United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization

Matemáticas experimentais

Centre Sciences
CCSTI de la région Centre

ADECUM

Matemáticas EXPERIMENTAIS experimentais

Esta exposição virtual dirige-se aos professores de matemática, aos seus alunos – prioritariamente aos do secundário - e a todos os que têm curiosidade pela matemática e pela ciência em geral.

Esta exposição virtual apresenta **mais de 200 situações matemáticas** que propõem aos alunos experimentar, tactear, colocar hipóteses, testá-las, tentar validá-las, procurar demonstrar e debater acerca de propriedades matemáticas.

Como a exposição internacional itinerante «**Experimentar a Matemática!**», foi concebida e realizada, por iniciativa e com o concurso da UNESCO, pelo Centre•Sciences e pelo Adecum.

Como a exposição «**Experimentar a Matemática!**», propõe "**experiências de canto de mesa**" fáceis de realizar com material muito simples: a cabeça e as mãos, papel e lápis, pedaços de cartão, de madeira ou de acrílico, arame e pregos... Com sua abordagem numérica, propõe também "**experiências de canto de ecrã**" onde se pode experimentar com um clique.

Para cada tema, encontrará:

- uma introdução interactiva,
- experiências para mandar fazer aos alunos,
- algumas explicações e referências históricas,
- algumas situações onde a matemática é utilizada,
- uma referência de palavras chave para a Internet,
- um ficheiro pdf para imprimir com algumas ajudas.

Dirigindo-se aos professores dos países do sul, esta exposição, ainda que virtual, não pretende de modo nenhum acentuar a **fractura digital**. É esta a razão pela qual propõe a todos os que não têm ligação à Internet nem computador, imprimir ou mandar imprimir estas páginas ecrã – a preto e branco ou a cores - a partir de **páginas pdf** preparadas para este efeito.

* Centre•Sciences: Centre de culture scientifique, technique de la région Centre – Orléans.
* Adecum : Association pour le développement de la culture mathématiques – Orléans.

SUMÁRIO

1.Ler a Natureza

1. Ler a Natureza

Espirais na Natureza

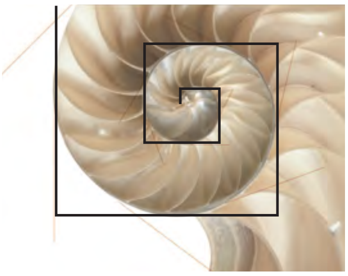
Faça você mesmo

MATERIAL: 1 caneta de feltro, 1 ananás, 1 morango, 1 pinha, 1 flor de girassol, 1 figo ou folha de figueira-da-índia,1 náutilo…

Quantas espirais há em cada sentido?

1, 1, 2, 3, 5, 8…

- Encontre os elementos seguintes da sucessão.
- Observe um destes objectos.
- As espirais aparecem, num sentido e no outro. Conte-as.
- Descubra outros frutos, outras flores, outras folhas... que têm a mesma propriedade.



Que reter?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., 233, ...

As sementes de certos frutos, as pétalas de certas flores, as folhas de certas árvores, repartem-se sempre de acordo com a mesma sucessão de números: cada número da sucessão é a soma dos dois anteriores.

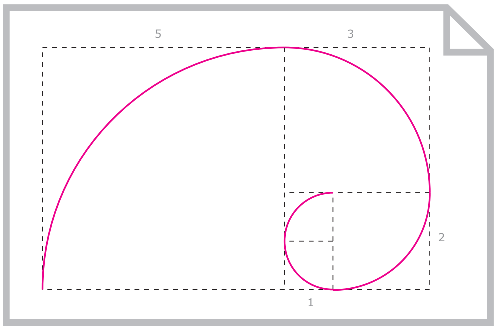
Deste modo, na pinha, no ananás, na flor de girassol..., os números de espirais em cada sentido são termos consecutivos desta sucessão chamada sucessão de **Fibonacci**.

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 caneta de feltro, 1 folha de papel, 1 régua,1 compasso, 1 lápis, 1 tesoura

Desenhe uma espiral de ouro

- Pegue numa folha de papel quadriculado
- Desenhe os quadrados de lado 1, 1, 2, 3, 5, 8 ... como indicado na figura.
- Trace um quarto de circunferência em cada quadrado.
- Recorte os quadrados e coloque-os em espiral, como indicado na figura.



Para ir mais longe

Sucessão de Fibonacci :

é uma sucessão de números inteiros em que cada termo é igual à soma dos dois precedentes. Esta sucessão foi descoberta por um italiano, Leonardo de Pisa, cognominado Fibonacci, há 8 séculos.

Denotemos $\mathbf{F_n}$ o termo de ordem **n** desta sucessão. Ela tem numerosas propriedades.

F_{n+1}/F_n tende para um limite: $(1 + \sqrt{5})/2$

que é o número de ouro,

F_n e F_{n+1} são primos entre si e a soma dos seus quadrados

é dada pela sucessão:

$$(F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2n+1}$$

Onde se emprega a matemática

Desde **Fibonacci**, muitos se interessaram por estas propriedades das plantas. Recentemente os investigadores franceses, **Stéphane Douady** e **Yves Couder**, mostraram experimentalmente que o crescimento destas plantas corresponde a propriedades dos sistemas dinâmicos da Física. O estudo da forma e das propriedades físicas das plantas chama-se filotaxia, que interessa aos botânicos e aos biólogos..

