde ingenieros a biólogos, desde demógrafos a economistas...

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Función - Gráfico - Derivada - Tangente - Velocidad - Aceleración

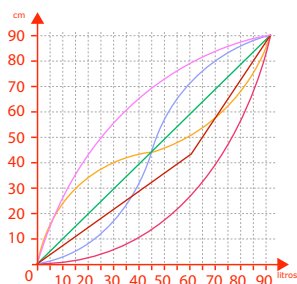


Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 dibujo de 6 recipientes, 1 dibujo con los 6 gráficos

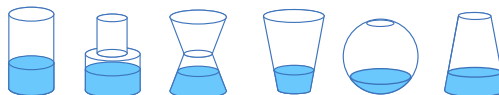
90

91



El volumen de un tonel

- Estos seis recipientes tienen la misma altura (90 cm) y el mismo volumen (90 l). El gráfico indica el nivel de llenado de los recipientes en función del tiempo.
- ¿Cuál es la curva de llenado de cada recipiente?
- ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de cada recipiente?



Hágalo usted mismo

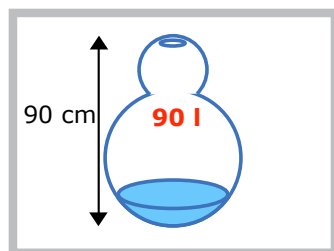
MATERIAL: Papel cuadriculado, un lápiz

89

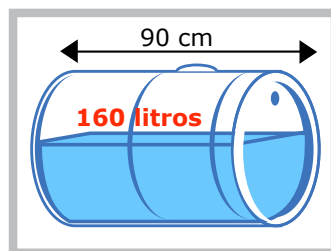
¿Sabe usted leer un gráfico?

- Cada uno imagina un recipiente (de 90 cm de altura y de 90 l) y lo dibuja.
- Construye el gráfico de llenado
- Lo pasa a su vecino, que ha hecho lo mismo.

Pregunta: A partir del gráfico proporcionado por su vecino, encuentre el recipiente en el que ha pensado. Gana el que lo encuentra en primer lugar.



- ¿Cuál es la curva de llenado de cada recipiente?



- ¿Cuál es la curva de llenado de este recipiente?

Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 dibujo de los 6 recipientes, 1 dibujo de 6 indicadores de nivel graduados

92

A cada uno su capacidad

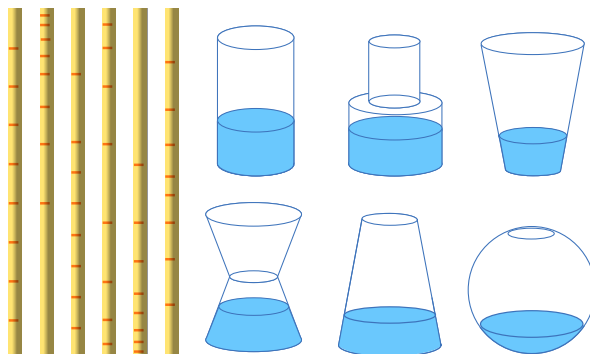
- Cada varilla indica la capacidad, graduada de 10 en 10 litros, de uno de estos seis recipientes. Asocie cada indicador de nivel con su recipiente.

- Gradúe de 10 en 10 litros el nivel de capacidad de un barril de 160 litros tumbado, dependiendo de que el agujero de llenado se encuentre en lo alto de una tapa o en lo alto del tonel.

Vacíe los depósitos

- Vuelva a coger los 6 recipientes y sus gráficos de llenado.

- Dibuje ahora el gráfico vaciado de cada uno (suponiendo que el caudal es constante y que el tapón de vaciado está debajo).





¿Qué retener?

Para determinar la curva de llenado de un recipiente en cada instante, hay que estimar (o calcular) la evolución del área de la sección del recipiente en función de la altura h . Esto equivale a utilizar directamente o aproximadamente cálculos de volumen en función de la altura. Este es el ámbito del cálculo integral puesto en marcha por **Newton** (1642-1727) y **Leibniz** (1646-1716). Pero muchas de las fórmulas de volúmenes (y de áreas) se conocen desde **Arquímedes** (287-212 A.C.).

Algunas fórmulas

Volumen de los recipientes en función de la altura
(altura en dm, volumen en dm³ o litros)

- Cilindro: $V(h) = \text{Base} \times h = \pi R^2 \times h$
- Pirámide sobre la base: $V(h) = B \times h/3$
- Cono sobre el vértice: $V(h) = V(H) \times (h/H)^3$
- Esfera: $V(h) = \pi h^2 (R - h/3)$

Aplicaciones de las matemáticas

La noción de relación entre dos (o varias variables) se expresa en matemática por medio de **funciones**. Sus **representaciones gráficas** forman parte hoy en día de la vida cotidiana (curva de temperatura, cotización de la bolsa...) y son herramientas utilizadas en numerosos dominios técnicos.

El cálculo integral, que permite calcular las áreas y los volúmenes, se ha desarrollado al mismo tiempo que el **cálculo diferencial** en el siglo XVII.

Los problemas de medida de volumen y de capacidad se utilizan desde siempre por comerciantes e ingenieros.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Función - Gráfico - Cálculo integral - Volúmenes - Arquímedes - Barril



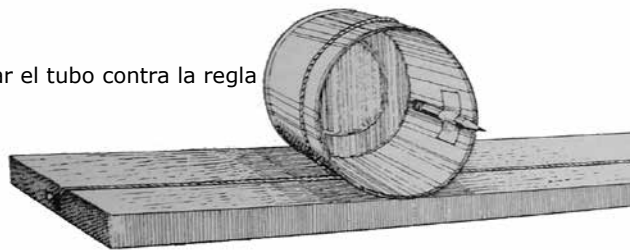
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 lápiz, 1 hoja, 1 regla, 1 tubo

Ruletas y cicloide

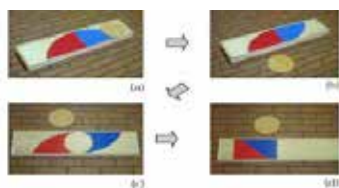
- Fije el lápiz en el interior del tubo
- Trace la curva obtenida haciendo girar el tubo contra la regla sin deslizar.

Esta curva se llama **cicloide**. Es la curva descrita por un punto sobre una rueda de bicicleta que rueda.



¿Qué retener?

El nombre "**cicloide**" fue propuesto por **Galileo** (1667-1748). Esta curva posee propiedades originales. Dos canicas que parten de cada lado a alturas diferentes se cruzan en la base del tobogán. El área bajo una rama de la cicloide es igual a 3 veces el área del disco que la describe.



¿El mejor tobogán?

¿Es el que permite a una canica llegar lo más rápido a la base del tobogán? Este problema fue propuesto en forma de desafío por **Jean Bernoulli** en 1696, mucho antes del nacimiento del cálculo. La respuesta fue encontrada por él mismo, pero también por su hermano Jacques, por G. de l'Hospital, Leibniz y Newton. Este tipo de problema está en el origen del **cálculo variacional**. Es una cicloide, aquí llamada curva braquistócrona.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 lápiz, 1 hoja discos en cartón rígido o en PVC..., 1 disco hueco

93

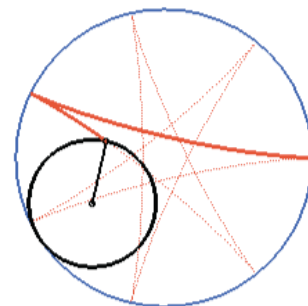
94

Curvas en bucle

- Fije el lápiz en el borde de un disco
- Trace curvas haciendo girar este disco en el interior o el exterior de otro disco.

Estas curvas se llaman **hipocicloides** o **epicicloides**.

- Intente construir una tal curva exterior con 1, 2, 3, ... ramas.
- Intente construir una tal curva interior con 2, 3 ó 4 ramas.



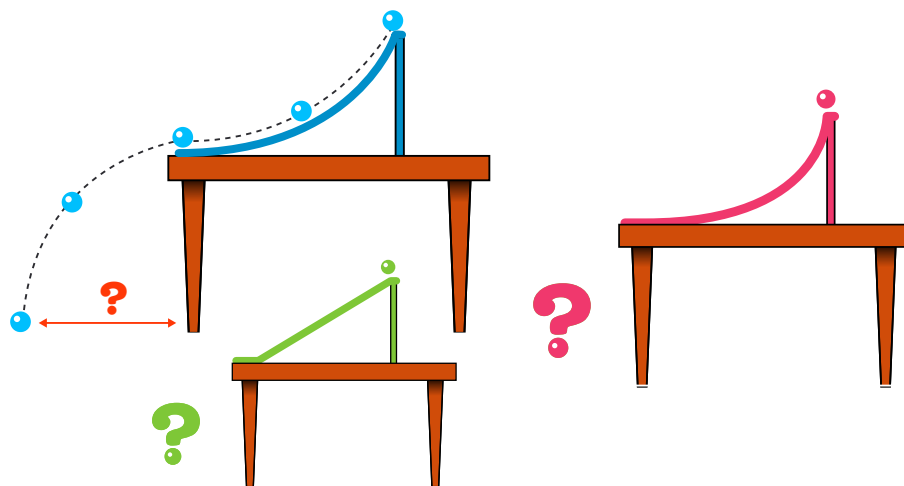
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 3 toboganes de madera o PVC, en forma de U o... 3 canicas idénticas preferentemente en acero

¿El camino más corto?

Coloque los toboganes en el borde de una mesa. Haga salir las 3 canicas al mismo tiempo.

- ¿cuál llegará antes a la base de los toboganes?
- ¿llegadas al suelo, ¿cuál es la que va a caer más lejos?



Moraleja de la historia: "¡La línea recta no es siempre el camino más corto!"



Para ir más lejos...

Problemas « shock »

Un problema “shock” es un problema cuya respuesta va en contra del razonamiento lógico natural. Veamos tres ejemplos:



2 monedas idénticas. Una de ellas realiza una vuelta completa alrededor de la otra que está fija.

- ¿Cuánta(s) vuelta(s) ha dado sobre sí misma?
- ¿Por qué?



Una botella esta recostada sobre una mesa y realiza una vuelta sobre sí misma, con el cuello apoyado sobre un trozo de madera.

- ¿Cuál es la distancia recorrida por un punto de la botella?
- ¿Por qué?



Se coloca una plancha sobre dos cilindros idénticos.

- ¿Cuál es la distancia recorrida por la plancha cuando los cilindros dan una vuelta?

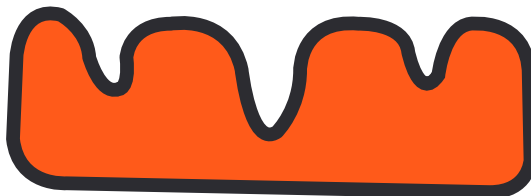
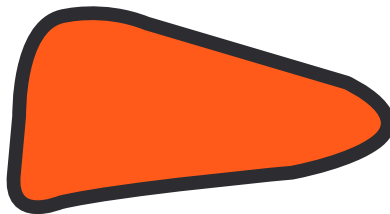
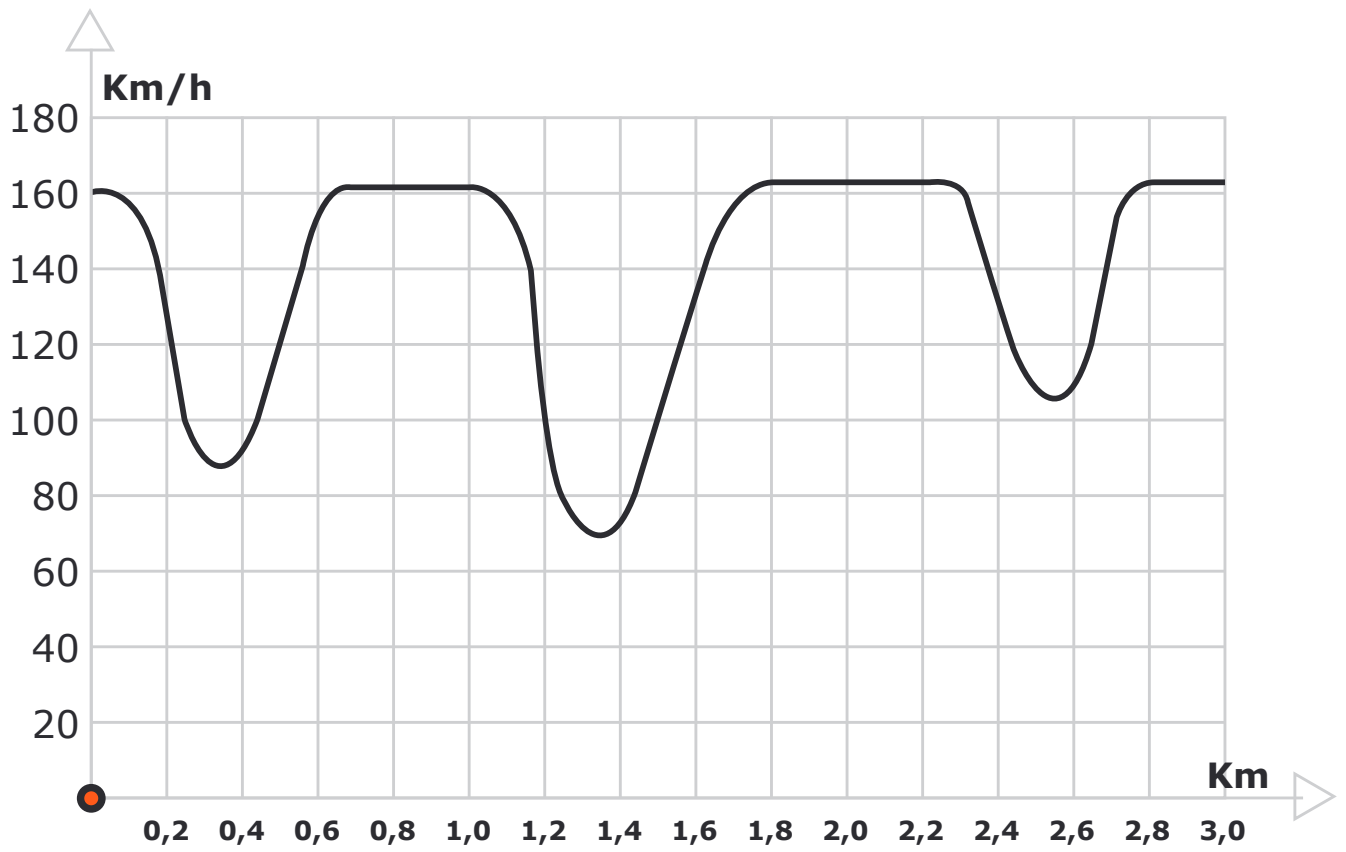
Aplicaciones de las matemáticas

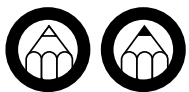
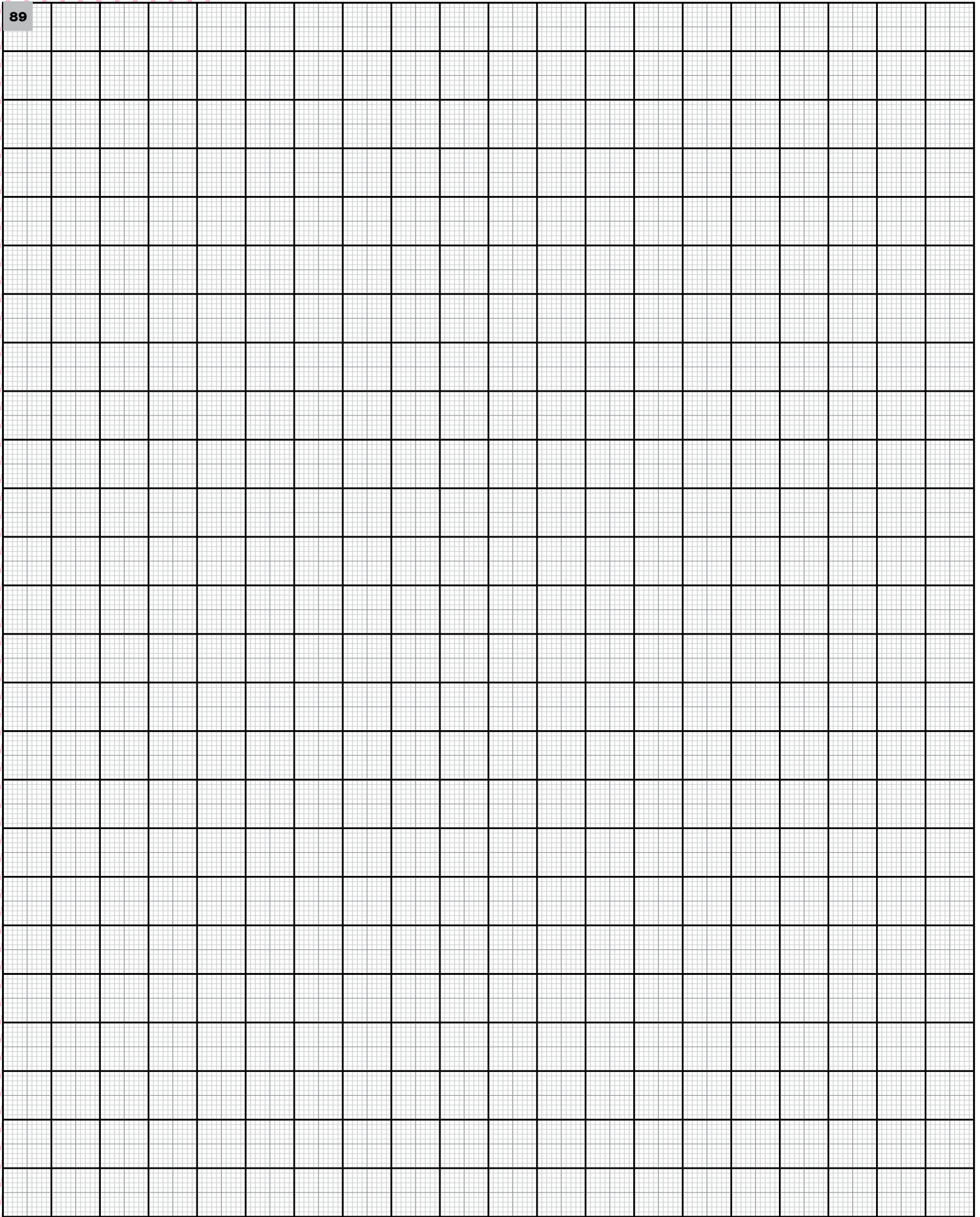
Estas curvas aparecen desde la Antigüedad, utilizadas por **Aristóteles** y **Ptolomeo** para describir los movimientos de los planetas. Los astrónomos las utilizan aún hoy en día. Para obtener medidas más precisas del tiempo en navegación o en astronomía, **Huygens** inventa en 1659 un reloj de péndulo que oscila entre dos arcos de cicloide. Es el péndulo isócrono.

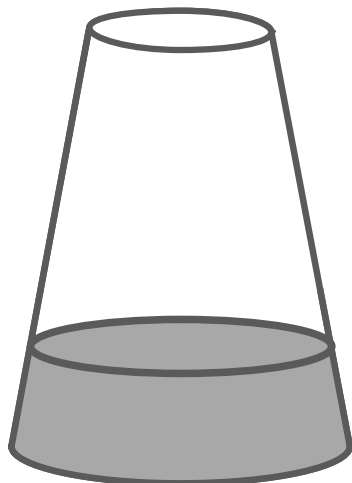
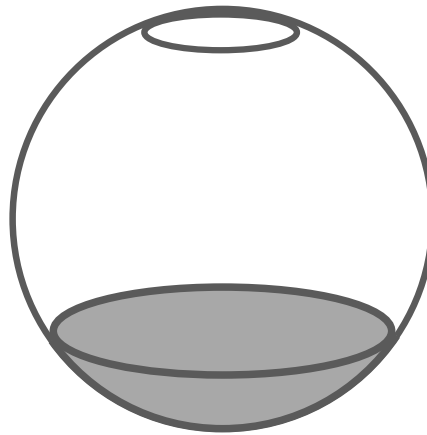
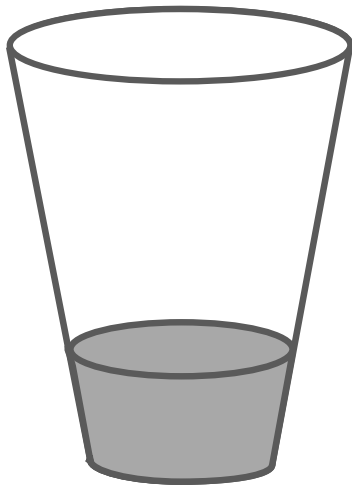
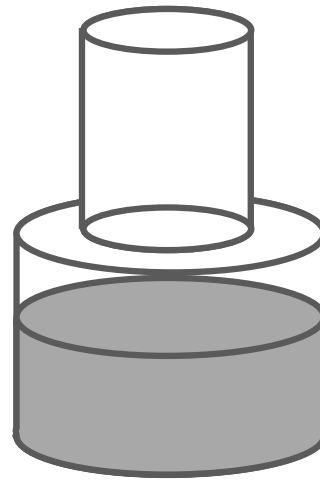
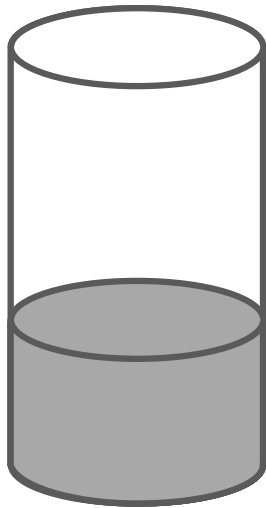
En mecánica, las formas cicloidales se utilizan en engranajes y reductores de velocidad. ¡Una pista de monopatín en forma de cicloide tendría más ventajas que las actuales!

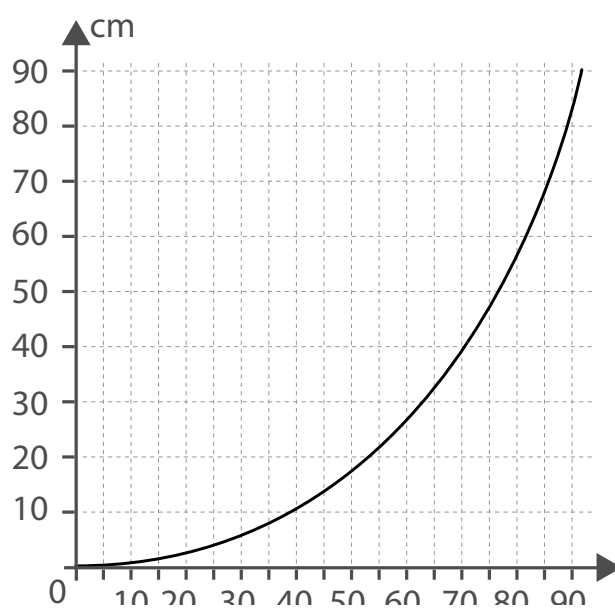
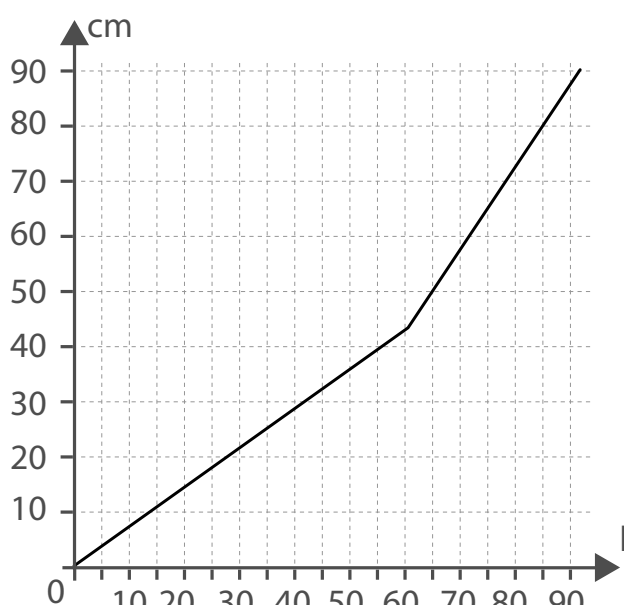
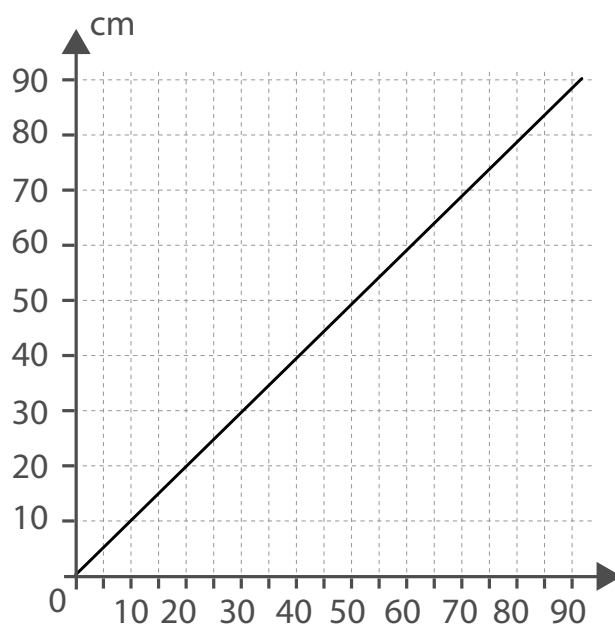
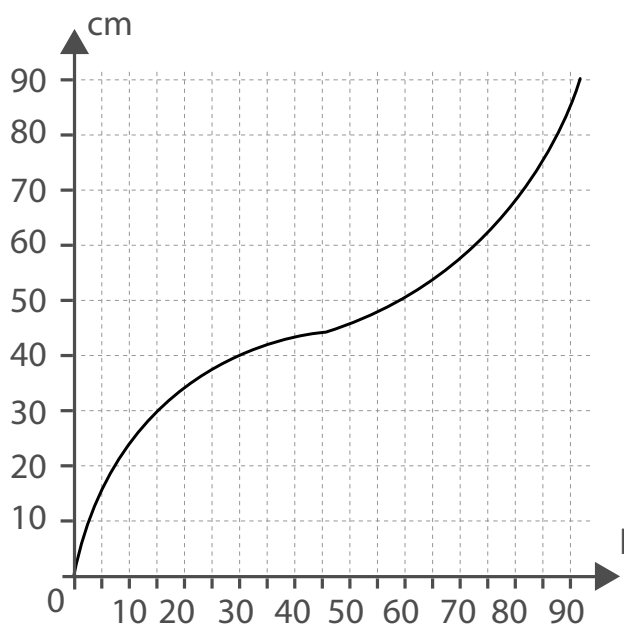
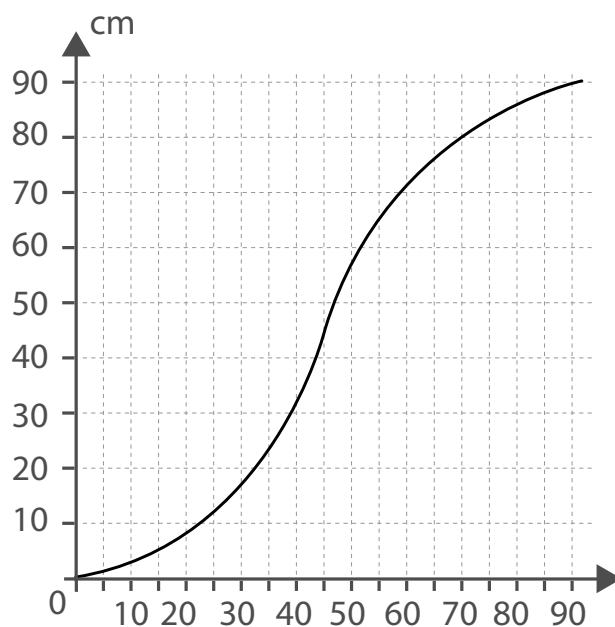
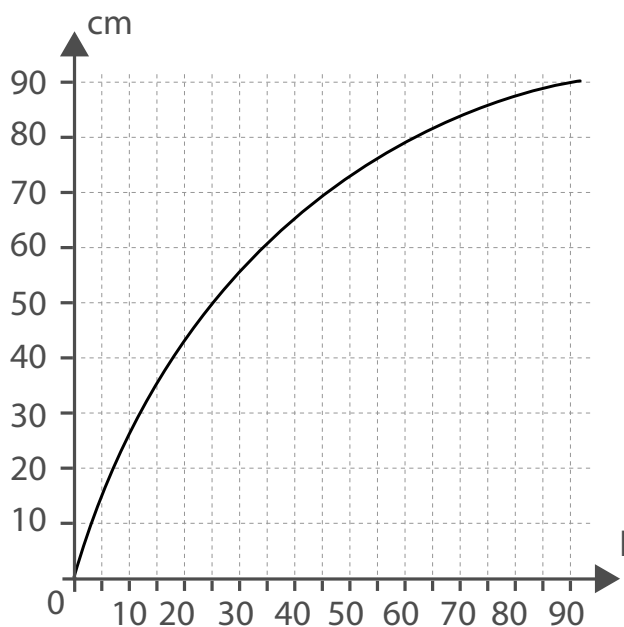
PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

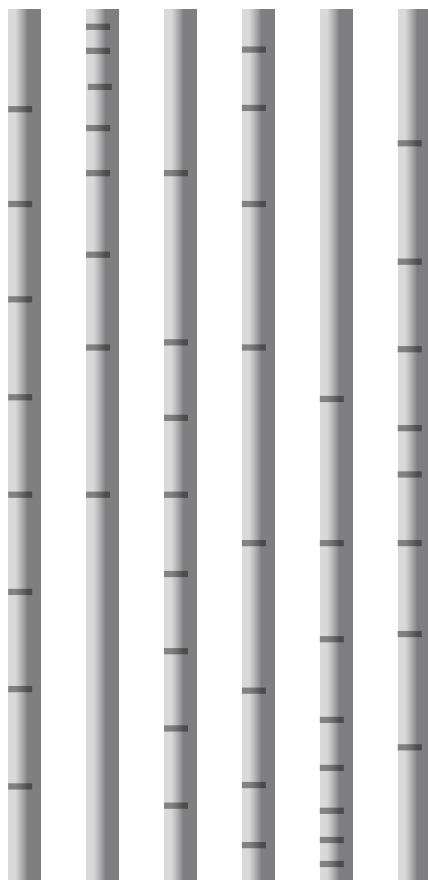
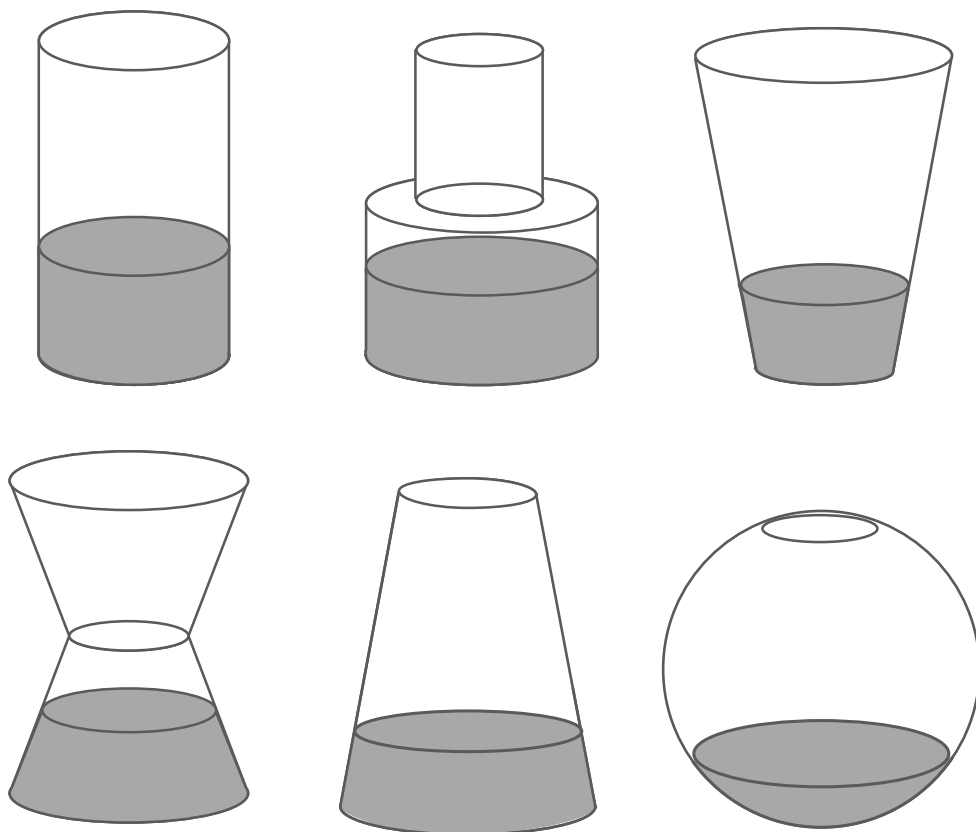
Bernoulli - Braquistocrono - Cicloide - Cáustica - Reloj de Huygens

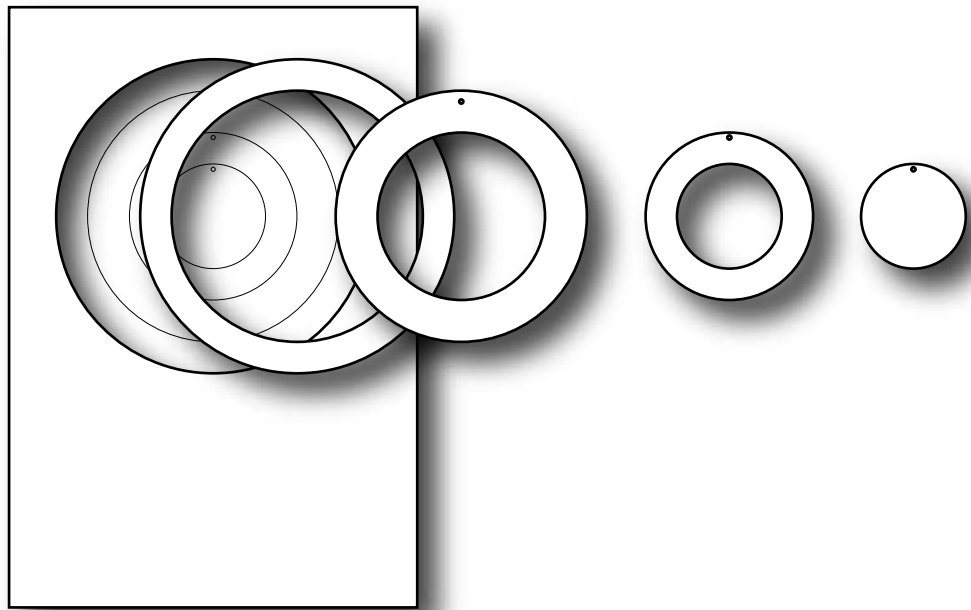
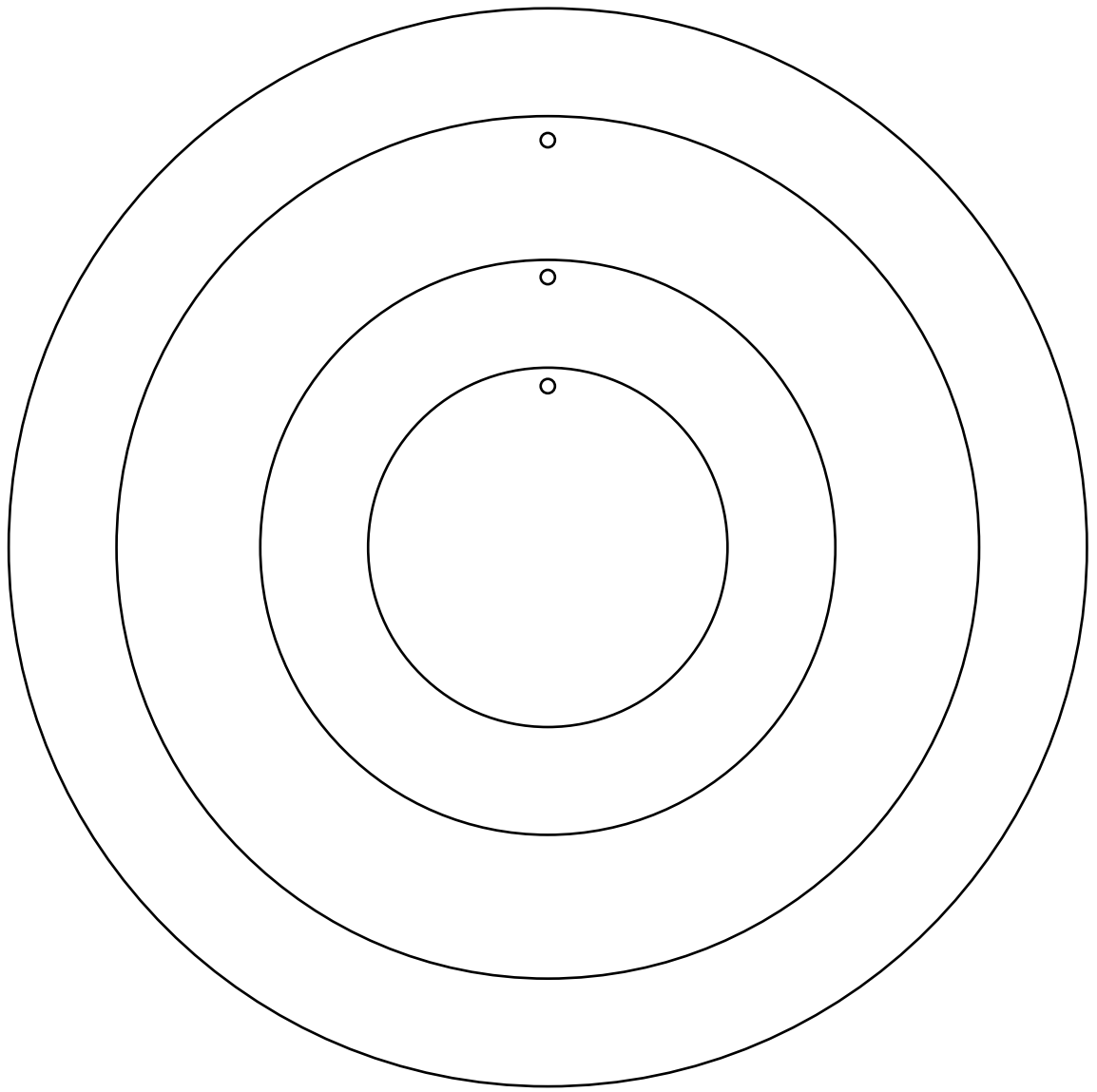