PÁGINAS WEB:
http://www.lps.ens.fr/~douady/
http://maven.smith.edu/~phyllo/

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Fibonacci - Sucessões - Filotaxia - Número de ouro - Espiral de ouro

1. Ler a Natureza

O mundo fractal

Faça você mesmo

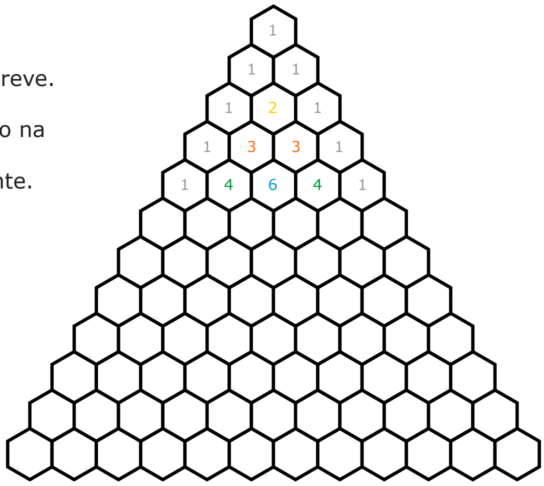
MATERIAL: 1 grelha quadrada ou hexagonal, 4 ou 5 lápis ou feltros de cor

10 11

Triângulo de Pascal a cores

- Complete a grelha seguindo a regra que se descreve.
- Escolha 3 cores associadas a 0, 1 e 2.
- Em cada casa, substitua o número pelo seu resto na divisão euclidiana por 3.
- A seguir pinte esta casa com a cor correspondente.

Observe a figura obtida.
Que propriedades tem?
Recomece escolhendo outro número entre 2 e 7.

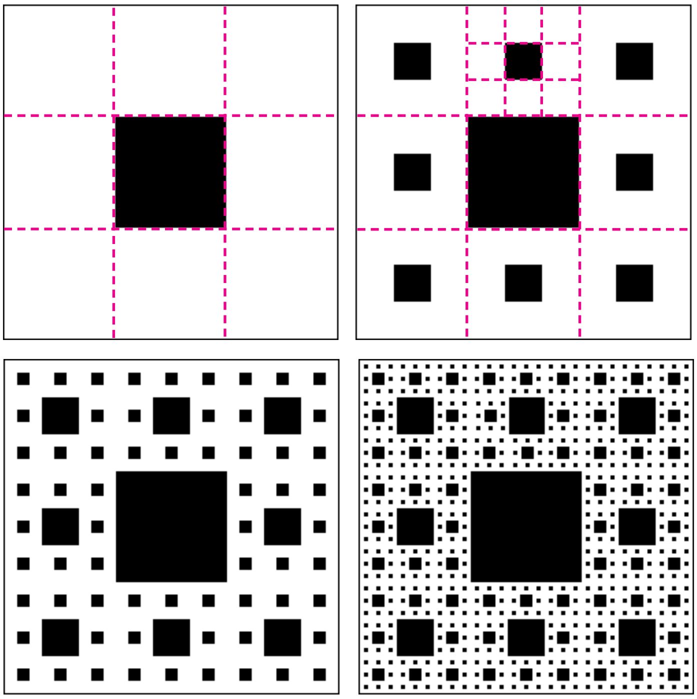


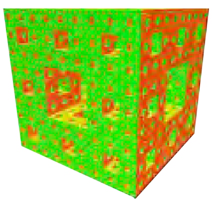
Faça você mesmo

MATERIAL: 1 folha de papel, 1 lápis, 1 régua

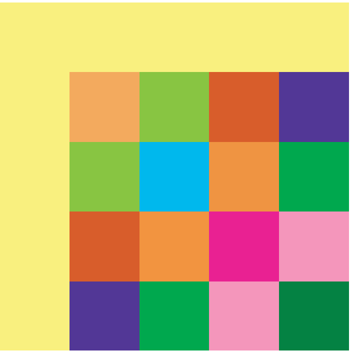
Sucessões de figuras e sucessões de números

- Parta de um quadrado desenhado sobre uma grande folha de papel.
- Corte-o em 3 e escureça algumas das partes
- Recomece o procedimento nas partes brancas restantes ...





Fractais a 3 dimensões :
construa, do mesmo modo que anteriormente, um cubo fractal.



Que reter?

O triângulo de Pascal módulo 2
O triângulo de números chama-se Triângulo de Pascal. Em cada linha horizontal, os números que aí figuram são os coeficientes que aparecem numa fórmula célebre, o binómio de Newton : **$(a + b)^n$**.
Estes números têm um papel importante em diversos ramos da Matemática (álgebra, probabilidades...).
Substituindo estes números pelo seu resto na divisão por **2**, vê-se aparecer uma imagem que se reproduz a escalas cada vez maiores. Esta imagem é um objecto fractal, também chamado "**tapete de Sierpinski**".
A regularidade da coloração permite evidenciar facilmente todos os erros de cálculo.
Esta técnica encontra-se nos códigos correctores de erros.

O mundo fractal

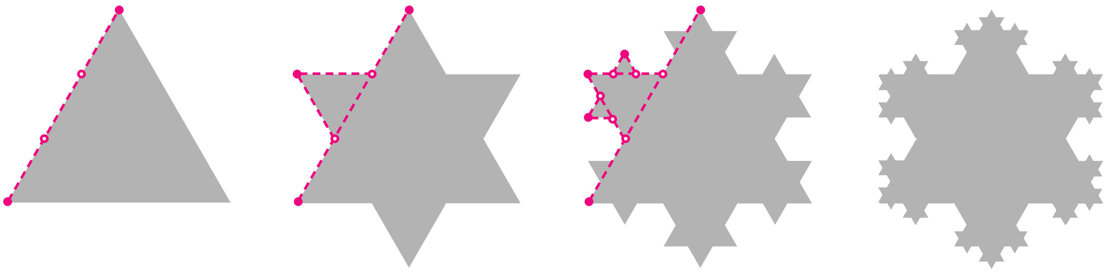
Faça você mesmo

MATERIAL: 1 folha de papel, 1 lápis, 1 régua

Desenhe outras sucessões de figuras fractais

- Trace um triângulo equilátero,
- Corte cada lado em 3 segmentos iguais,
- Substitua o segmento do meio por dois outros com o mesmo comprimento,
- A seguir, recomece em cada novo segmento obtido.
- • •

Outra actividade à volta destas figuras fractais :
em cada etapa, calcule o perímetro e a área da superfície e, de seguida, os respectivos limites.



E na natureza?

Onde se emprega a matemática

Os objectos fractais aparecem ou são utilizados em numerosos domínios: meteorologia, economia, compressão de imagens, medicina e mesmo arte... fractal.

PÁGINAS WEB:
http://commons.wikimedia.org/wiki/Fractal

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB :
Fractal - Sucessões de figuras - Dimensão fractal - Mendelbrot

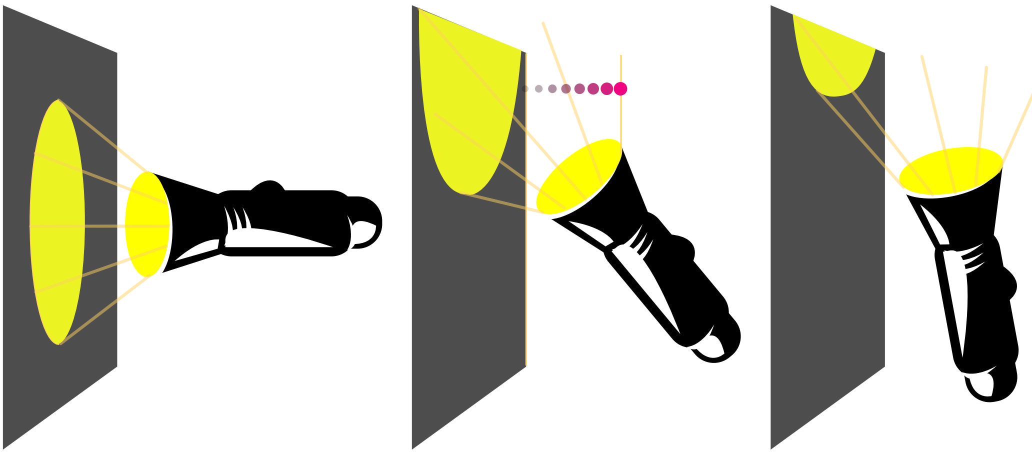
Cónicas no espaço

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 lâmpada ou 1 lanterna de bolso, 1 ecrã branco ou 1 folha de papel

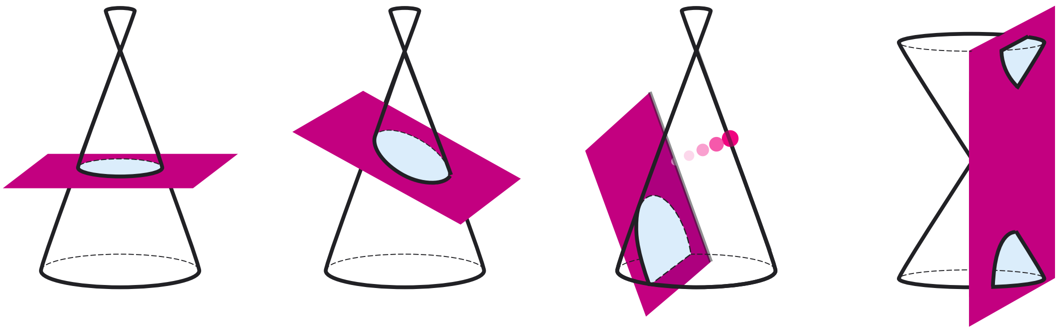
Luzes e Cónicas

- Alumie a parede ou o ecrã com a lanterna de bolso.
- Aparece uma mancha de luz.
- Que forma tem? Pode mudá-la? Como?



Que reter?

No tecto ou no chão, deve-se ver uma circunferência. Nas paredes, ou ao inclinar o suporte da lâmpada, pode-se obter um arco de parábola ou um ramo de hipérbole. As cónicas são as curvas que se obtêm pela intersecção de um cone por um plano. Segundo a orientação do plano em relação ao eixo do cone, obtêm-se os diferentes tipos de curvas.
Quando a lâmpada está perpendicular ao ecrã, obtém-se uma circunferência. Quando o ângulo muda, obtém-se sucessivamente uma elipse, uma parábola (é necessário que o cone esteja paralelo ao ecrã) e, por último, um ou dois ramos de hipérbole.
pode-se obter um ponto, uma recta ou duas rectas?



CÍRCULO ELIPSE PARÁBOLA HIPÉRBOLE

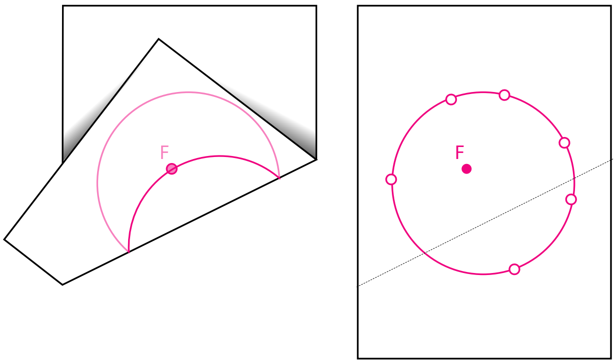
Cónicas no espaço

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 folha de papel, 1 compasso, 1 régua

Construa cónicas por dobragem

- Trace uma circunferência.
- Marque um ponto F no interior ou no exterior da circunferência.
- Dobre a folha (marcando a dobra) de modo que um ponto da circunferência coincida com F.
- Recomece a operação uma vintena de vezes, pelo menos.
- Que vê?