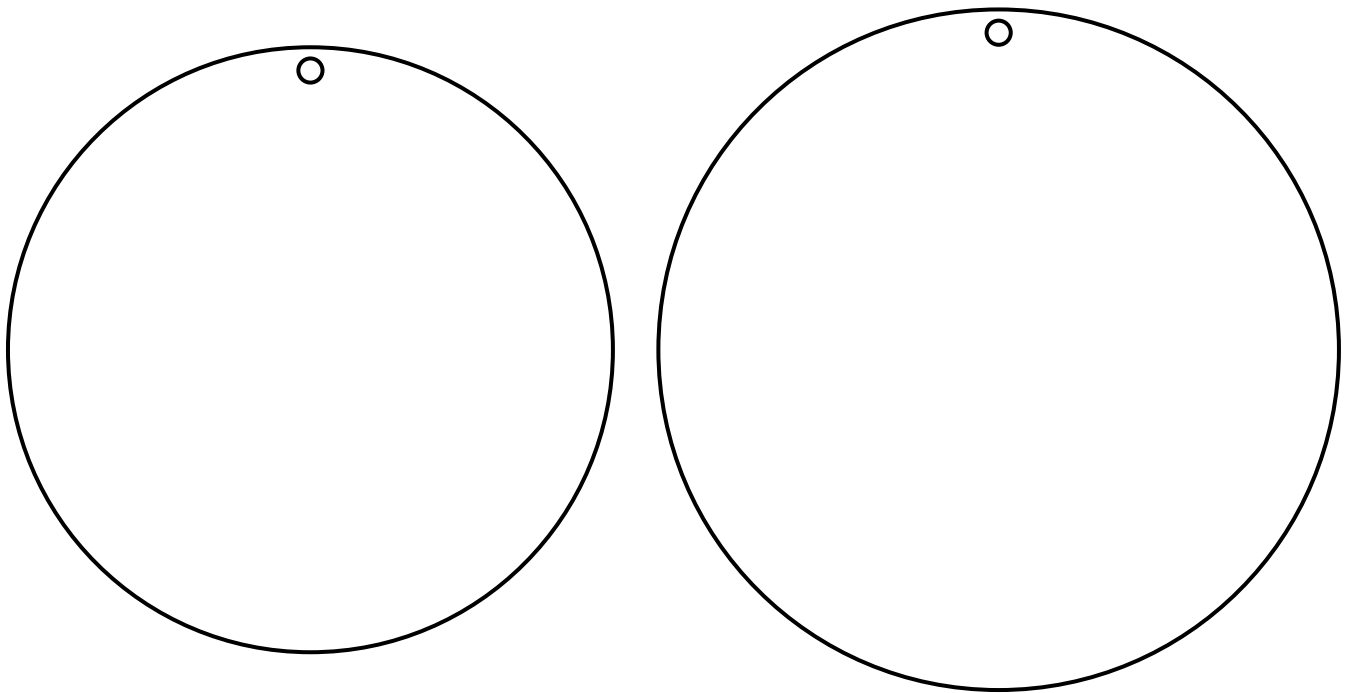
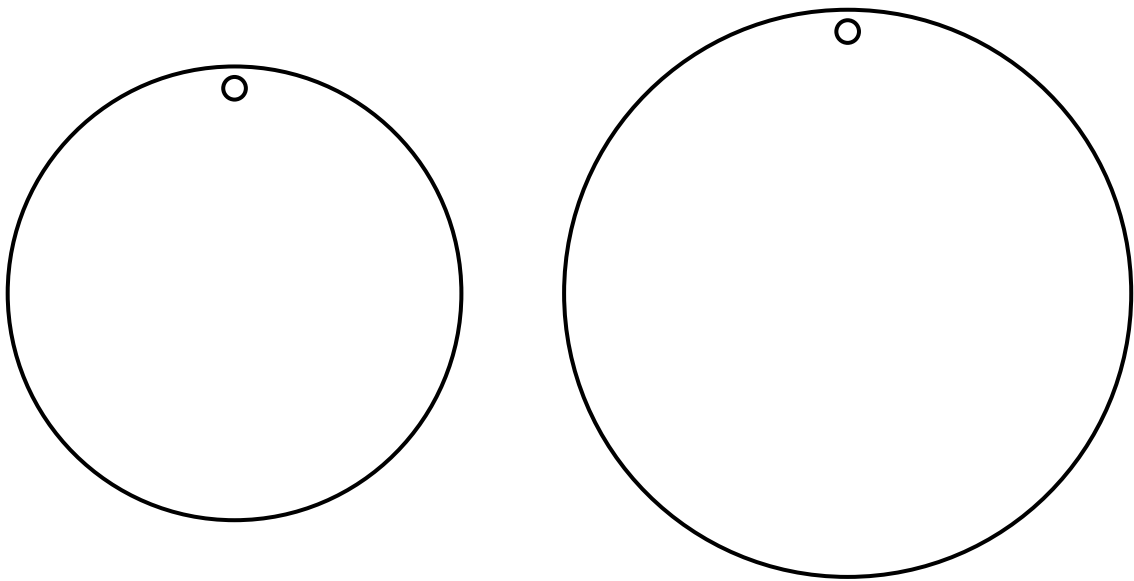
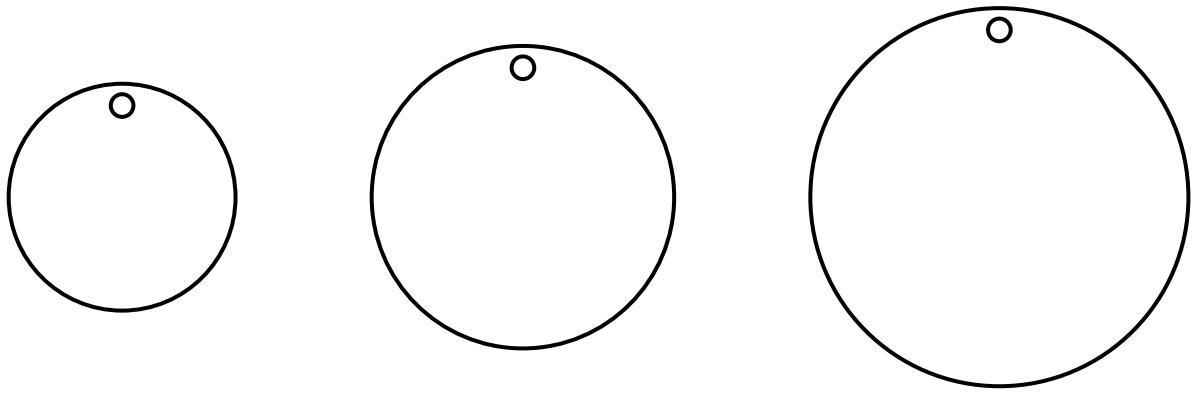










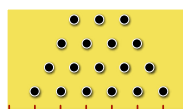




7. Estimar - Prever



¿Dos bolas rojas?



¡Bingo!



¿Y el ganador es?

¿Dos bolas rojas?



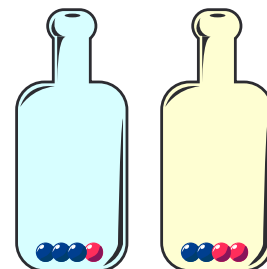
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 botellas pequeñas con 4 canicas

¿Dos bolas del mismo color o dos bolas de colores diferentes?

De la vuelta a uno de los recipientes para que aparezcan dos bolas en el cuello de la botella.

- ¿Tiene más posibilidades de obtener dos bolas del mismo color o dos bolas de colores diferentes?
- ¿Cómo comprobar su respuesta?
- ¿Y si cada botella contuviera 1000 bolas más del mismo color?



¿Qué retener?

Prever o estimar

En uno de los recipientes hay el mismo número de bolas de cada color, se puede entonces pensar que tenemos la misma probabilidad de obtener el mismo color que colores diferentes. ¡Pues no es así!

Para comprobarlo, puede

- Volver a realizar el experimento una gran cantidad de veces.
- Es la aproximación estadística.
- Calcular el número de maneras de agrupar dos bolas entre cuatro.
- Es la aproximación probabilística.

En el primer caso, tiene una estimación estadística del resultado. Cuantos más experimentos realice, más se aproximará al resultado exacto. En el segundo caso, tiene un acercamiento modelizado al problema y un resultado teórico.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 urna con 750 canicas azules y 250 rojas (aparecen 100 canicas) o 1 saco con 750 canicas azules y 250 rojas, 1 recipiente, volumen: 100 canicas

Sondeos - Sondeos

- Extraiga 100 canicas y colóquelas en el recipiente, ¿cuántas hay de cada color?
- Realice la experiencia varias veces. ¿Cuántas canicas de cada color estima usted que extraerá?

¿Qué retener?

Si se encuesta a una muestra de 100 personas elegidas al azar en un grupo de 1000, se obtienen informaciones aproximadas. De la misma manera aquí, una muestra de 100 canicas proporciona información sobre el número de canicas de cada color en el recipiente con una cierta precisión, una cierta "horquilla" (entre 21 y 29 bolas rojas). Este es el dominio de los sondeos.

Aplicaciones de las matemáticas

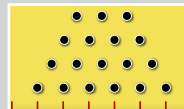
Hoy en día la probabilidad y la estadística se utilizan en la gestión de sistemas complejos: control de cohetes, colas de espera, márgenes de error, etc.

Pero también en juegos con dinero, en economía, seguros, cálculo de jubilaciones y planes de jubilación, tests de calidad, estudios de opinión, etc.

El cálculo estadístico permite extrapolar información para una población completa a partir de una muestra representativa. Los sondeos bien llevados deben también informar sobre los límites de las técnicas utilizadas.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Azar - Juegos - Sondeo - Probabilidades



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 plancha de Galton (cf plano), bolas, clavos, tablero

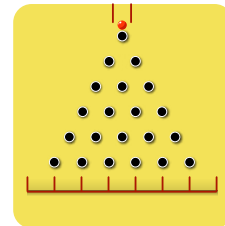
100

¿El azar es computable?

Elija una canica y déjela descender suavemente.

- ¿Puede prever dónde va a llegar?
- ¿Dónde tiene más posibilidades de caer?

Prever como se comporta cada canica es imposible. Sin embargo, el cálculo de probabilidades permite prever como se distribuye el conjunto de las canicas a la llegada.



¿Qué retener?

La curva de Gauss

¿Por qué es tan conocida la forma de esta curva? ¿Por qué resulta fundamental para la estadística?

Si clasificamos los habitantes de una ciudad o un país de acuerdo con una característica (tamaño, peso, cociente intelectual, nivel de competencia...), cuanto más nos aproximemos a la media para cada criterio considerado, más individuos se encontrarán. Cuanto más nos alejemos de la media, menos individuos habrá. En los extremos, no encontraremos prácticamente a nadie.

La representación gráfica de este hecho es la curva llamada campana de **Gauss** (1777-1855). El carácter universal de esta curva es consecuencia de un resultado de **Euler** (1707-1783) y de **Laplace** (1749-1827), que dice que la distribución gaussiana es la acumulación de muchas pequeñas contribuciones independientes.

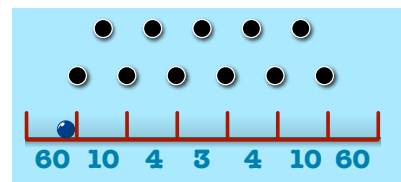
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 plancha de Galton (cf plano), 7 valores sobre las casillas

100

Elija la buena casilla

- Coloque un Euro, un dólar, un... en una de las casillas.
- Si la canica cae sobre esa casilla, ganará 60, 15, 4 ó 3 veces más que su apuesta!
- Algunas casillas son beneficiosas para el jugador que otras ¿Cuáles?
- Calcule el número de caminos que conducen a cada casilla.
- ¿Qué probabilidad existe de llegar a cada casilla?



Para conocer la probabilidad de llegar a cada casilla, basta con contar el número de caminos que conducen a ella! Se reconocen los números del triángulo de Pascal.

¡Todas las casillas no tienen la misma probabilidad de hacerle ganar! ¿El propietario de este tipo de juego es el que con mayor frecuencia gana?

Aplicaciones de las matemáticas

La probabilidad y la estadística son herramientas que permiten el tratamiento de datos y de la información. No solamente se encuentran en el ámbito de las tecnologías de la información (tratamiento estadístico de la señal y de imágenes), sino también en la gestión de riesgos (seguros), el control de calidad, la economía, la salud, en ingeniería financiera (finanzas cuantitativas), el consejo estratégico (análisis de mercados, estudios de factibilidad), etc.

Se puede así usar una curva de **Gauss** para modelizar la gestión de ventas y de existencias en una empresa, un comercio.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Curva de Gauss - Estadística - Probabilidad - Distribución - Esperanza de ganancia

¿Y el ganador es?



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 jugadores

Hoja, piedra, tijeras...



Simultáneamente, los dos jugadores muestran su elección con una mano.

¡La hoja envuelve la piedra que rompe las tijeras que cortan el papel!

- ¿Cómo ganar con más frecuencia a este juego también llamado Chifoumi?

Respuesta: dejando cada jugada al azar.

- ¿Pero, se puede jugar al azar?

Variante: ¡Se añade un pozo!



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 jugadores y después, 2 grupos de jugadores, pizarra, tiza

La carrera hasta 20

El primer jugador dice 1 ó 2. Cada uno, por turnos, añade 1 ó 2 al número del otro jugador. Las cantidades sucesivas se escriben en la pizarra.

- Gana el que primero dice 20.

- 1a fase: hacer jugar a los alumnos uno contra uno.
- 2a fase: hacer jugar 2 grupos de alumnos dejando un tiempo de consulta entre cada jugada. Cada alumno del grupo juega por turnos.
- 3a fase: cada grupo enuncia algunos elementos de la estrategia ganadora. El otro grupo acepta o rechaza el enunciado. Gana el equipo que tiene el mayor número de enunciados aceptados.

Extensiones:

- Hacer la carrera hasta 30.
- Hacer la carrera hasta 2010.
- Hacer la carrera hasta 20 ó 30, pero sumando 1, 2 ó 3..

Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 jugadores y después, 2 grupos de jugadores, 1 cuadro

101

La tableta de chocolate



Cada uno, por turnos, elige una casilla y tacha todas las que no están aún tachadas y que están a la izquierda y debajo de la casilla elegida.

- Pierde el que tacha la última casilla arriba a la derecha.
- Se puede hacer jugar a los alumnos como en el caso de la carrera hasta 20.

Extensiones:

- Hacer jugar sobre cuadros más pequeños o más grandes.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 jugadores y después, 2 grupos de jugadores, 1 pizarra, 1 tiza, 3 dados



Juego, azar y estrategias

Cada uno, por turnos, lanza los dos dados.

- Gana el que obtiene la suma mayor.
- ¿Cuáles son los números que tienen mayor probabilidad de salir?

Extensiones:

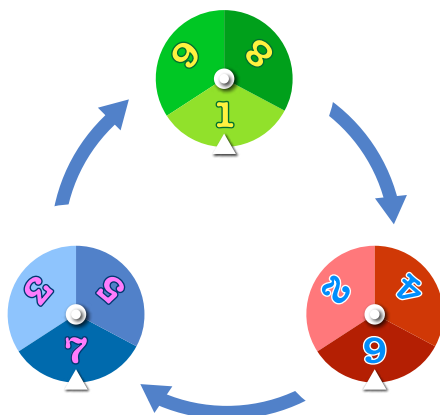
- Jugar con 3 dados.

¿Y el ganador es?



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 jugador, 3 ruletas o 3 dados marcados



¡Hagan su juego!

- Elija una ruleta, iyo elijo la siguiente y gano más a menudo que usted!
- ¿Por qué?

De hecho, cada ruleta « gana » más a menudo que la anterior.

¿Qué retener?

Estos juegos son ejemplos sencillos de teoría de juegos.

En los dos primeros casos, el juego es de información completa y tiene un final. Hay siempre un ganador y un perdedor y por lo tanto una estrategia ganadora y, aquí, gana el que comienza el juego (¡y juega bien!). Pero en el segundo juego, la estrategia ganadora no es fácil de encontrar.

El tercer juego contribuyó al nacimiento de la **teoría de juegos** en el siglo XVII, gracias a los trabajos de Blaise Pascal y de **Chevalier de Méré**. Durante el siglo XX, **Von Neumann** y **Oskar Morgenstern** desarrollaron esta teoría.

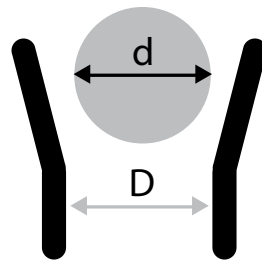
Los últimos juegos muestran que el azar puede a veces controlarse. Situaciones análogas al juego de las ruletas han permitido probar, en particular a **Condorcet** (1743-1794), que en democracia ningún sistema electoral es “mejor” que otro.

Aplicaciones de las matemáticas

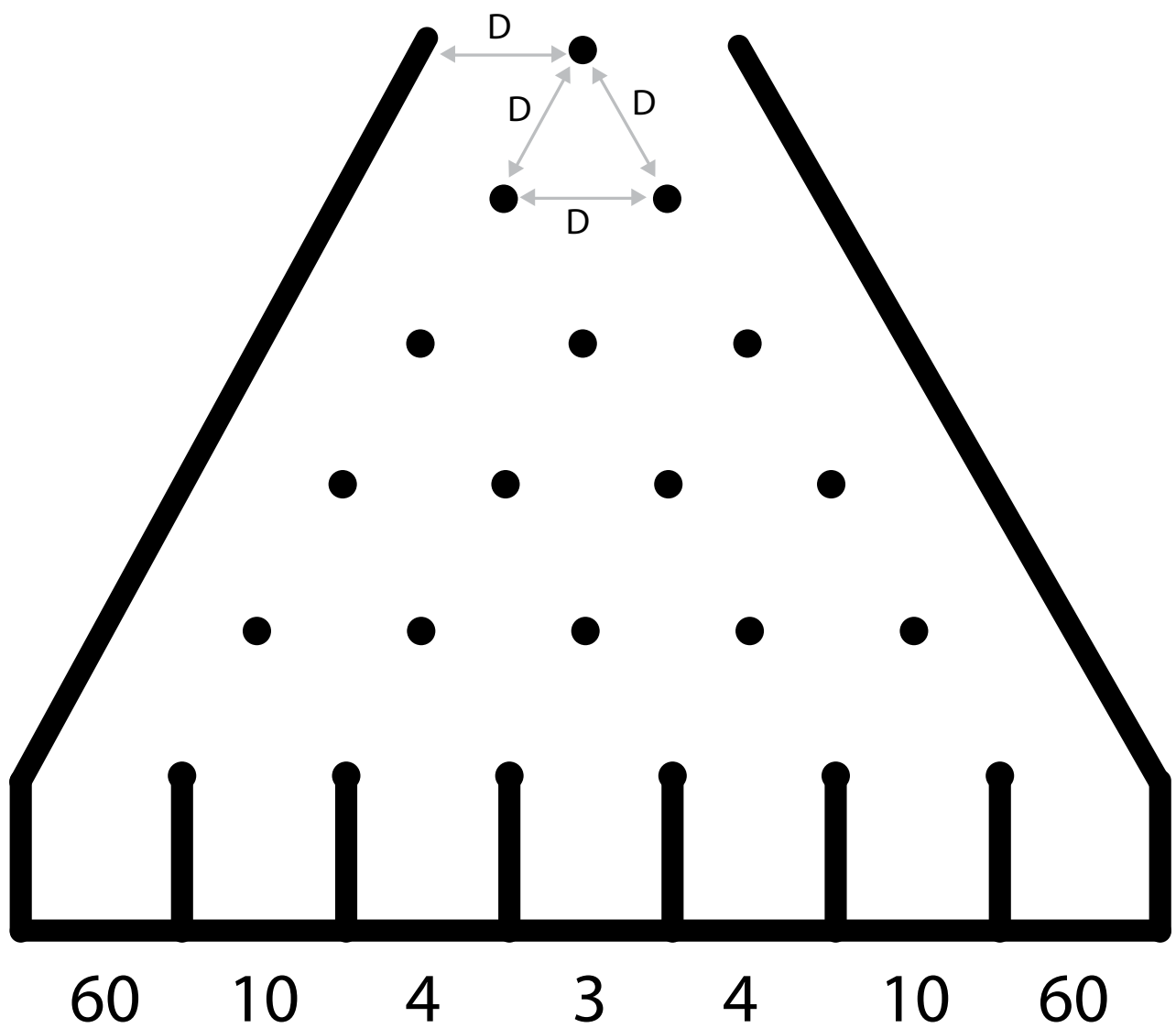
La teoría de juegos, en colaboración con la probabilidad y la estadística, está muy presente hoy en día en todas las situaciones que involucran situaciones de estrategia, decisión, competición y cooperación. Se encuentra, por supuesto, en los juegos, pero también en luchas o conflictos políticos (ciencias políticas) o en estrategias militares y sobre todo en economía, en comercio y marketing. También se utiliza en informática y algorítmica.