Que reter?

- Se o ponto F está no interior da circunferência, as dobras marcadas envolvem uma curva que é uma elipse.

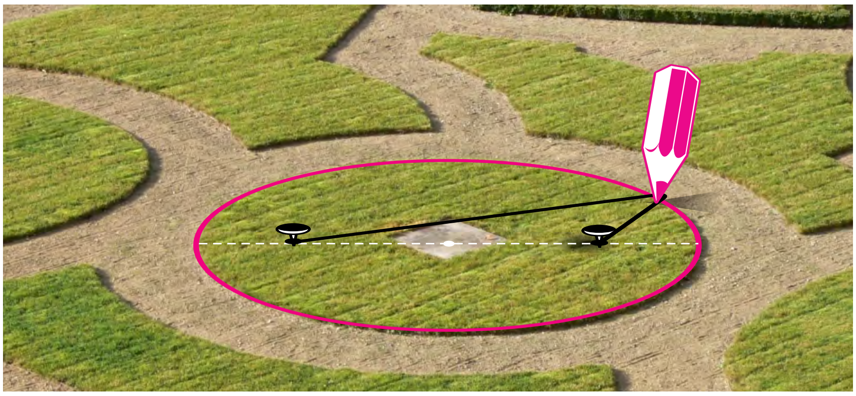
- Se F está no exterior, a envolvente é uma hipérbole. O que se obtém ao substituir a circunferência por uma recta?

Para ir mais longe

As cónicas encontram-se em numerosos fenómenos naturais.
A parábola: do jacto de água à trajectória de um objecto lançado para a frente.
Encontramo-la também nos faróis das viaturas e em certos fornos solares. A elipse encontra-se em arquitectura e nos desenhos de perspectivas de circunferências.
As leis de **Kepler** (1619) da gravitação, estabelecidas **Newton**, mostram que as órbitas dos corpos celestes, naturais ou artificiais, são cónicas.

Onde se emprega a matemática

Quem utiliza as cónicas?
Os engenheiros, sobretudo na industria espacial e, é claro, os astrónomos. Os arquitectos que constroem as pontes suspensas e os estádios desportivos.E também os jardineiros, os técnicos de luzes no teatro ou no cinema ou ainda os técnicos de infografia.



PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Cónica - Elipse - Parábola - Hipérbole - Curva envolvente

2.Pavimentar um chão

Arte & Pavimentos

Caleidoscópios

Onde estou?

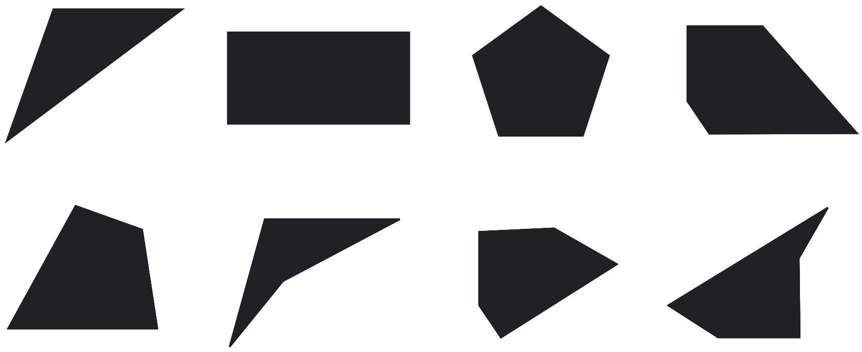
Faça você mesmo

MATERIAL: 1 folha de formas para recortar, 4 ou 5 lápis ou canetas de feltro de cor, 1 x-acto ou 1 tesoura

19

Crie a mais bela pavimentação com uma forma

Escolha uma forma e tente criar uma pavimentação do plano, sem espaços nem sobreposições. Pode também colori-la. Para cada pavimentação criada, tente determinar a que grupo de pavimentações regulares (entre os 17 mostrados página 8) pertence.



Faça você mesmo

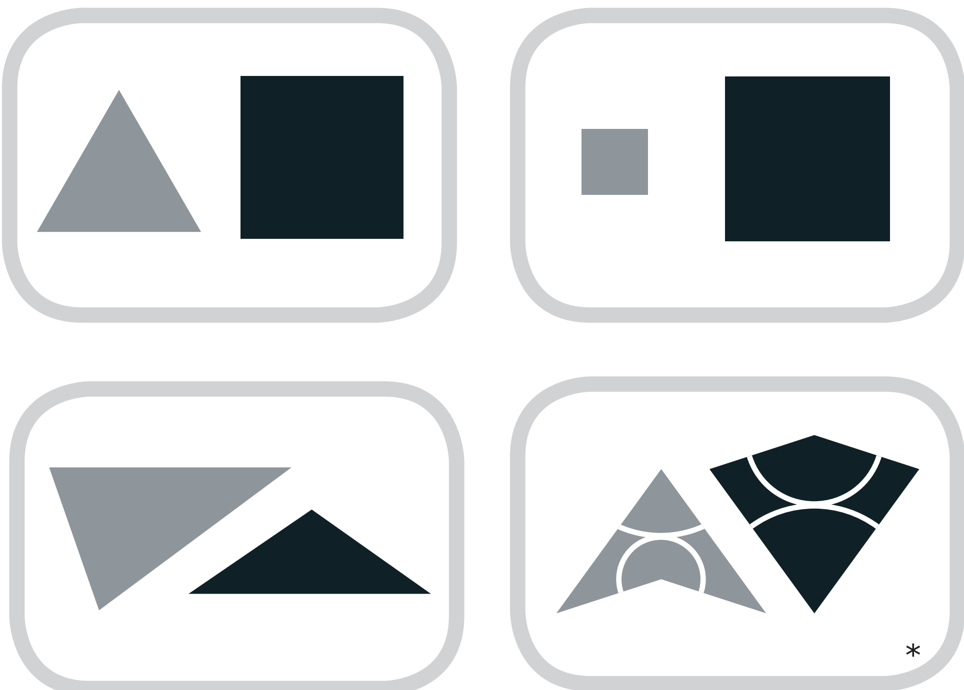
MATERIAL: 1 folha de formas geométricas para recortar, 4 ou 5 lápis ou canetas de feltro de cor, 1 x-acto ou 1 tesoura

20 21 22 23

Crie pavimentações com duas formas

- Escolha um destes pares de formas.
- Tente criar uma pavimentação do plano, sem espaços nem sobreposições.
- É regular? Se não, pode dizer porquê?

* Respeite a coincidência dos arcos de circunferência.



Que reter?

Podemos cobrir um chão com ladrilhos de uma forma qualquer, sem espaços nem sobreposições?
Muitas formas geométricas ou figurativas permitem realizar uma pavimentação do plano, mas não todas como, por exemplo, o pentágono regular. As pavimentações regulares do plano repetem-se periodicamente por translações, em duas direcções.
Algumas destas pavimentações conservam-se também por rotação ou por simetrias axiais. Estas translações, rotações e simetrias permitem distinguir 17 grupos. O seu estudo respeita à teoria dos grupos, devida a **Evariste Galois**.
Encontram-se aplicações das pavimentações em Matemática, Cristalografi a, Teoria dos Códigos, Física das Partículas...

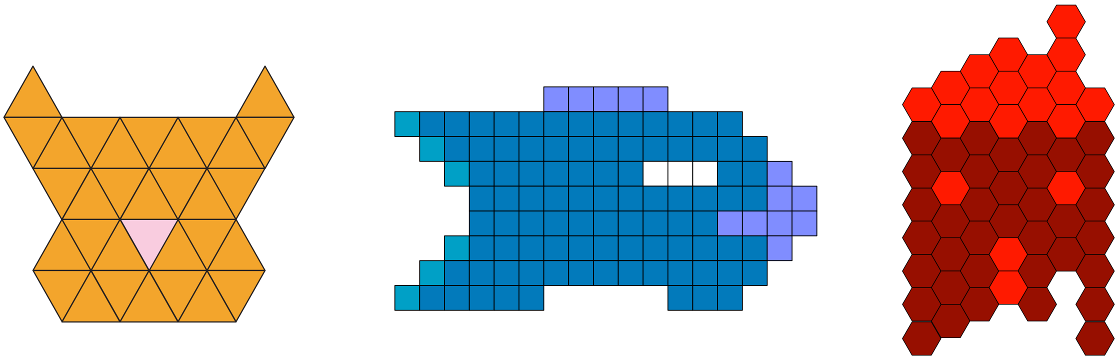
Faça você mesmo

MATERIAL: 3 grelhas geométricas, 4 - 5 lápis ou canetas de feltro de cor

24 25 26

Gato, peixe, casa...

Transforme uma forma simples (triângulo, quadrado, hexágono) num modelo fi gurativo...
Para ajudar, parta das grelhas postas à sua disposição.