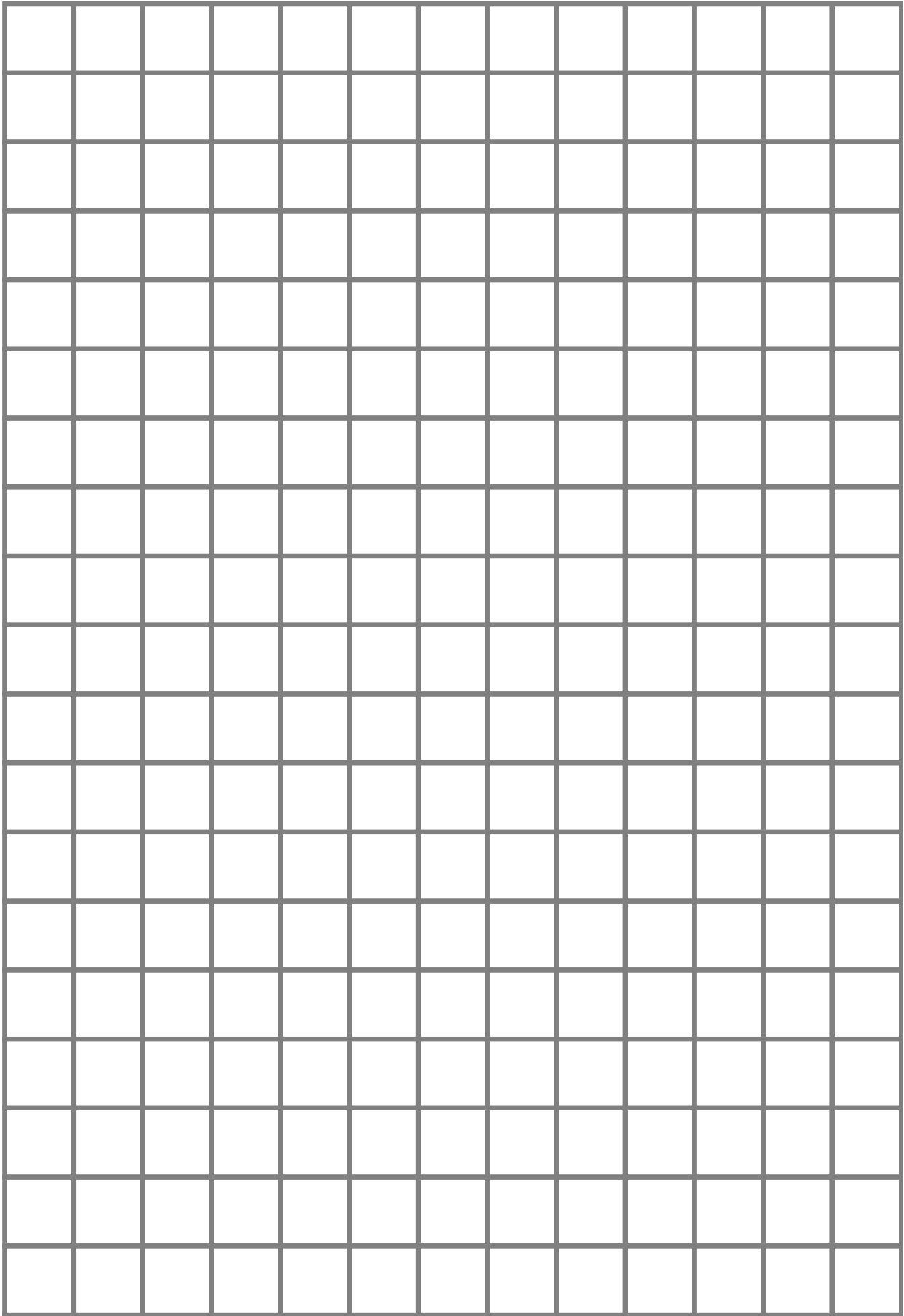
PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Teoría de juegos - Estrategia - Von Neumann - Nash - Teoría de la información



$d = 30 \text{ mm}$
 $D = 35 \text{ mm}$





8.Optimizar



Pompas de jabón



El camino más corto



La mejor forma

Pompas de jabón



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Alambre o pajas, 1 cubo con agua jabonosa

La naturaleza es perezosa

- Fabrique un tetraedro, un cubo, un octaedro, una hélice...
- Antes de sumergirlas en agua, intente imaginar como van a colocarse las superficies jabonosas.
- Sumérjalas y observe las películas jabonosas.
- ¿Cuántas caras hay alrededor de las aristas? ¿Cuántas aristas alrededor de los vértices?



¿Qué retener?

Matemáticas enjabonadas

Una pompa de jabón es esférica. ¿Por qué? Dada un área fija, el círculo delimita la superficie de menor perímetro.

Fijado un volumen, la esfera posee la superficie más pequeña.

La naturaleza elige minimizar el esfuerzo.

Estas formas corresponden a mínimos de la energía potencial, que es proporcional al área de los cuerpos.

Las moléculas de jabón crean una tensión superficial que minimiza las superficies jabonosas.

El belga **Ferdinand Plateau** fue el primero que estudió estas formas en los años 1860. Observó que:

- Cuando una pompa de apoya sobre una superficie, es perpendicular a ella.
- Cuando varias superficies jabonosas se encuentran, lo hacen: 3 a 3 a lo largo de una línea con ángulos iguales de 120° , 4 a 4 alrededor de un punto con ángulos constantes ($109^\circ 28' \dots$).

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Alambre, pajas, una placa, agua jabonosa

Bulle à bulle

- Haga una pompa de jabón. ¿Qué forma tiene?
- Coloque una pompa sobre la placa. ¿Cómo se apoya la pompa sobre la placa?
- Coloque una pompa grande y una pequeña sobre la placa sin que se toquen. Introduzca una paja entre las dos. ¿Qué sucede?
- Sobre un alambre en forma de U, coloque una cuerda no tensada y sumerja todo en el agua jabonosa. Estire un poco el hilo. ¿Qué forma toma?
- En el interior de un marco cuadrado de alambre de (unos) 15 cm de lado, coloque una cuerda cerrada de (unos) 25 cm, unida a las 4 esquinas del cuadrado por medio de la cuerda. Sumerja el conjunto en el agua y sáquelo. ¿Qué forma toma la cuerda interior si la agujerea con un dedo seco?

Aplicaciones de las matemáticas

Estas formas se encuentran en la naturaleza y en arquitectura.

Los problemas de superficies minimales interesan a matemáticos y físicos desde hace más de tres siglos y también, desde hace una cincuentena de años, a químicos, biólogos, arquitectos...

Panales, esqueletos, telas de araña, ... la evolución de la naturaleza ha optimizado numerosas formas. También en la industria del automóvil, la aeronáutica, la construcción, la arquitectura de los puentes... los ingenieros buscan soluciones óptimas para disminuir el peso, los residuos, el consumo de energía y el gasto medioambiental de los objetos de conciben.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Pompas de jabón - Superficies minimales - Tensión superficial

El camino más corto

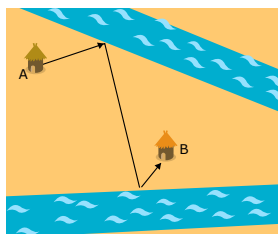


Hágalo usted mismo

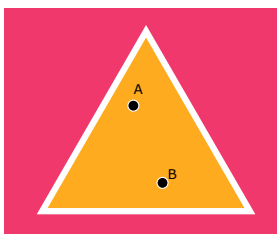
MATERIAL: Papel, lápiz

El camino más corto

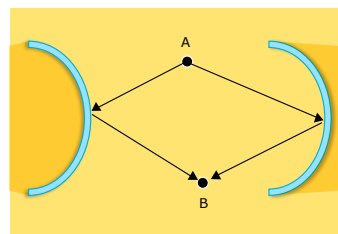
¿Cuál es el camino más corto de A a B?



- ¿pasando por el río?
- ¿pasando por los dos ríos?



- ¿pasando por los tres lados de un triángulo?



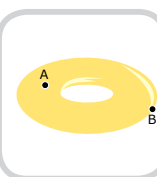
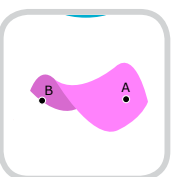
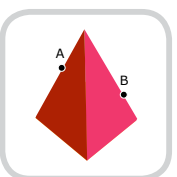
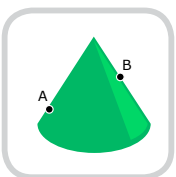
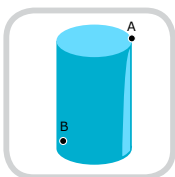
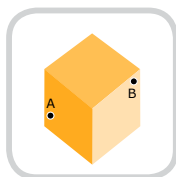
- ¿por un espejo cóncavo?
- ¿por un espejo convexo?

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Pape, lápiz, 1 cubo - 1 cilindro - 1 cono - 1 pirámide - 1 "silla de montar" -1 toro

El camino más corto sobre una superficie

¿Cuál es el camino más corto de A a B?



¿Qué retener?

La línea recta no es el camino más corto... ien general!
El camino más corto sobre una superficie se llama una **geodésica**.

- Sobre una **superficie plana**, en geometría euclidea, es la línea recta.
- Sobre una **superficie desarrollable**, un cilindro, un cono, un poliedro... , también es el segmento de recta que une los dos puntos sobre la superficie proyectada sobre el plano.
- Ya no es una línea recta cuando la superficie no posee curvatura nula en cada punto. Es el caso de la «**silla de montar**» con curvatura negativa y de la esfera con curvatura positiva.
- Sobre la **esfera**, es un arco de circunferencia máxima, circunferencia centrada en el centro de la Tierra.

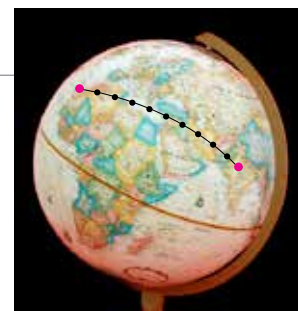
Estos problemas fueron desarrollados por **Gauss** en el siglo XIX.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 globo terráqueo, 1 cuerda o 1 goma elástica

¿Y sobre la superficie terráquea?

- Elija dos puntos alrededor del paralelo 30 o 40: París y Montreal o El Cabo y Santiago de Chile...
- ¿Cuál es el camino más corto para ir de una ciudad a la otra?
- Compruébelo con la cuerda.
- ¿A qué corresponde esta línea sobre el globo?



Aplicaciones de las matemáticas

Sobre la Tierra, estos problemas de encontrar el camino más corto interesan a los gestores de redes de de fluidos, electricidad, gas, petróleo, agua, y también en las comunicaciones terrestres.

Pueden resolverse por medio de las matemáticas o la algorítmica.

Sobre la superficie de la Tierra, son utilizados desde hace mucho tiempo por los marinos. Son usados hoy en día por los aviadores, incluso para vuelos de larga distancia. Para los vuelos espaciales, estos problemas son más complejos e involucran la atracción gravitacional entre planetas.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Camino más corto - Minimal - Curvatura - Gauss - Superficie desarrollable

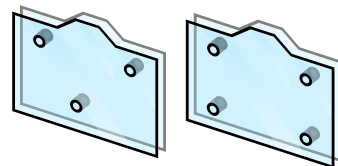
La mejor forma



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 placas de plexiglás unidas por 3, 4 ó 5 toques, 1 cubo de agua jabonosa

El camino más corto entre tres puntos



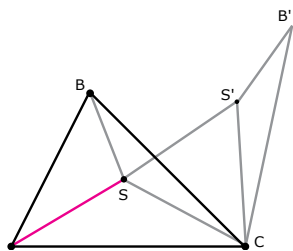
- Coloque 3 toques entre las dos placas*.
- Sumerja el conjunto. Sáquelo y observe.
- ¿Cuántos puntos hay? ¿Cuántas aristas? ¿Qué ángulo forman?
- Coloque 4 toques entre las 2 placas.
- Antes de sumergir el conjunto, trate de imaginar como van a repartirse las uniones jabonosas: ¿en X? ¿en U? ¿¿Z, H??
- Sumerja y observe: ¿Cuántos puntos hay? ¿Cuántas aristas?

* ¿Qué sucede si uno de los ángulos del triángulo es mayor que 120° ?

Que retener

Solución jabonosa y matemáticas

La solución jabonosa muestra cual es el camino más corto uniendo 3, 4 y más puntos. El problema para 3 puntos fue resuelto por el suizo **Joseph Steiner** en el siglo XIX.



Veamos una solución sencilla: Se construye el triángulo $CS'B'$, obtenido por una rotación de 60° a partir del triángulo CSB . Se tiene:

$$SA + SB + SC = SA + SS' + S'B'.$$

Esta cantidad es mínima cuando los 4 puntos $A-S-S'-B'$ están alineados. En este caso, los ángulos BSC y $CS'B'$ son de 120° . ¡Y el problema está resuelto!

Una escola para 3 pueblos

Los 3, 4 ó 5 puntos pueden reemplazarse por ciudades, granjas..., el punto de Steiner por una escuela, un hospital... La respuesta viene dada por el agua jabonosa. ¿Cómo resolver este problema si el número de habitantes es diferente?

Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 placas de plexiglás, 1 paja

Los panales

- Haga una pompa entre las dos placas. Va a formarse un cilindro
- Coloque una sucesión de pequeñas pompas, las unas junto a las otras. ¿Cómo se enlazan las unas respecto a las otras?
- Introduzca una lámina metálica perpendicular a las 2 placas y observe.
- Si las pompas son del mismo tamaño ¿qué formas toman? ¿Cómo se enlazan unas con otras?

Para saber más

Un apilamiento de discos deja espacios vacíos. Es el hexágono regular el que ocupa la mayor superficie sin dejar agujeros. Se encuentra en los panales de abejas. ¿Las abejas han encontrado la solución óptima? A pesar de todo, la celda de un panal no es la forma que más eficientemente ocupa un volumen dado. Se han encontrado mejores sistemas, pero la forma más eficaz sigue aún sin conocerse.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Hechos con alambre: 2 circunferencias, 4 barras



Superficies minimales entre 2 circunferencias, 2 rectas, 4 rectas...

- Saque las dos circunferencias del cubo y aléjelas un poco la una de la otra. ¿Dónde se encuentra esta superficie?
- Saque dos barras del cubo, aleje un poco la una de la otra y gírelas ligeramente la una respecto a la otra. ¿Dónde se encuentra esta superficie?
- Vuelva a hacer el experimento con 4 barras unidas.

Aplicaciones de las matemáticas

Estas superficies minimales se encuentran en la físico-química de los materiales, en biología y en arquitectura (estructuras muy finas e incluso en hormigón).

Los materiales diseñados tomando como modelo la estructura de panal poseen propiedades llenas de ventajas, como ser ligeras, resistentes y rígidas.

Estas formas, hechas en aluminio, se utilizan en la construcción del Airbus A380, de los trenes de alta velocidad (TGV), de las paredes de los satélites,...

Con cartón o polivinilo, el modelo de panal de abeja se emplea habitualmente en la construcción de puertas y paletas de transporte...

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Optimización - Superficies minimales - Panal - Estructura tensada

9. Demostrar



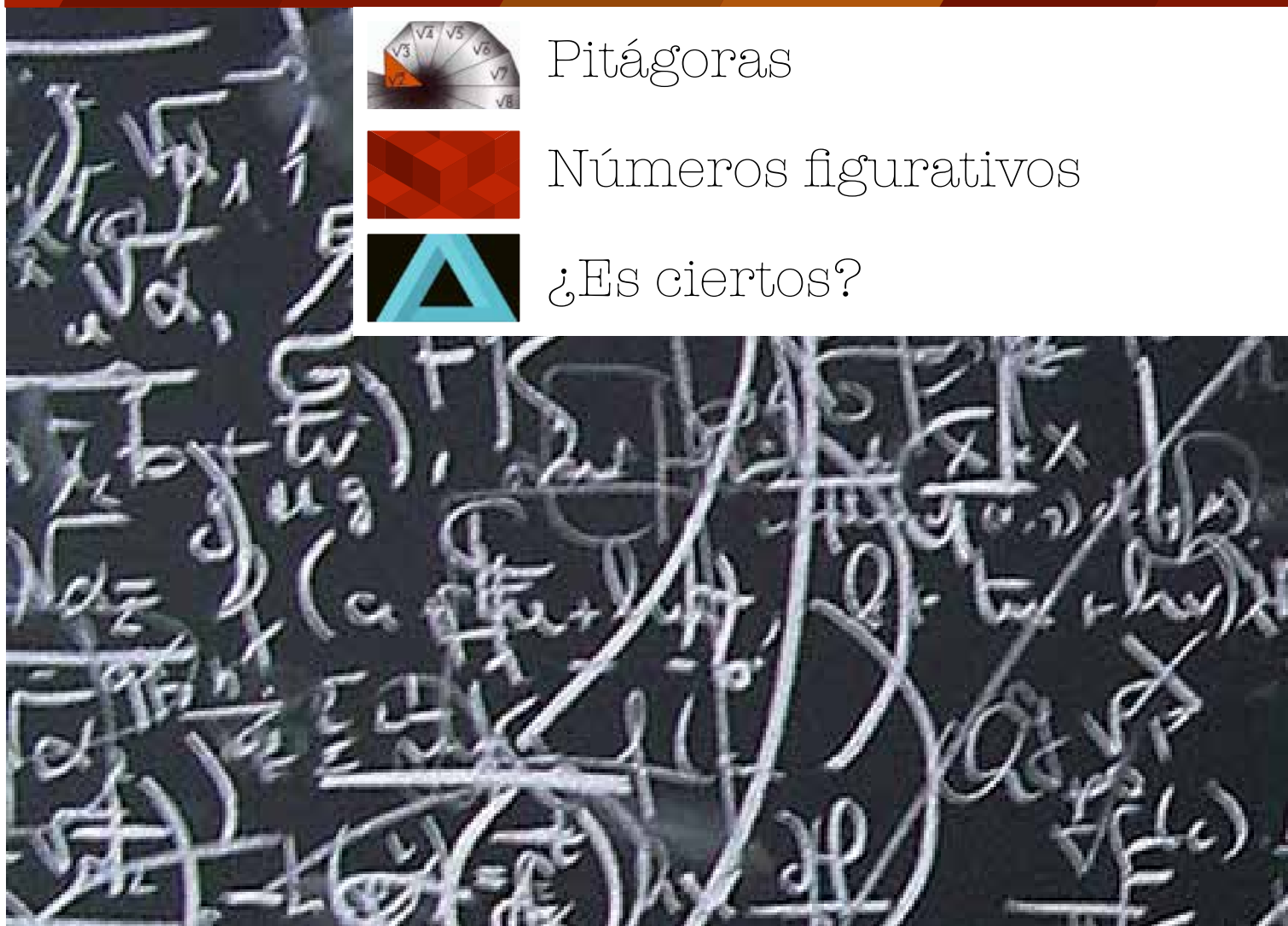
Pitágoras



Números figurativos



¿Es ciertos?





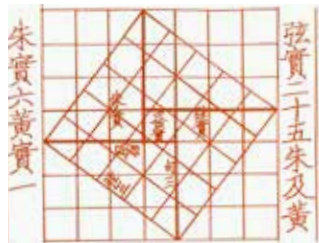
Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 puzzles para recortar

113

114

Que retener



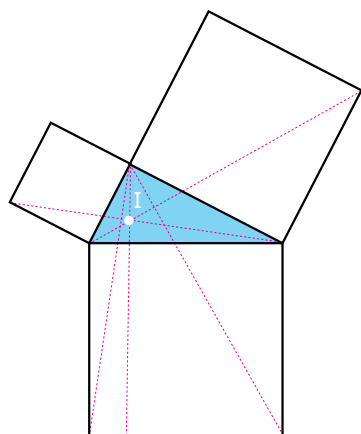
Del chino Chou-pei Suan-King (1105 A.C.).

3000 años de investigación

Los antiguos sabios de Egipto o de China conocían ya muchos de los resultados formulados con números enteros (como $3^2 + 4^2 = 5^2$).

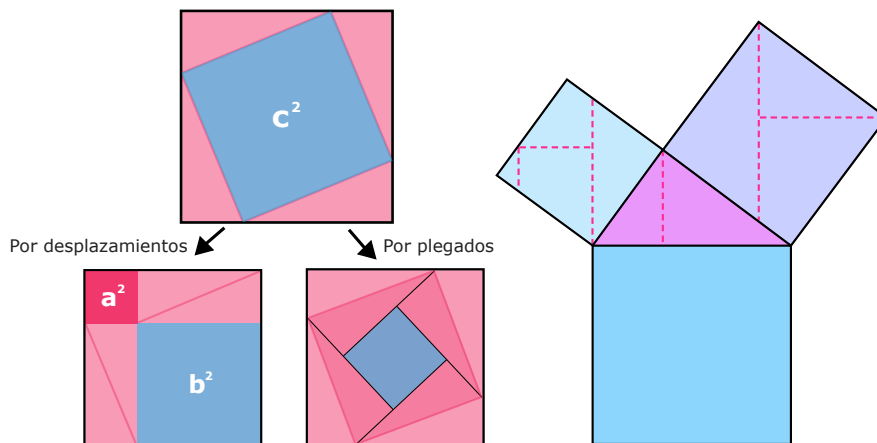
Los griegos fueron los primeros que intentaron demostrar estos resultados de manera general. Así, **Pitágoras** (Siglo VI A.C.) dio su nombre al teorema sobre "el cuadrado de la hipotenusa..." del que **Euclides** (Siglo III A.C.) proporcionó la demostración más antigua conocida.

¡Existen cerca de 400 demostraciones diferentes! Estas pruebas han dado lugar a nuevos problemas y resultados inéditos, como el carácter no racional de la diagonal de los cuadrados de lado entero.



El teorema de Pitágoras

Desplazando las piezas de cada puzzle, haga aparecer una demostración del teorema de Pitágoras



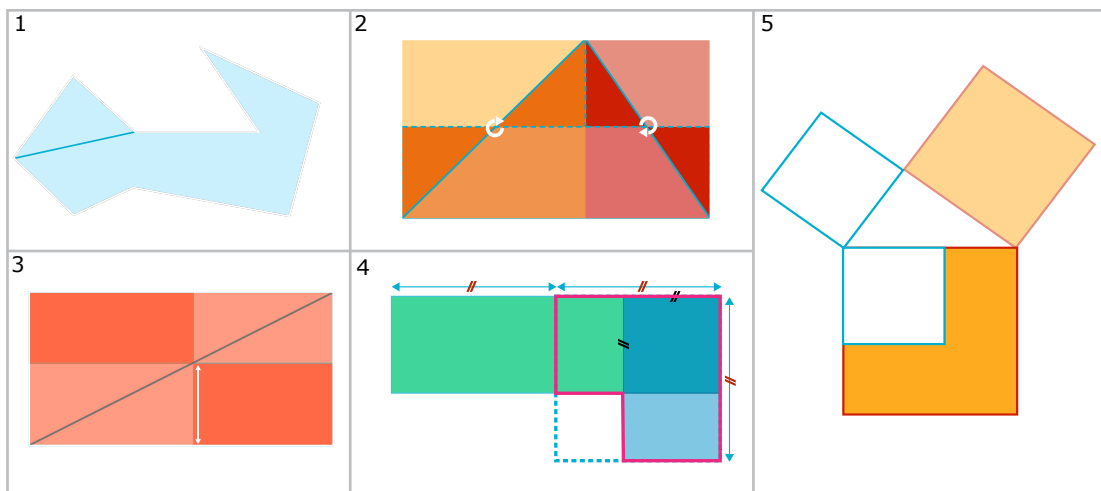
Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel, lápiz, tijeras, compás

De un polígono al cuadrado de misma área

Recortando, recupere las demostraciones de Euclides:

1. Todo polígono puede recortarse en suma de triángulos.
2. Todo triángulo puede dividirse para reconstruir un rectángulo de la misma área.
3. Todo rectángulo puede recortarse hasta formar otro rectángulo de la misma área y cuya anchura esté fijada.
4. Todo rectángulo puede considerarse como la diferencia de 2 cuadrados.
5. Gracias al teorema de Pitágoras, se puede construir un cuadrado ique es la diferencia de otros dos cuadrados!



Conclusión

Todo polígono puede recortarse para reconstruir un cuadrado de la misma área. Desde los griegos, el cálculo de áreas se reduce a comparar la superficie con la de un cuadrado. Se dice que la superficie es cuadrable. Observe que viene medida en « cm^2 , m^2 , km^2 ...».

Pitágoras



Hágalo usted mismo

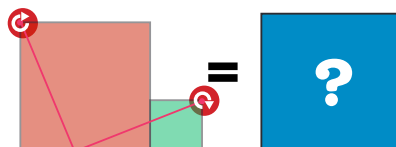
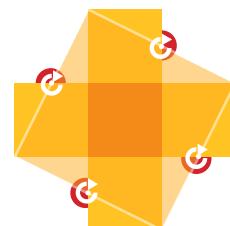
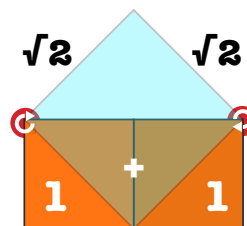
MATERIAL: Papel, lápiz, tijeras

Duplique, triplique...

Recortando, construya un cuadrado:

- suma de 2 cuadrados,
- igual al doble de un cuadrado dado,
- igual a 3 veces, 5 veces... un cuadrado dado.

Hágalo con la menor cantidad posible de recortes.



Que retener

Los chinos consideraban los problemas matemáticos, tanto los aritméticos como los geométricos, como rompecabezas. Estos problemas de cuadratura y de duplicación condujeron a **los griegos** a plantearse célebres problemas:

- la irracionalidad de la diagonal del cuadrado de lado 1,
- la duplicación del cubo,
- la cuadratura del círculo.

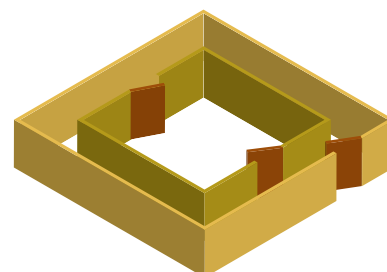
Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel, lápiz

El sofá

- ¿Cuáles son las dimensiones máximas de un sofá que debe transportarse a lo largo de un pasillo de un metro de largo y girando en ángulo recto?
- ¿Puede entrar en la habitación central?
- ¿Y si se tratara simplemente de una plancha (o de una escalera)?

Nota: las puertas miden 80 x 210 cm!



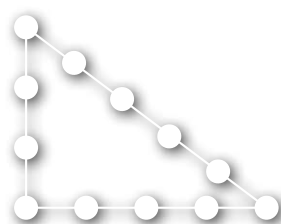
Aplicaciones de las matemáticas

La búsqueda de pruebas, de demostraciones que aplican resultados matemáticos ya conocidos está en la base del trabajo de un matemático y aquí radica la originalidad de esta tarea.

El teorema de Pitágoras se utiliza para construir longitudes irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... ¡y aún hoy en día lo usan los albañiles, los arquitectos y los transportistas de grandes volúmenes!

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Hipotenusa - Número irracional - Duplicación - Cuadratura - Pitágoras - Euclides...





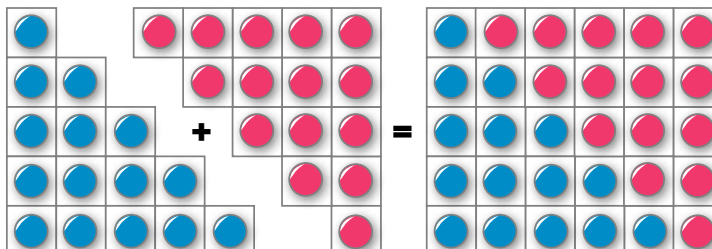
Hágalo usted mismo

MATERIAL: Fichas redondas o cuadradas

Los números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15...

...son las sumas de los primeros números enteros.

Hay dos métodos para calcular estos números:



$$\begin{aligned}
 0 : & \quad 01 + 02 + 03 + 04 + 05 + 06 + 07 + 08 + 09 + 10 + 11 + 12 \\
 & \quad + 12 + 11 + 10 + 09 + 08 + 07 + 06 + 05 + 04 + 03 + 02 + 01 \\
 = & \quad 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 \\
 = & \quad 12 \times 13 \\
 & \quad \text{de donde } T = \frac{12 \times 13}{2}
 \end{aligned}$$

Y demuestre, en general, que: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$

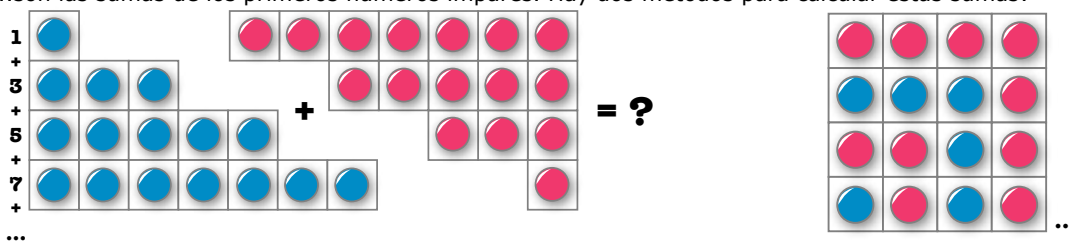
Compruebe, utilizando los primeros números enteros, que cada uno se escribe como la suma de a lo más 3 números triangulares.

¿Qué retener?

De las primeras pruebas simples, comprensibles hasta por un colegial y realizadas con figuras geométricas, hemos pasado hoy en día a demostraciones que ocupan cientos de páginas, que precisan la utilización de ordenadores y que no son comprobables más que por un pequeño número de especialistas. Estas sucesiones de números, representadas por puntos, han sido estudiadas por **Pitágoras**, **Diofanto** y también por **Pascal**. En dimensión 3, se encuentran también los números piramidales, cúbicos...

Los números cuadrados: 1, 4, 9, 16...

...son las sumas de los primeros números impares. Hay dos métodos para calcular estas sumas:



Y demuestre, en general, que: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$

Compruebe, utilizando los primeros números enteros, que cada uno se escribe como la suma de a lo más 4 números cuadrados.

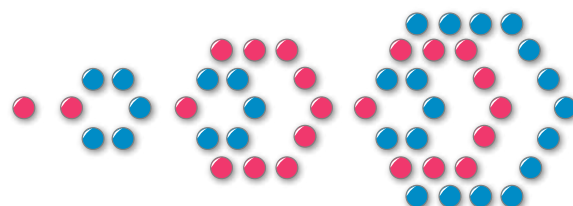
Los números pentagonales, hexagonales...

...son las sumas de los primeros números representados sobre un pentágono, un hexágono,...

Encuéntrelos y deduzca la fórmula general.

Compruebe, utilizando los primeros números

enteros, que cada uno se escribe como la suma de a lo más 5 números pentagonales, de cómo mucho 6 hexagonales,...



Números figurativos



Hágalo usted mismo

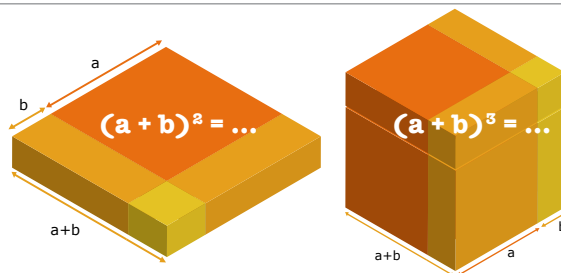
MATERIAL: Bloques de madera o piezas de cartón

Álgebra y Geometría

Con ayuda de estas piezas, encuentre las fórmulas:

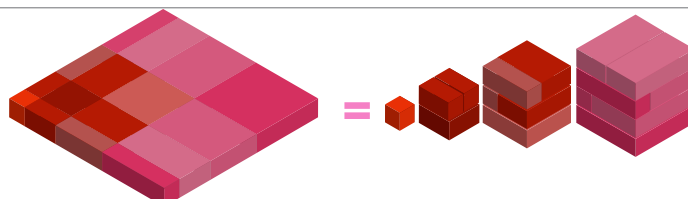
Y recupere también las fórmulas:

$$(a - b)^2 = \dots \quad a^2 - b^2 = \dots$$

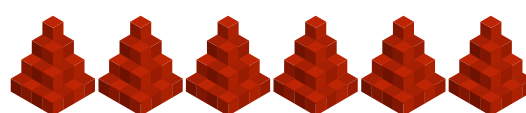


Con los bloques, demuestre que:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots$$

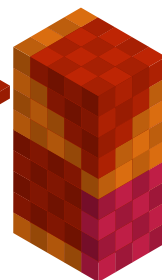


Con ayuda de 6 bloques de este tipo, construya una torre compacta.



Y demuestre, en general, que para todo entero n , se tiene:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel, lápiz



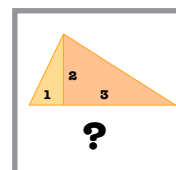
De conjeturas a demostraciones

Los triángulos de Pitágoras

Encuentre los primeros triángulos rectángulos cuyos lados tengan longitudes enteras, dos a dos consecutivas (como 3 - 4 - 5). Intente obtener todas las ternas que cumplen esta propiedad.

Los cuadrados de Fermat

Encuentre los primeros números primos que se escriben como suma de cuadrados de dos enteros (como $5 = 1^2 + 2^2$). Intente deducir el conjunto de los números enteros que se escriben de este modo.



Aplicaciones de las matemáticas

La primera actividad de un científico y de un matemático es la de encontrar y formular un « buen » problema.

¿Qué es un buen problema?

Como dijo **David Hilbert** durante el Congreso Mundial de Matemáticas en París en 1900 - es un problema que cualquier colegial puede entender!

Pero también es un problema que hace avanzar los conocimientos, aunque él mismo no sea resuelto. Así ha sucedido con la última conjetura de **Fermat** que ha dado lugar a numerosos resultados antes de ser demostrada por **Andrew Wiles** en 1994, 350 más tarde.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Números figurativos - Sucesiones de enteros -

¿Es cierto?



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 2 puzzles de 4 piezas

115

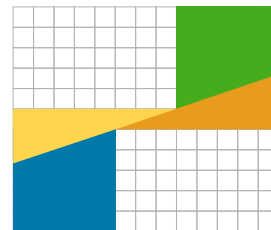
$$63 = 64 = 65$$

Con estas 4 piezas fabrique un cuadrado y luego un rectángulo.

- ¿Cuál es el área de cada uno?
- ¿Y el área de la superficie de partida?

Pregunta:

¿por qué intervienen los números de la sucesión de Fibonacci?



Hágalo usted mismo

MATERIAL: 1 modelo para reconstruir

116

¿Ilusión o Realidad?

¿Existen estos objetos? ¿Puede construirlos? La respuesta se encuentra en una frase del humorista francés Pierre Dac: «*¡Todo depende del punto de vista utilizado!*»



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel, lápiz

De Pitágoras a Wiles

• Compruebe que: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$ $7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$

• Encuentre otros cubos descomponibles en 3 cubos.

¿Qué retener?

Se sabía, mucho antes de **Pitágoras**, que existen números enteros verificando:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Encuentre una terna de tales números diferente de (0, 0, 0) y de (3, 4, 5). **Pierre de Fermat** enuncia en 1641 la **conjetura** de que un cubo de lado entero no podía descomponerse en 2 cubos de lados enteros, y en general, para $n \geq 3$, que la ecuación:

$$x^n + y^n = z^n$$

no tenía soluciones enteras aparte soluciones en 0 y 1..

Antes de ser demostrada 350 años más tarde por **Andrew Wiles**, fue objeto de nuevas conjeturas: ¿es cierta? ¿es indemostrable? ¿es irresoluble?

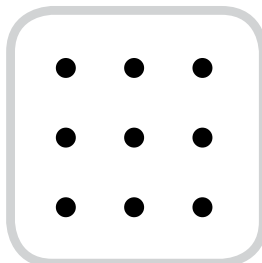
¿Es cierto?



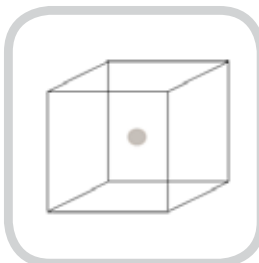
Hágalo usted mismo

MATERIAL: Papel, lápiz, 6 cerillas

Cambie el punto de vista



- Una estos 9 puntos por medio de 4 segmentos sin levantar el lápiz del papel.



- Se ha agujereado este cubo de caras transparentes. ¿Sobre que cara(s) puede estar?



- Haga un triángulo con 3 cerillas, 2 triángulos con 5 cerillas, ¡4 triángulos con 6 cerillas!!



- Encuentre la sucesión ...

¿Qué retener?

Utilizadas en tests psicológicos, estas cuestiones muestran que en matemáticas, como en la vida cotidiana, hay que saber ser "flexibles" y abordar los problemas desde todos los ángulos posibles!