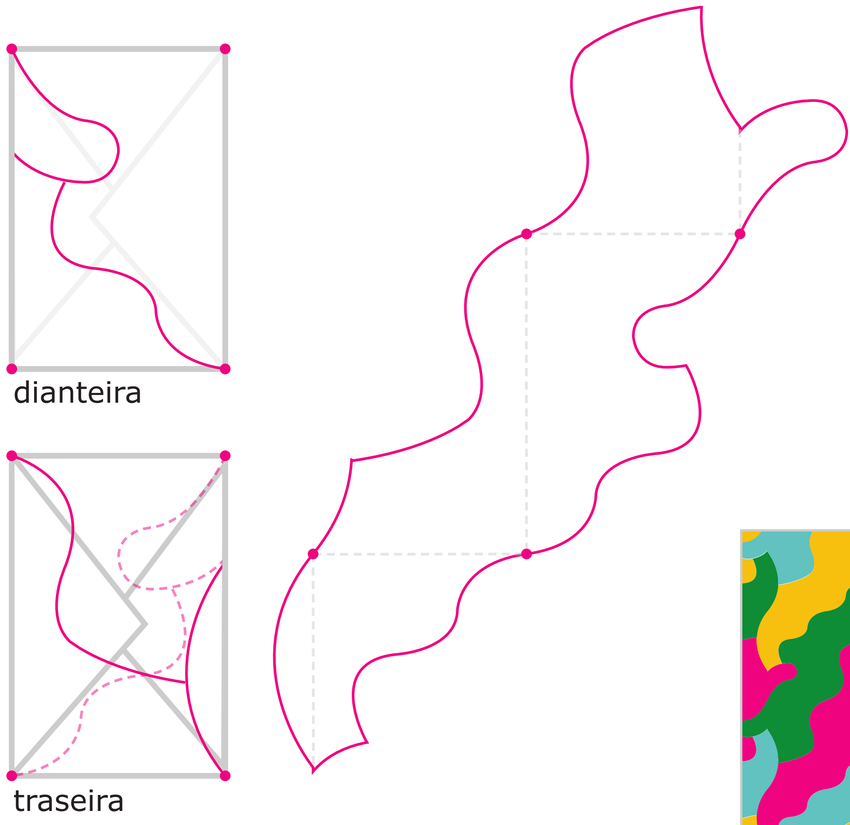


Faça você mesmo

MATERIAL: 1 envelope fechado, 1 lápis, 1 x-acto ou 1 tesoura

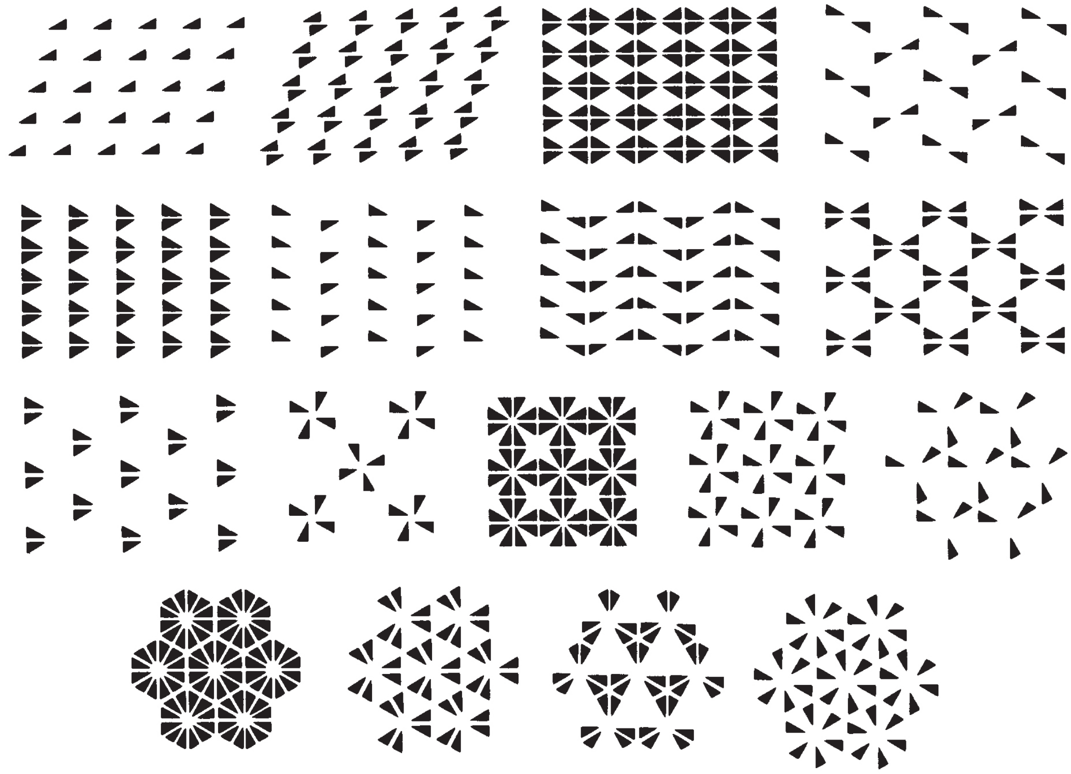
Técnica das envolventes

- Construa um envelope fechado, rectangular, quadrado, triangular...
- Trace um caminho para ligar os cantos do envelope. O seu traçado pode passar apenas por uma das faces ou por ambas.
- Corte o envelope seguindo o traçado.
- Desdobre e pavimente.



Para ir mais longe

Os 17 grupos de pavimentações regulares



Onde se emprega a matemática

As pavimentações encontram-se em artes que vão do papel de parede aos ladrilhos (cozinha, corredor, quarto de banho...), dos tecidos para vestuário às tecelagens africanas.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Pavimentação - Grupos de pavimentações - Evariste Galois - Escher

Caleidoscópios

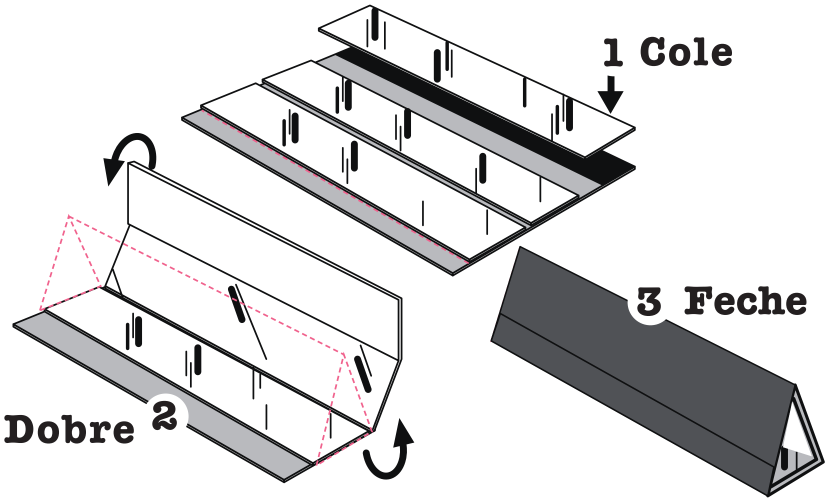
Faça você mesmo

MATERIAL: 2 modelos de caleidoscópios, 3 espelhos, 1 cartão, 1 fita adesiva, 1 tubo de cola

27

Construa dois caleidoscópios

Construa dois modelos, um baseado num triângulo equilátero, o segundo baseado num triângulo rectângulo isósceles.