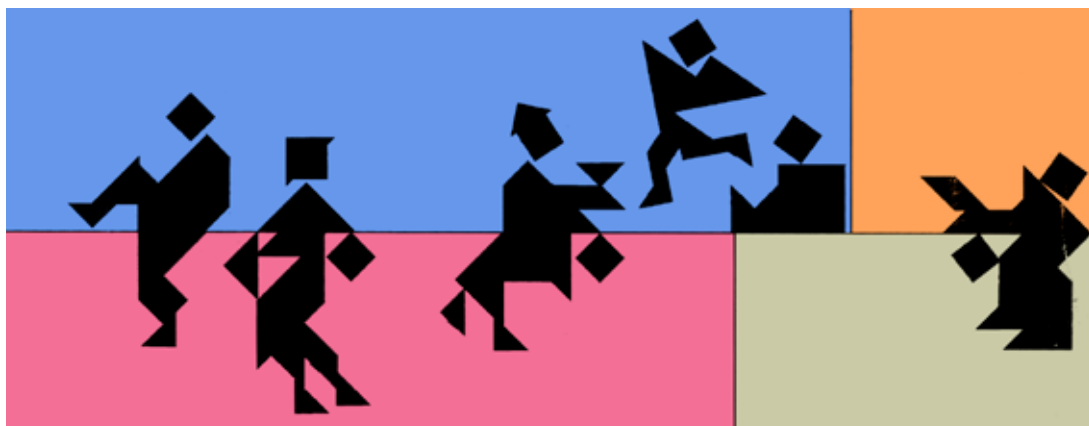
Aplicaciones de las matemáticas

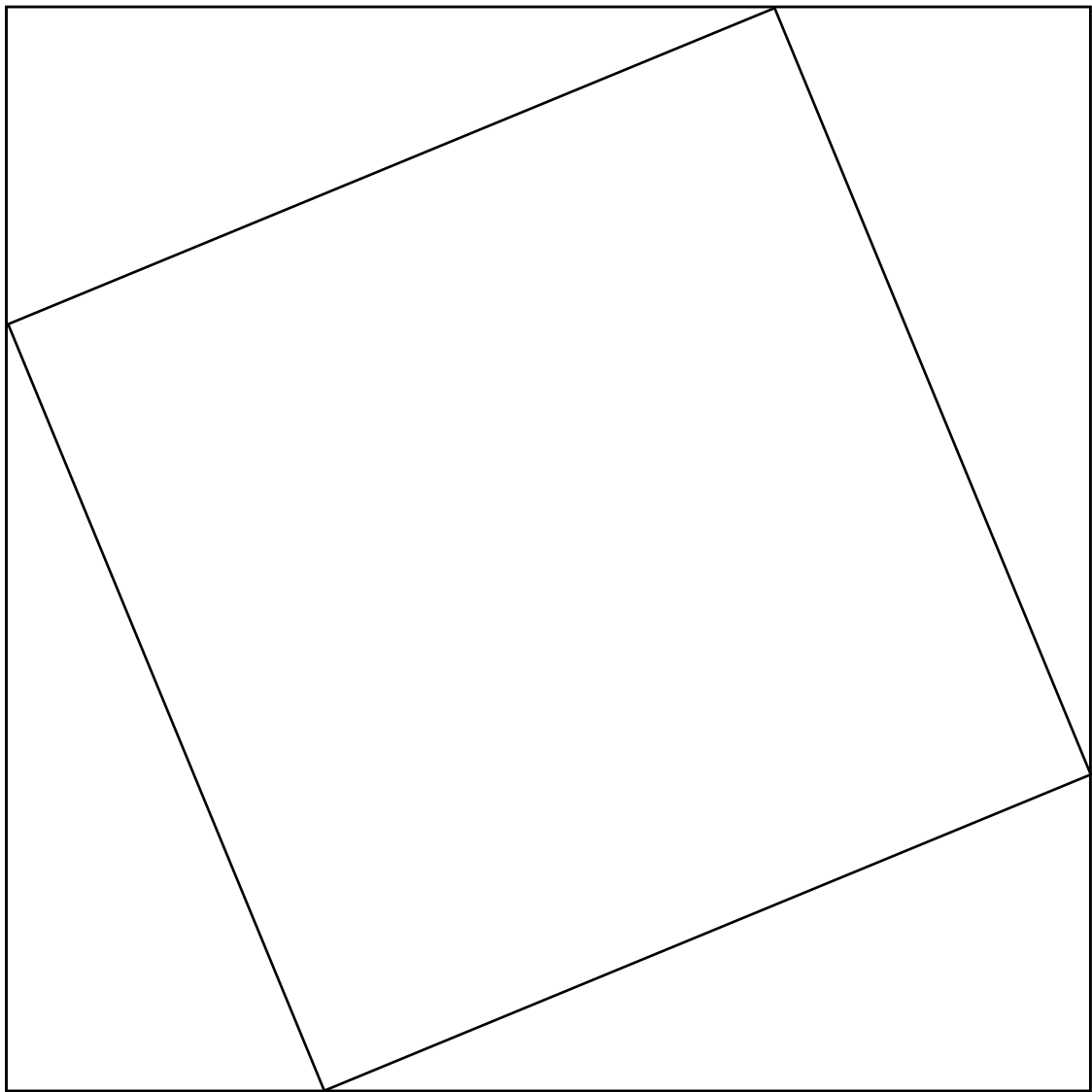
¿Podemos siempre probar una cosa de la que conocemos su veracidad?

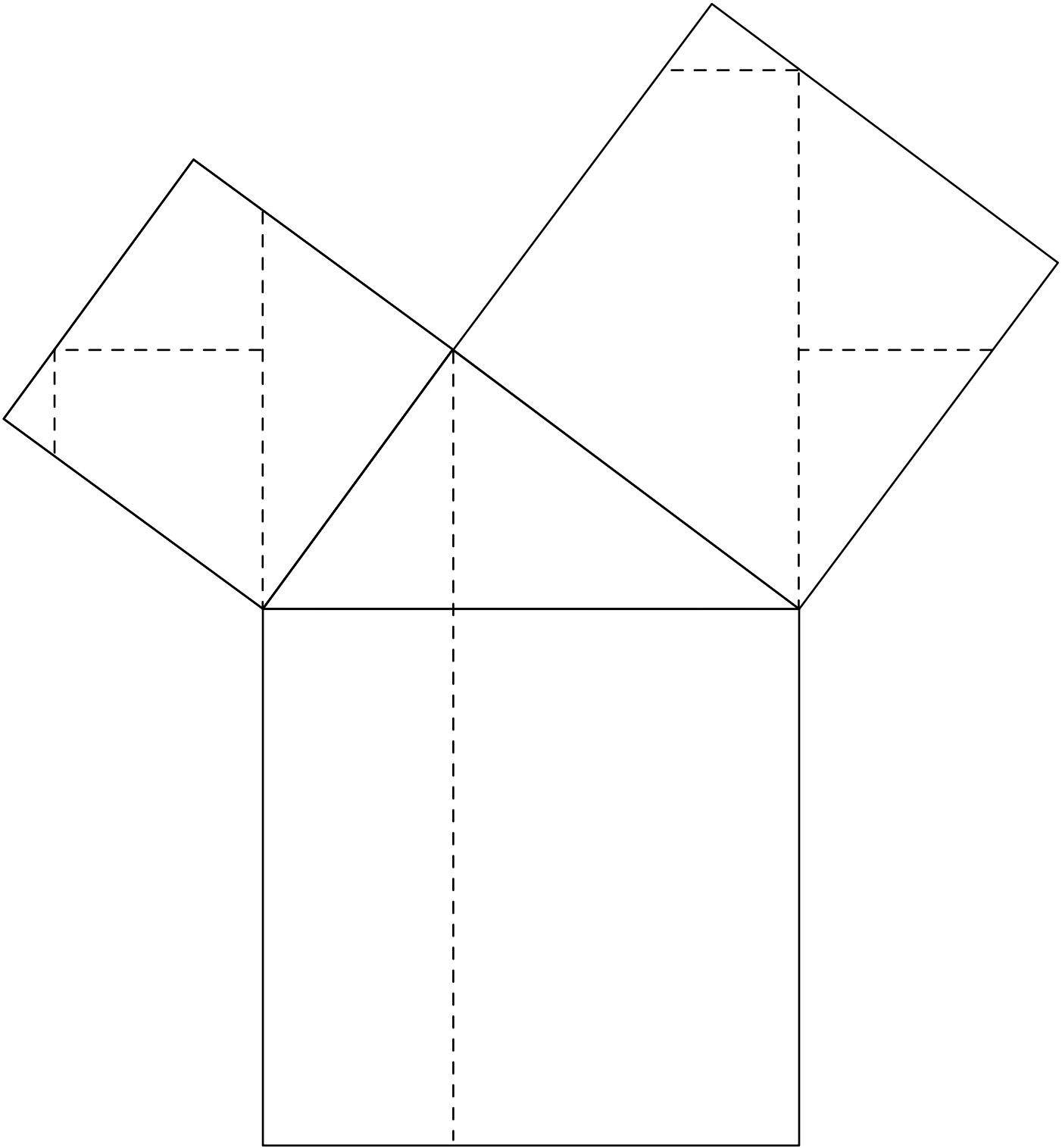
En 1931, **Kurt Gödel** dio una respuesta negativa a esta pregunta con su famoso teorema de "incompletitud". Gödel demostró que las nociones de verdad y de demostrabilidad no son coincidentes, probando - sobre un ejemplo aritmético - que una conjetura puede ser verdadera pero al mismo tiempo indemostrable. Desde entonces, tanto en matemáticas como en informática, los problemas considerados hasta hoy en día como irresolubles son el objeto de continuas investigaciones..

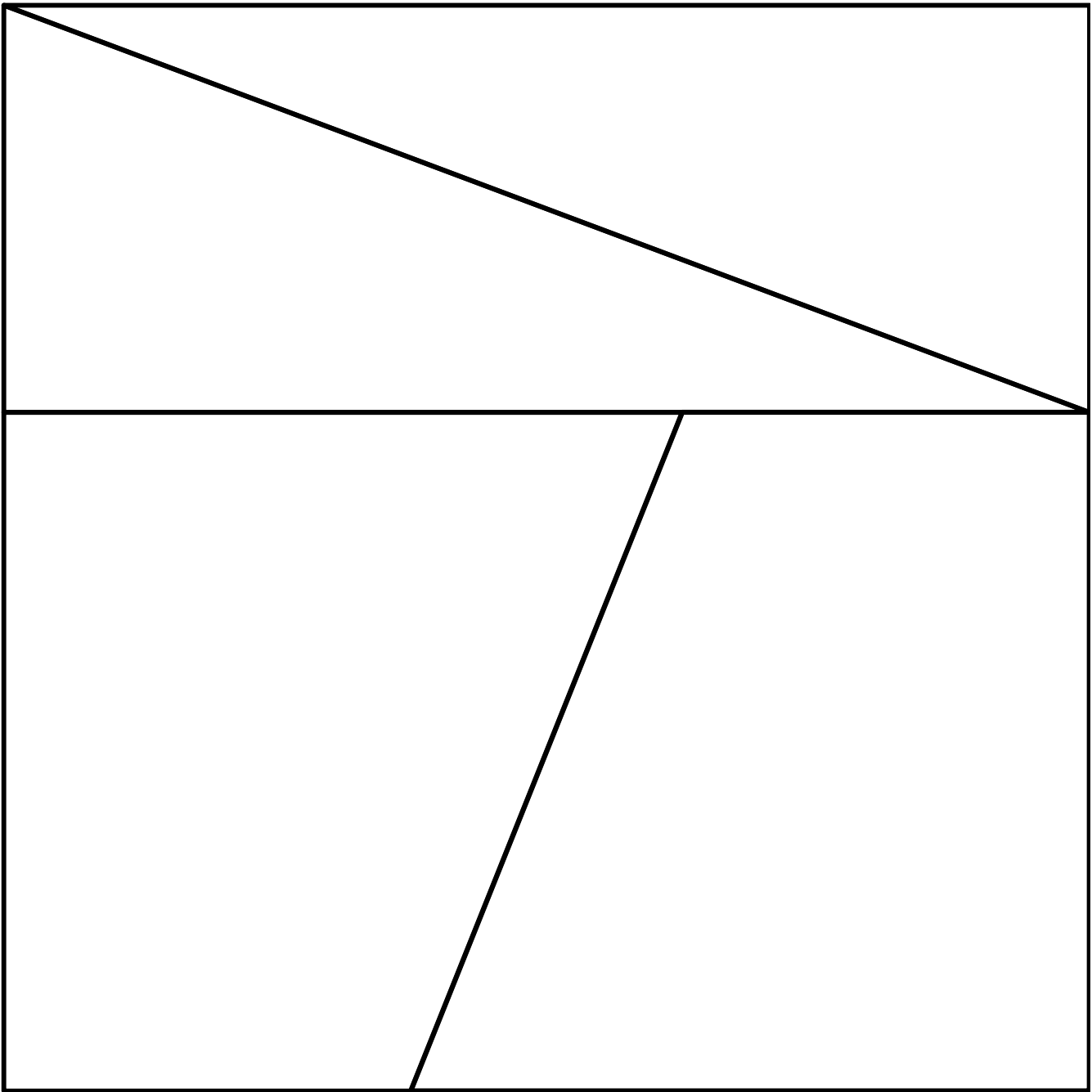
PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Irresoluble - Calculable - Gödel - Problemas P-NP



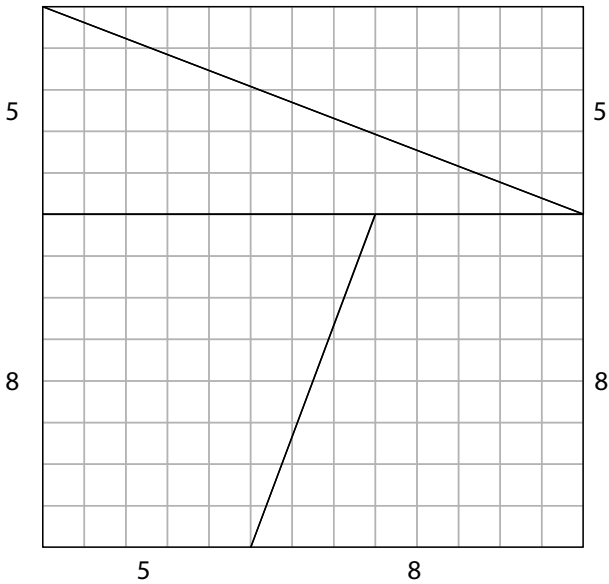
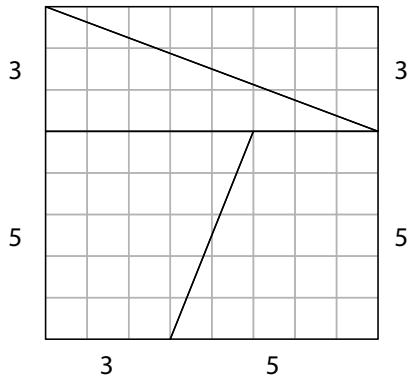


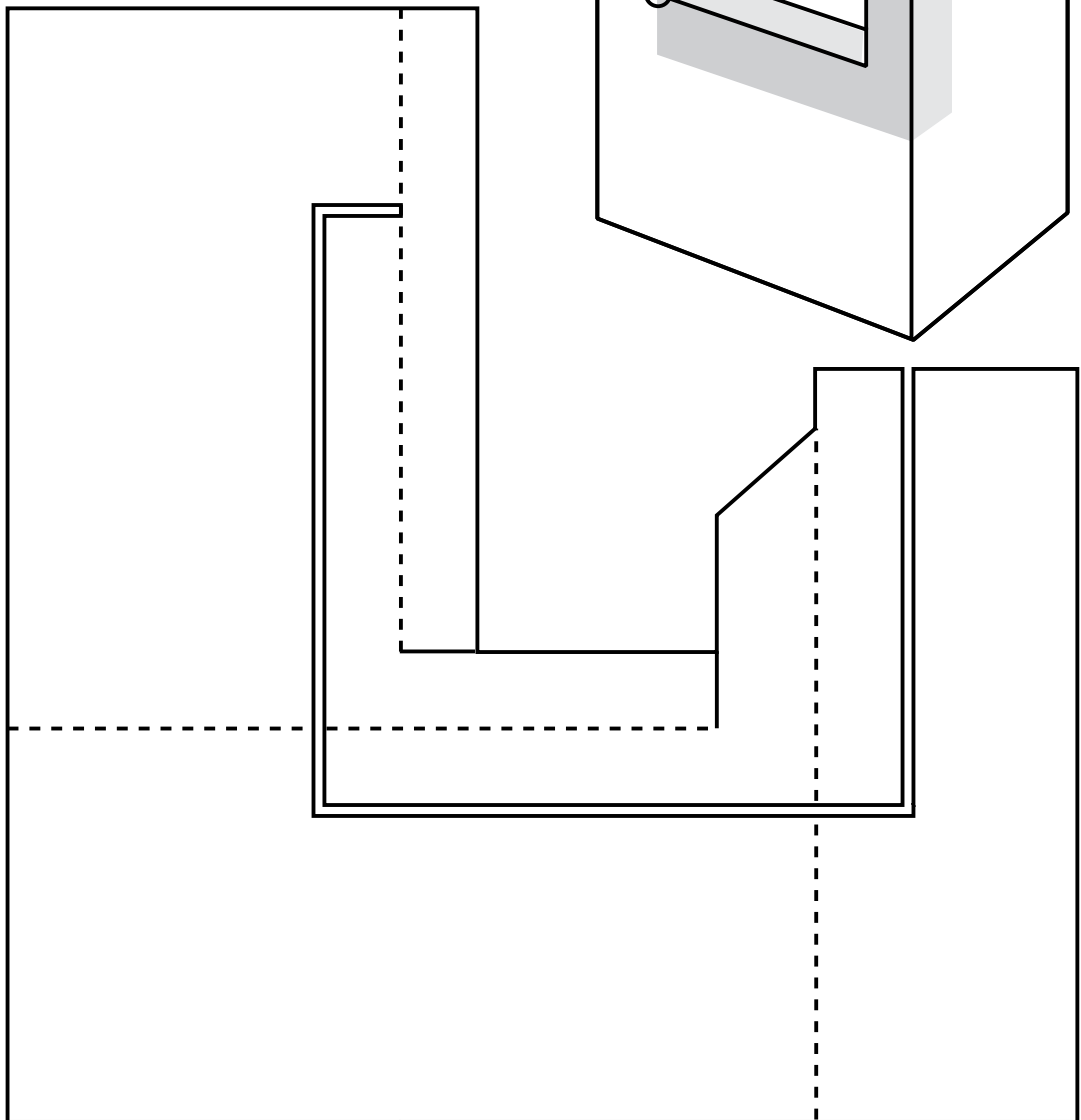
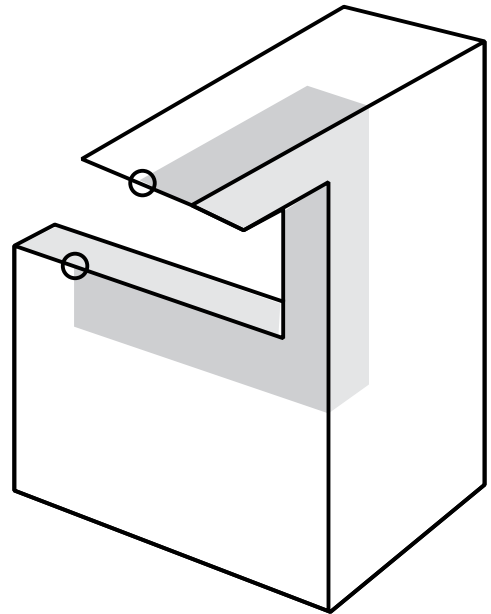




8

13





10. Concluir



Experimente



Formule hipótesis



¡Demuestre!





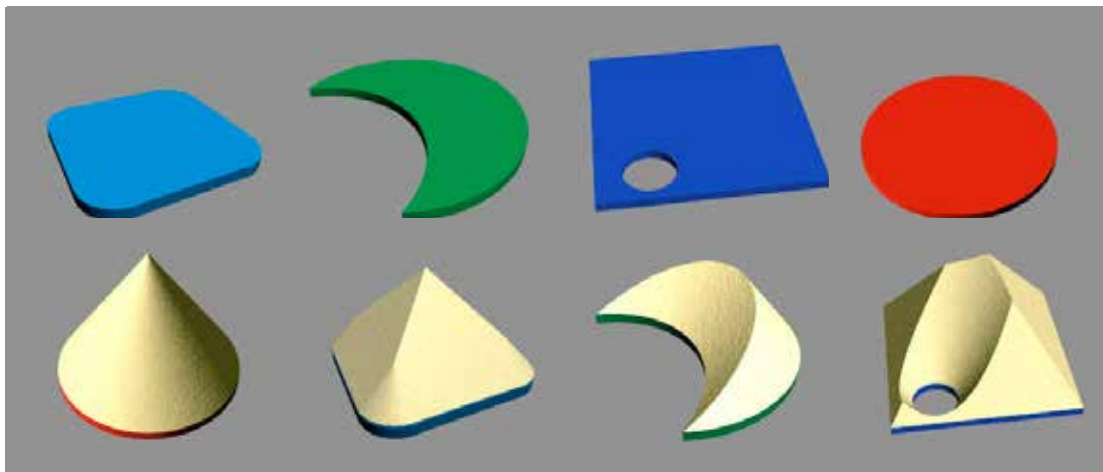
Hágalo usted mismo

MATERIAL: Polígonos de cartón, 1 cubo de arena seca y fina

La geometría de un montón de arena

Elija una placa. Vierta arena encima hasta que la desborde.