Faça você mesmo

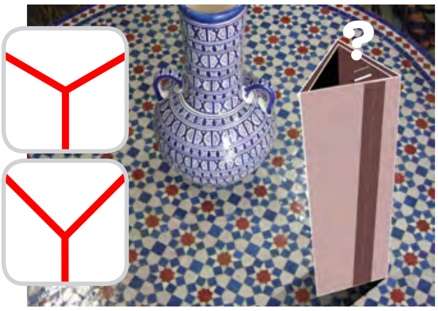
MATERIAL: Exemplos de mosaicos a observar, 2 caleidoscópios

28 29

Observe as simetrias no interior do caleidoscópio

- Escolha um mosaico e coloque o caleidoscópio adequado na posição apropriada.
Reencontrará, em ponto grande, o mosaico.

- Coloque um dos espelhos sobre as linhas vermelhas. Encontrará uma pavimentação de chão de casa.



Que reter?

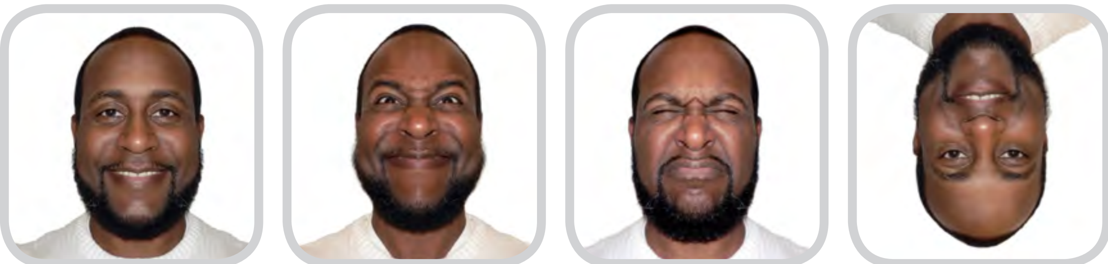
As pavimentações regulares são repetições, até ao infinito dum mesmo motivo.
Aqui, o motivo, por simetrias de espelhos, vai reproduzir-se para dar um quadrado, um hexágono ou outro polígono qualquer com um número par de lados.
A mesma técnica foi utilizada por artistas como **Escher** com motivos mais figurativos.

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 fotografia, 1 tesoura ou 1 x-acto

Quem está atrás do espelho?

- Pegue na fotografia de um rosto.
- Corte-a em 2 por simetria e realize estes efeitos de espelho!
Qual é o rosto certo?



Caleidoscópios

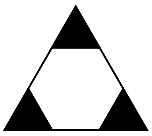
Faça você mesmo

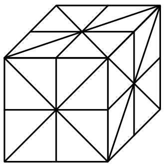
MATERIAL: 3 padrões de pirâmide, 1 x-acto ou 1 tesoura, 3 espelhos triangulares, 1 tuba de cola

30 31 32

Espelho piramidal

- Construa uma pirâmide-espelho com a ajuda dos modelos fornecidos.
- Coloque objectos ou um líquido à sua escolha no fundo do caleidoscópio.
- O que observa?



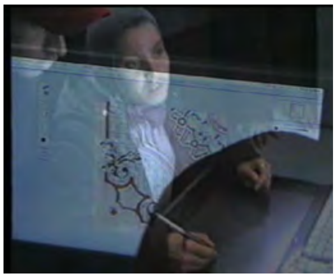


Para ir mais longe

Ao cortar um poliedro regular (cubo, tetraedro...) seguindo todos os seus planos de simetria, obtêm-se pirâmides que, transformadas em caleidoscópios, permitem reencontrar o poliedro de partida e ainda toda uma família de volumes que têm as mesmas simetrias de base.

Onde se emprega a matemática

- Artesãos criando um mosaico a partir de azulejos marroquinos (Fez – Marrocos)
- Técnica criando uma nova pavimentação em computador (Super Céram, Kenitra Marrocos).



PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Caleidoscópio - Mosaico - Pavimentação - Simetrias - Escher

Onde estou?

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 esfera de poliestireno ou 1 bola, 1 caneta de feltro

Pavimente a esfera

Observe estas pavimentações da esfera. Pode imaginar outras?
Tente desenhá-las na bola.
Para cada pavimentação, calcule os ângulos do (ou dos) polígono pavimentador.




A história do caçador de ursos

É a história de um caçador que segue a pista de um urso. Caminha a direito para o sul durante uma hora e depois vê que o urso virou para o leste. Faz o mesmo e caminha durante uma hora para chegar a um ponto onde o urso virou novamente, para o norte. De novo! Faz o mesmo e segue a pista de novo durante uma hora. E agora? Apercebe-se que regressou... ao ponto de partida!

Questão 1: qual pode ser a cor do urso?
Questão 2: quantas soluções podem existir?

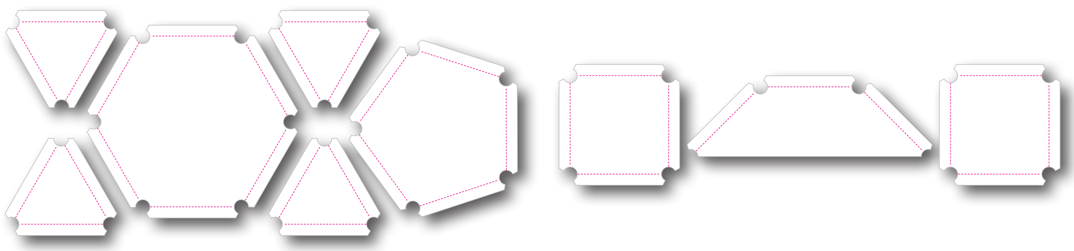
Faça você mesmo

MATERIAL: 1 folha de padrões de polígonos regulares, 2 ou 3 folhas de cartão,
Elásticos (recortados de câmaras de ar de bicicleta)

33

Construa uma bola de cartão

Com estes polígonos regulares, construa uma bola que se aproxime o mais possível da esfera.