- ¿Cuándo obtiene una pirámide? ¿Un cono?
- ¿Dónde se sitúa el vértice?
- En los demás casos, ¿Cuál es la forma de las caras?
- ¿Cómo se sitúan las aristas? ¿Las aristas horizontales superiores?
- ¿Qué sucede cuando las placas tienen un agujero?



www.tasdesable.com

¿Qué retener?

A lo largo de este documento, les hemos propuesto una serie de situaciones donde a usted, y sobre todo a sus alumnos, se les invita a experimentar. Estas situaciones están extraídas de trabajos de matemáticos, de físicos, de docentes de matemáticas, de pedagogos y de especialistas en didáctica, a los que desde aquí les damos las gracias. También están extraídas de experimentos propuestos en la exposición «¿Por qué las matemáticas?» (en inglés «Experiencing mathematics!»). Todas pueden realizarse con materiales muy simples. Muchas pueden ampliarse con la ayuda de un ordenador.

Hágalo usted mismo

MATERIAL: Hojas de papel A4, dibujos de plegados

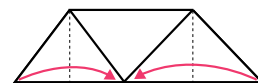
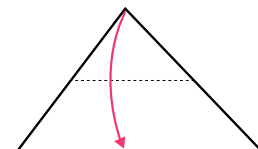
121 122 123

Plegados y Matemáticas

- ¿Cuáles son las dimensiones de una hoja de papel? ¿Su masa?
- Pliegue una hoja en dos. ¿Cuáles son las nuevas dimensiones?
- Compruebe que son proporcionales a las precedentes.
- Compruebe que $L_4/l_4 = L_5/l_5 = \dots = \sqrt{2}$
- ¿Es esto cierto para toda hoja de papel?
- ¿Por qué se dice que es un papel de 80g (ó 120, 150,... 250g)?
- Con estas hojas, ¿cómo conseguir mediante plegados un cuadrado, un triángulo equilátero...?
- ¿Son los mayores?

Por medio de plegados, compruebe que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180° .

- Compruebe que las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto.
- Haga lo mismo para las alturas, las mediatrices, ...
- ¿Cómo hacer un pentágono regular? ¿un hexágono?



Aplicaciones de las matemáticas

El método experimental es uno de los métodos usados por los científicos.

También puede ser el del matemático que, habiéndose planteado una – buena – pregunta, busque alguna respuesta. En algunos campos de las ciencias, en astronomía, en física de partículas, en biología por ejemplo, el método experimental puede ser imposible de llevar a cabo, por motivos prácticos, éticos,...

El método del docente de matemáticas: aprender a proponer situaciones experimentales donde cada alumno va a hacer suya una pregunta e intentar encontrarle respuestas.

El método del alumno de matemáticas: aprender a formular hipótesis, a testarlas y a demostrar que son ciertas... o falsas.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:



¿Qué retener?

Pequeñas cuestiones, grandes problemas

Las matemáticas siempre han ofrecido enunciados de problemas divertidos o asombrosos. Entre todos estos problemas recreativos, algunos proponen buenas preguntas, es decir, cuestiones cuya búsqueda de respuestas, e incluso las propias soluciones, permiten poner en evidencia un hecho matemático o científico, o un procedimiento de razonamiento importante. Una buena pregunta puede ser también una cuestión que permite poner a descubierto los **modelos implícitos** de los alumnos y hacerles comprender su aspecto no operacional. Es lo que proponen aquí estas cuestiones: conservación de las cantidades para el agua y el vino, topología para la banda, modelización para el café, muestreo para el arroz, lógica para los bastones,...

Para ir más lejos

Pequeñas cuestiones, ¿grandes problemas?



¡Agua dentro del vino!

Dos vasos contienen el mismo volumen, uno de agua, el otro de vino (o de café...). Tome una cucharada de agua, viértala en el vino y mezcle. Tome una cucharada de esta mezcla, viértala en el agua.

- ¿Hay más agua en el vino que vino en el agua?
- ¿Cómo demostrar su hipótesis?



La banda de Möbius

Fabrique una pulsera con una tira de papel. Con dos cortes de tijera, puede obtener 3 pulseras. Fabrique una pulsera de "Möbius" dando una semi-vuelta a la tira de papel.

- ¿Cuántos cortes de tijera son necesarios para obtener 3?



Nudos primos

Fabrique todos estos nudos.

- ¿Cuántos cruces tienen como mínimo?
- Intente encontrar los primeros nudos con 3, 4... cruces.



¿Un kilo de café?

1 kg de canicas de un cm de diámetro.

1 kg de canicas de un mm de diámetro.

- ¿Cuál es el que ocupa el menor volumen?
- Y ¿si se reemplazan las canicas por 1 kg de café?



¡Un kilo de arroz!

• ¿Cuántos granos hay en este kilo de arroz?

- Encuentre al menos 2 métodos para responder a esta cuestión.



¡Una hora!

2 bastones (o 2 cuerdas), que aunque sean diferentes, arden cada uno en una hora.

- ¿Cómo medir 1/4h? ¿1/2h? ¿3/4h?
- Encuentre al menos un método.



Aplicaciones de las matemáticas

*Saber, ¿consiste sólo en ser consciente de tu ignorancia?
(en Menón – Platón)*

En matemáticas, los alumnos, sobre todo en secundaria – pero también después – muestran muy poca habilidad para **debatir** y convencer con argumentos matemáticos y lógicos. Para ello deben aprender a expresar los diferentes puntos de su argumentación, a explicar las relaciones lógicas que conducen a sus conclusiones.

Saber demostrar, es aprender a discutir enunciando argumentos matemáticamente, científicamente verdaderos. Saber demostrar, es también saber lo que es una prueba, apropiársela y reutilizarla.

PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

Debatir - Método - Lógica - Aristóteles - Platón - Descartes

¡Demuestre!



Hágalo usted mismo

MATERIAL: Cartones para recortar, flip-books para realizar

124

125

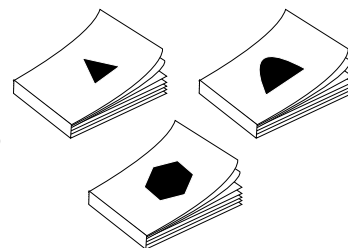
126

Flatland: un mundo plano

¿Quién soy?

Con cada familia de dibujos, realice un libro animado (flip-book). Cada flip-book muestra las trazas dejadas por un objeto que atraviesa una pantalla plana.

- Para cada flip-book, ¿Cuál puede ser este objeto?

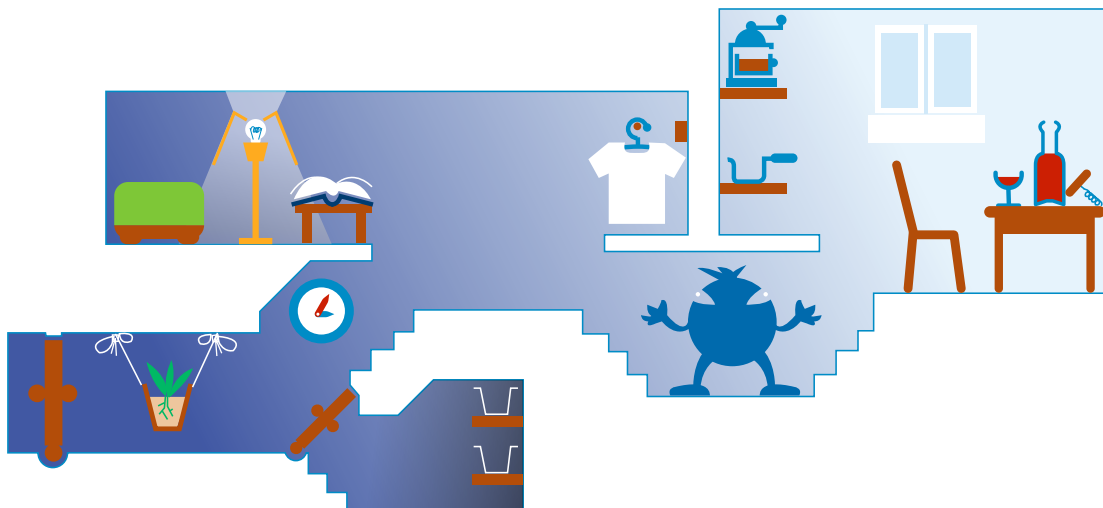


Para ir más lejos

La vida en Flatland

Este dibujo representa la casa de un habitante de un planeta imaginario que tendría sólo dos dimensiones, idónde todo sería plano!

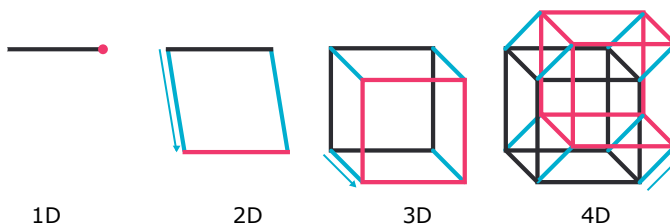
- Intente encontrar los 7 errores.
- Imagine otros objetos que podrían



¿Qué retener?

Proponer a los alumnos un método experimental en matemáticas no consiste únicamente en hacerles manipular objetos geométricos, números, letras. Estos experimentos deben permitirles apropiarse de la situación (es la **fase de experimentación**), expresar oralmente o por escrito hipótesis (**fase de formulación**) y finalmente ratificar estas hipótesis (**fase de validación**). En este acercamiento experimental, quedará una última fase para el docente: **poner en relieve los conocimientos matemáticos adquiridos por los alumnos**, logros adquiridos en contenidos o en razonamientos.

Hacia la 4a dimensión



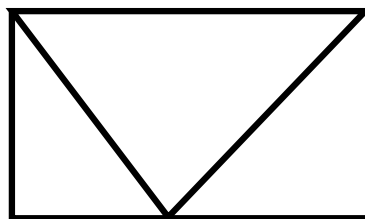
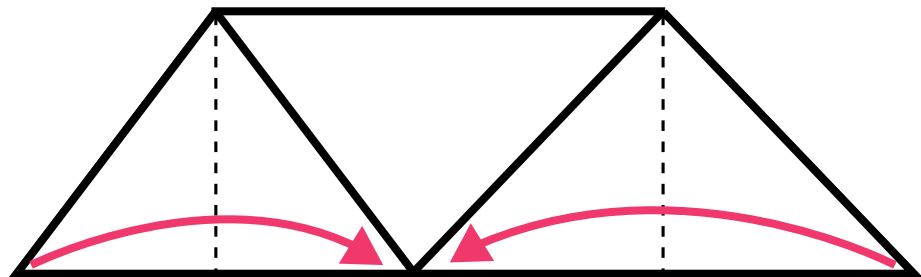
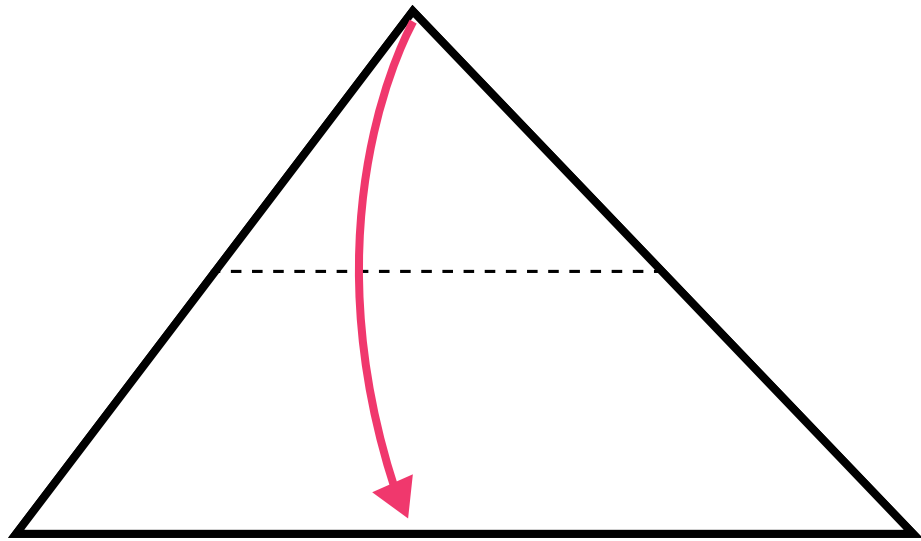
Aplicaciones de las matemáticas

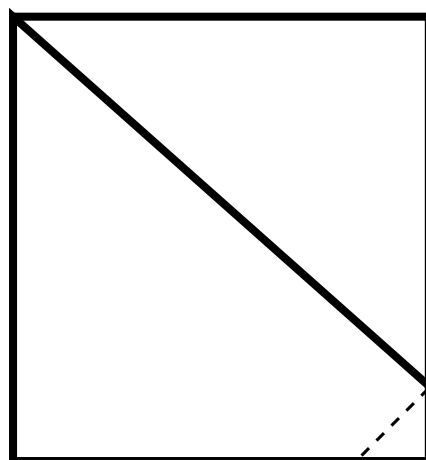
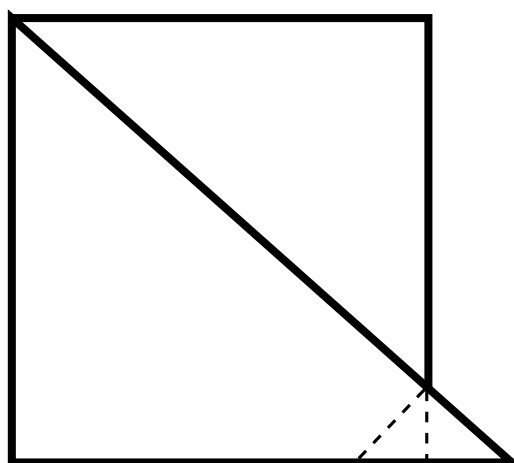
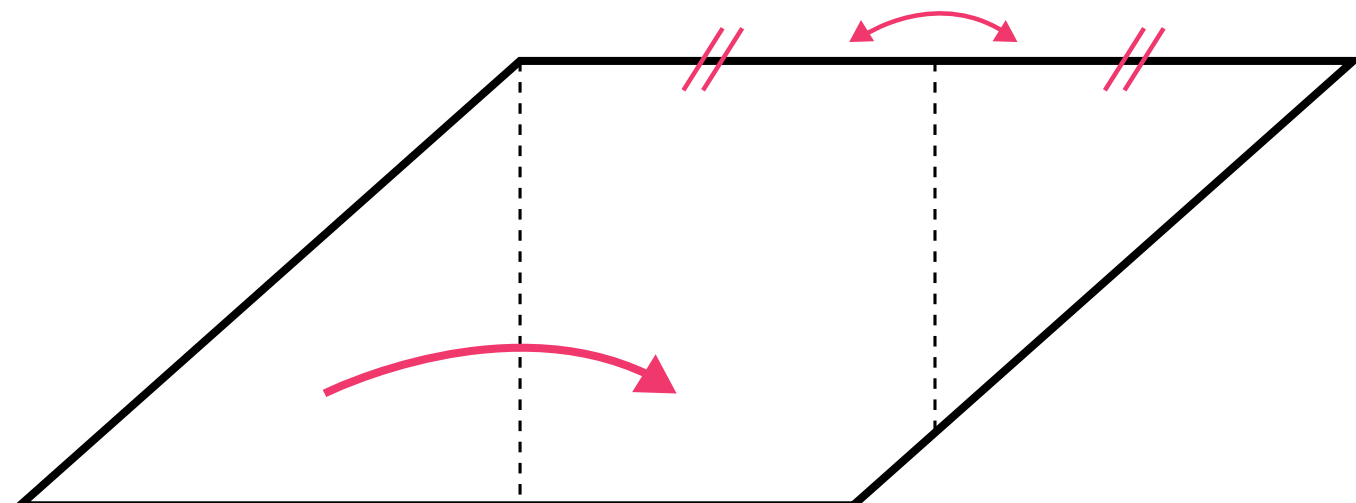
Como el matemático, como el físico y todo científico, el docente de matemáticas debe aprender a demostrar y sobre todo a enseñar a los alumnos a demostrar, enseñarles a discutir y a proporcionar para ello argumentos basados en herramientas matemáticas: los hechos matemáticos y la lógica matemática.

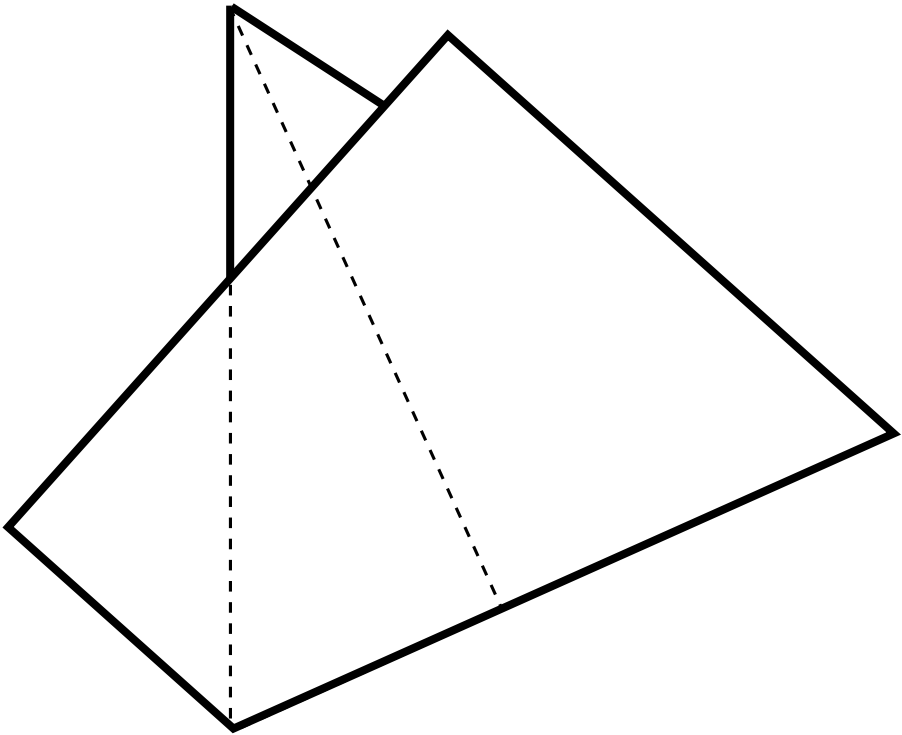
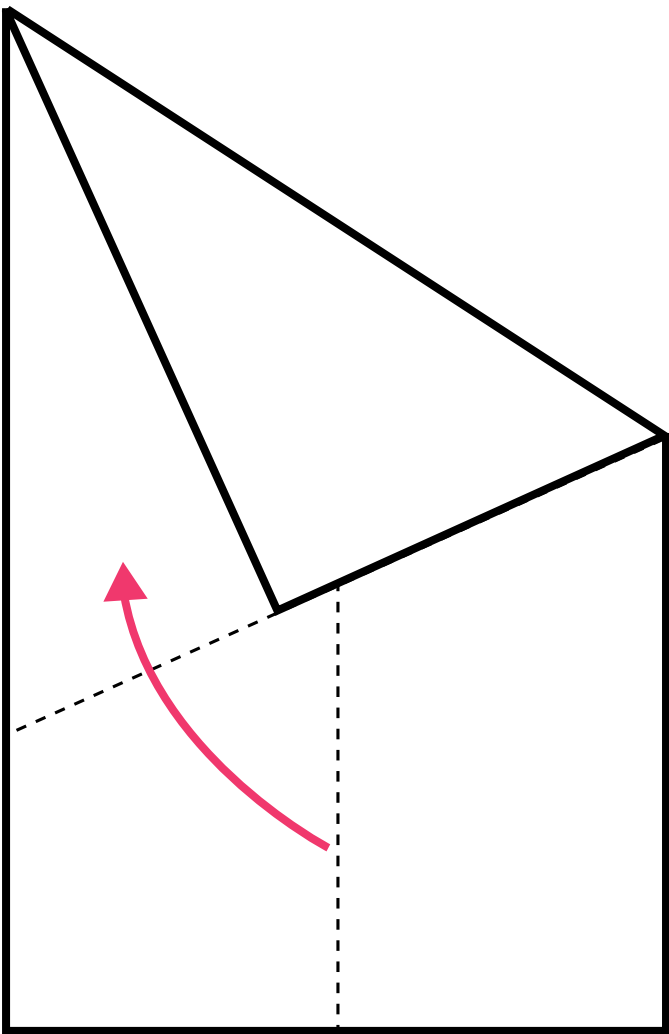
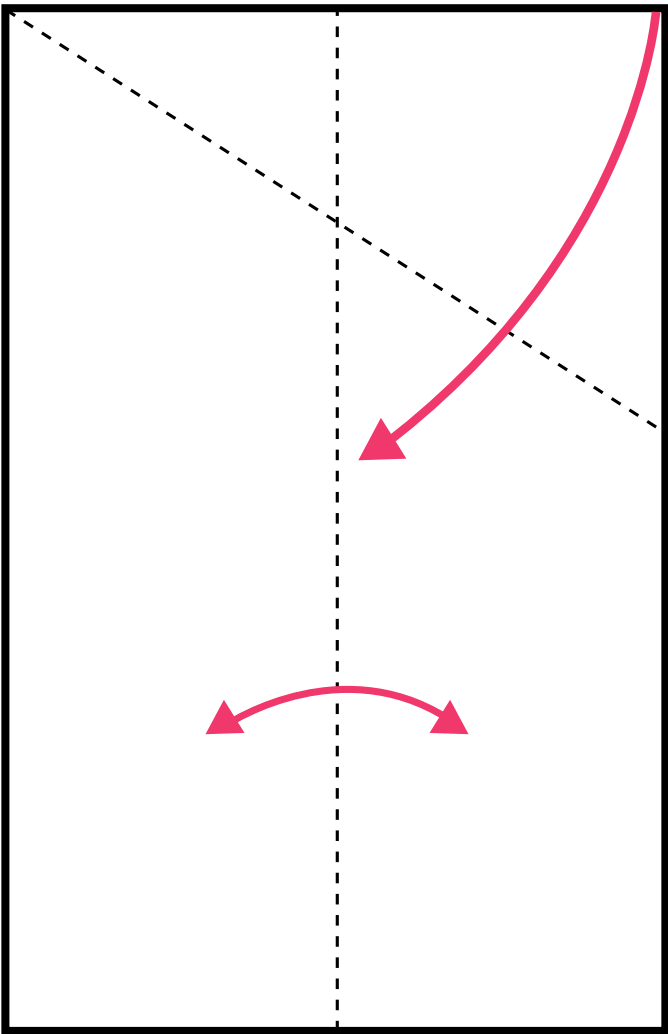
Aprender a demostrar que una solución existe o no existe, que un enunciado es verdadero o falso o – más difícil – que no es posible probarlo, en todo caso con los conocimientos del alumno en ese momento.

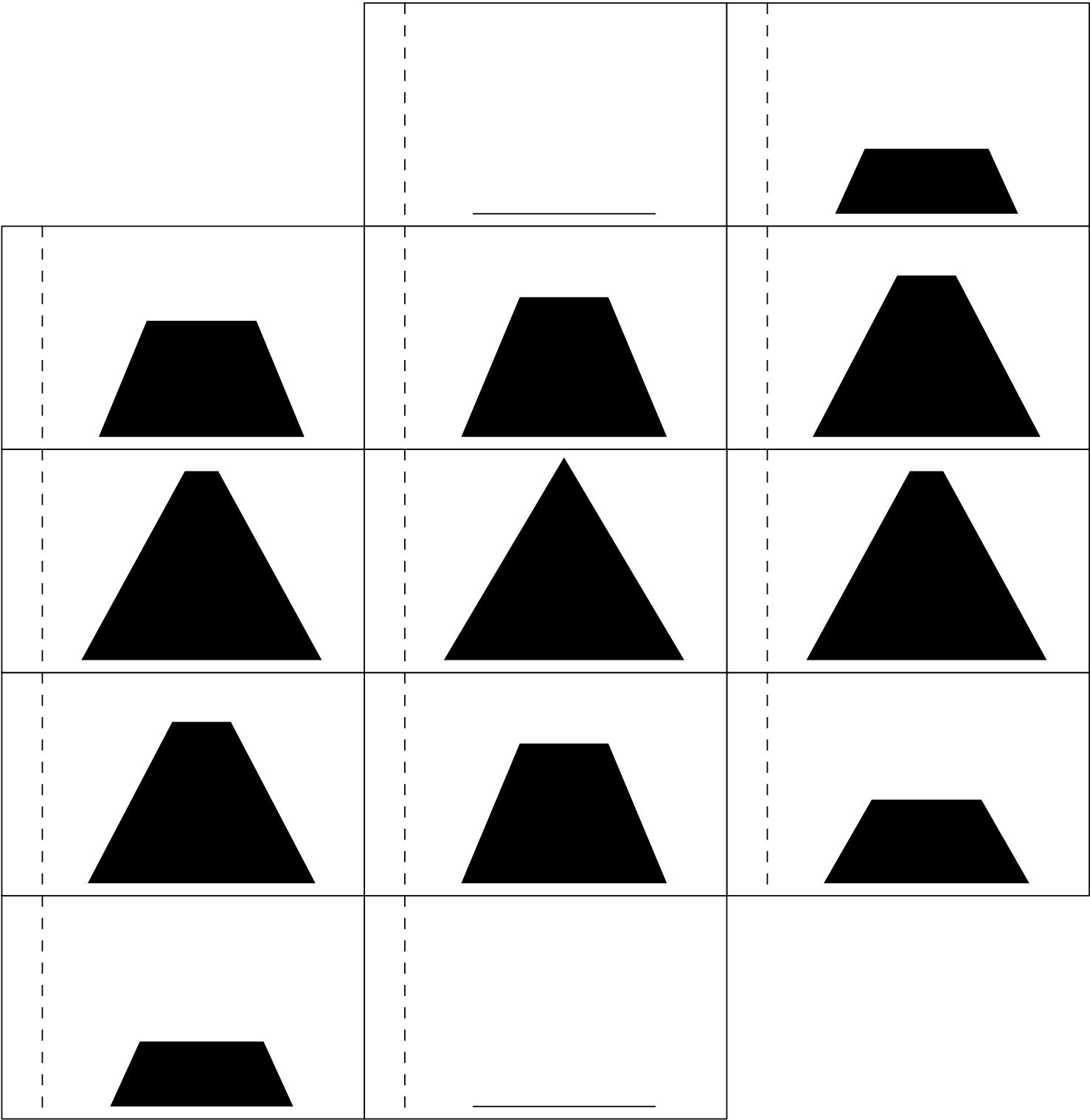
PARABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB:

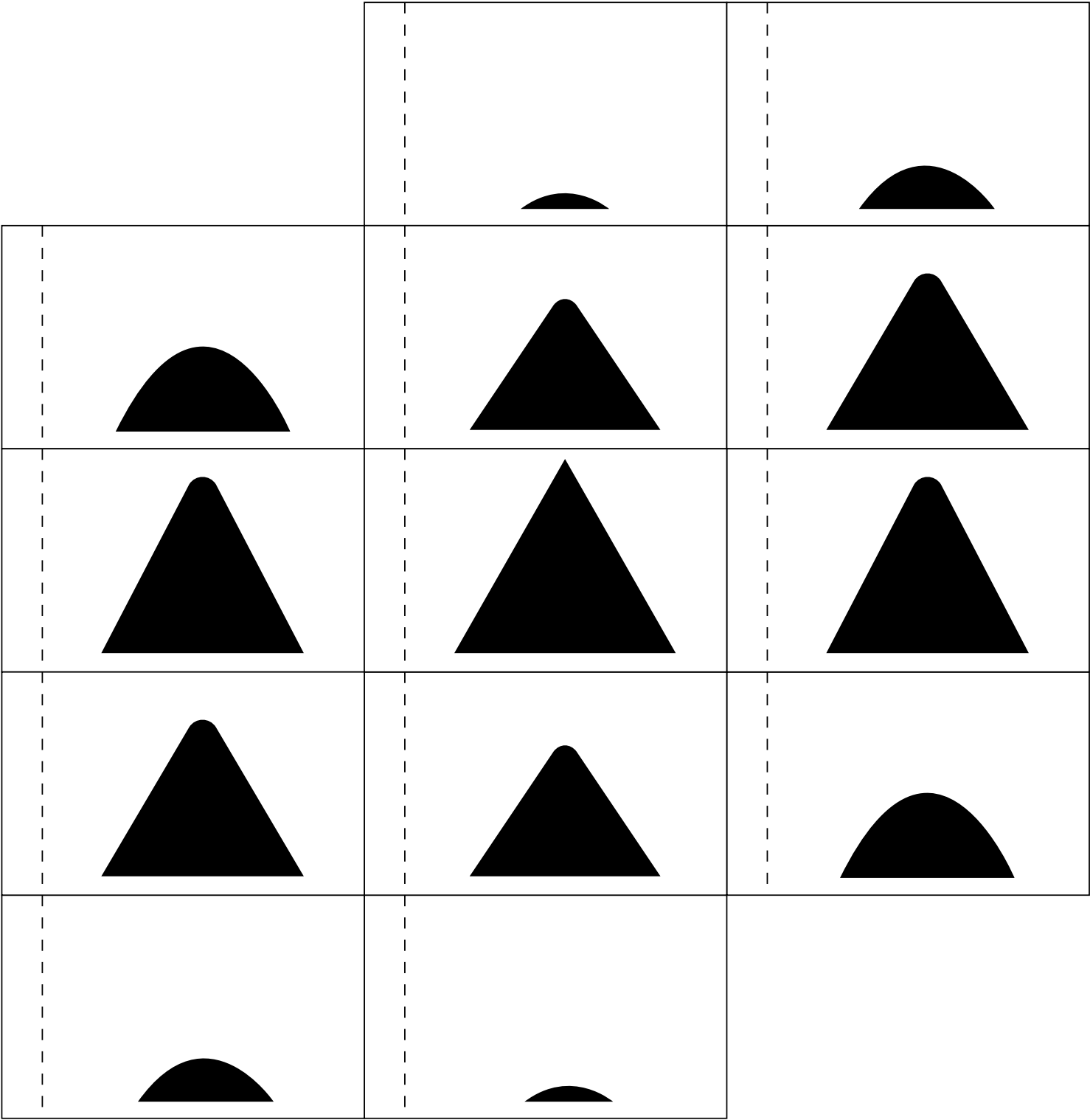
Matemáticas - Profesor de matemáticas - Matemático

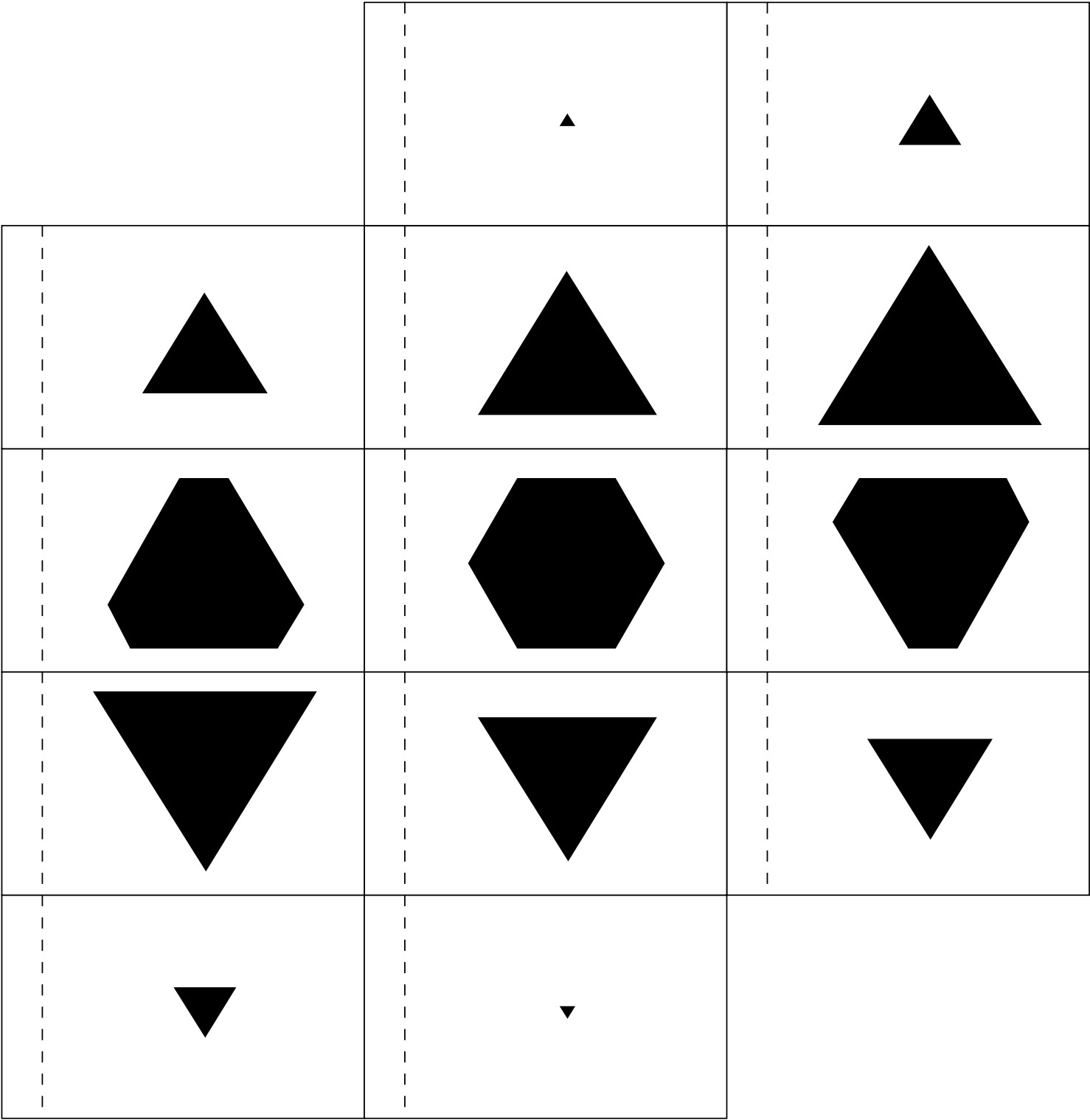


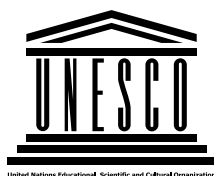












sotodesign.org

Esta exposición virtual ha sido concebida y realizada por iniciativa de Alexandros K. Makarigakis (UNESCO – Windhoeck), por Michel Darche, Centre•Sciences y el Adecum.

Ha contado con las observaciones, críticas y contribuciones de todos los que han participado en ella directamente:

Sophie Auger-Léger (Orleans), Jean Brette (París), Marie Laure Darche-Giorgi (Orleans), Bento Louro (Lisboa), Marta Macho-Stadler (Bilbao), Boubaker-Khaled Sadallah (Argel), Benoît Matrion (Orleans), Antony Templier (Orleans) pero también de los trabajos en didáctica y en divulgación de científica de Guy Brousseau (Bordeaux), Etienne Guyon (Paris), Claude Janvier (Montréal), Richard Pallascio (Montréal), Antonio Pérez Sans (Madrid), André Rouchier (Bordeaux), Gérard Vergnaud (Paris), a los que desde aquí se envía un sincero agradecimiento.

Ha sido concebida a partir de la exposición interactiva

« ¿Por qué las matemáticas? » **realizada bajo la dirección científica de** Minella Alarcon, responsable de Ciencias Básicas en la UNESCO y Mireille Chaleyat-Maurel, vicepresidenta del Comité RPAMaths de la EMS.

Con la colaboración de:

Jin Akiyama, Universidad de Tokai, Japón
Michèle Artigue, Presidenta del ICMI
Jean Brette, Palais de la Découverte, París
Michel Darche, Centre•Sciences, Orleans
Mari-Jo Ruiz, Ateneo de la Universidad de Manila, Filipinas
Gérard Tronel, Año Mundial de las Matemáticas, París

Concepción y coordinación: Michel Darche – Adecum & Centre•Sciences

Programación y desarrollo interactivos:

Antony Templier – www.sotodesign.org (Orléans)

Grafismo: Benoît Matrion – www.tvwar.org (Orléans)

Traducciones: En: Sophie Auger-Léger (Orléans) - Sp: Marta Macho-Stadler – Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea - Bilbao

Pt: Bento Louro – Universidade Nova de Lisboa

Ct: A. Gasull y G. Guasp – Universitat Autònoma de Barcelona

Ar: Boubaker-Khaled Sadallah - Ecole Normale Supérieure - Kouba-Argel

© Créditos fotográficos e ilustraciones

• centre sciences • adecum • 99.9 sarcone • wikipedia • Dbenbenn GNU • nasa • antony templier • benoit matrion • **Fotolia.com** : • Remo Liechi • Sandra Carmona • Federico Romano • goce risteski • Julien Eichinger • Udo Kroener • Isabelle Barthe • arnowssr • photo-dave • Denis Pepin • Eric Isselée • VisualField • philippe Devanne • Creativeve99 • Roman Sakhno • Vieloryb • Rich Johnson • Andrzej Tokarski • Marko Plevnjak • Alexey Klementiev • Olga Shelego • Allein • Christophe Villedieu • Jose Gil • FranckBoston • chouchashoot • Marvin Gerste • Tjall • Guillermo lobo • Elena Elisseeva • Forgiss • Francois Doissel • Mariano Ruiz • Zoran Karapancev • LVI • claudio • Tad Denson • Alx • tdoes • piccaya • Monika Lassaud • Paco Ayala • Emilia Kun • Peterfactors • thierry burot • martine wagner • Philip Lange • Sascha Burkard • Terry Morris • Detlef Gwinner • Kenneth Groms • Paul Bodea • Guy Pracros • Eric Gevaert • Emin Ozkan • imagine • Khayel • Michael Drager • Gabriel Moisa • Tatiana • sébastien lagrée • Caroline Duhamel • sam richter • Pawel Bielecki • Alexandre Quillet • Stanisa Martinovic • Yurok Aleksandrovich • Martina Misar • Steven Pepple • Edouard Hardy • Danielle Bonardelle • Mauro Rodrigues • sébastien russier • Orlando Florin Rosu • Francois Doissel • Leonid Karchevsky • Rob Byron • Natalia Pavlova • mrkeenano • danimages • Gérard.Kremmer • Petr Gnuskin • Udo Kroener • trialart.info • Joel Bramley • Steve Thompson • Stephen Sweet • shocky • Nikontofeur • Eric Isselée • auris • David G • Jordi Soro • Jason Stitt • Indigo • milosluz • AndreasG • Bruce Shippee • Zimon • jimmythecure • claudio calcagno • Stephen Coburn • cmapuk_Online • Martine Lefebvre • ordus

Contacto: Centre.Sciences@wanadoo.fr

Matemáticas

EXPERIMENTALES
experimentales

Unesco – Centre•Sciences – Adecum – www.experiencingmaths.org