Onde se emprega a matemática

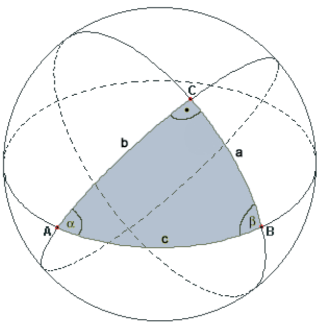
Os arquitectos inspiram-se por vezes em estruturas esféricas.
A indústria da comunicação por satélite e os sistemas de posicionamento por satélite (GPS ou Galileu) que procuram cobrir a Terra utilizando o menor número possível de satélites.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Geometria esférica - Pavimentações da esfera - Escher

Que reter?

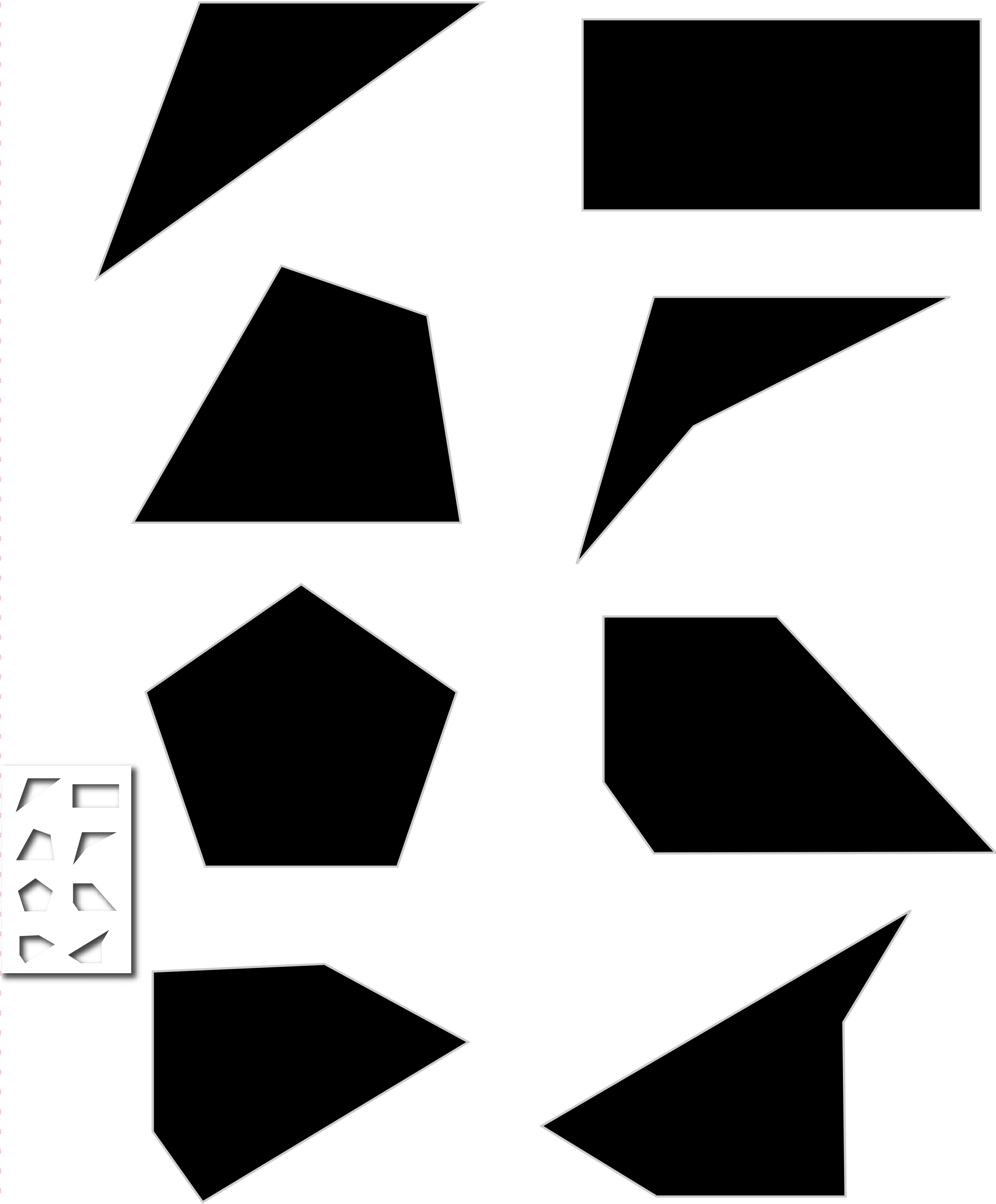
Como no plano, as pavimentações da esfera são coberturas sem espaços nem sobreposições com a ajuda de um ou vários polígonos esféricos (isto é, que se aplicam sobre a esfera).
A pavimentação é regular se utiliza uma só forma (triângulo equilátero, quadrado...) que se reparte da mesma maneira em torno de cada vértice.
As pavimentações regulares da esfera são deformações esféricas dos poliedros regulares.
Pavimentar a esfera permite definir, por exemplo, o número óptimo de satélites que são necessários para cobrir todos os pontos da Terra.

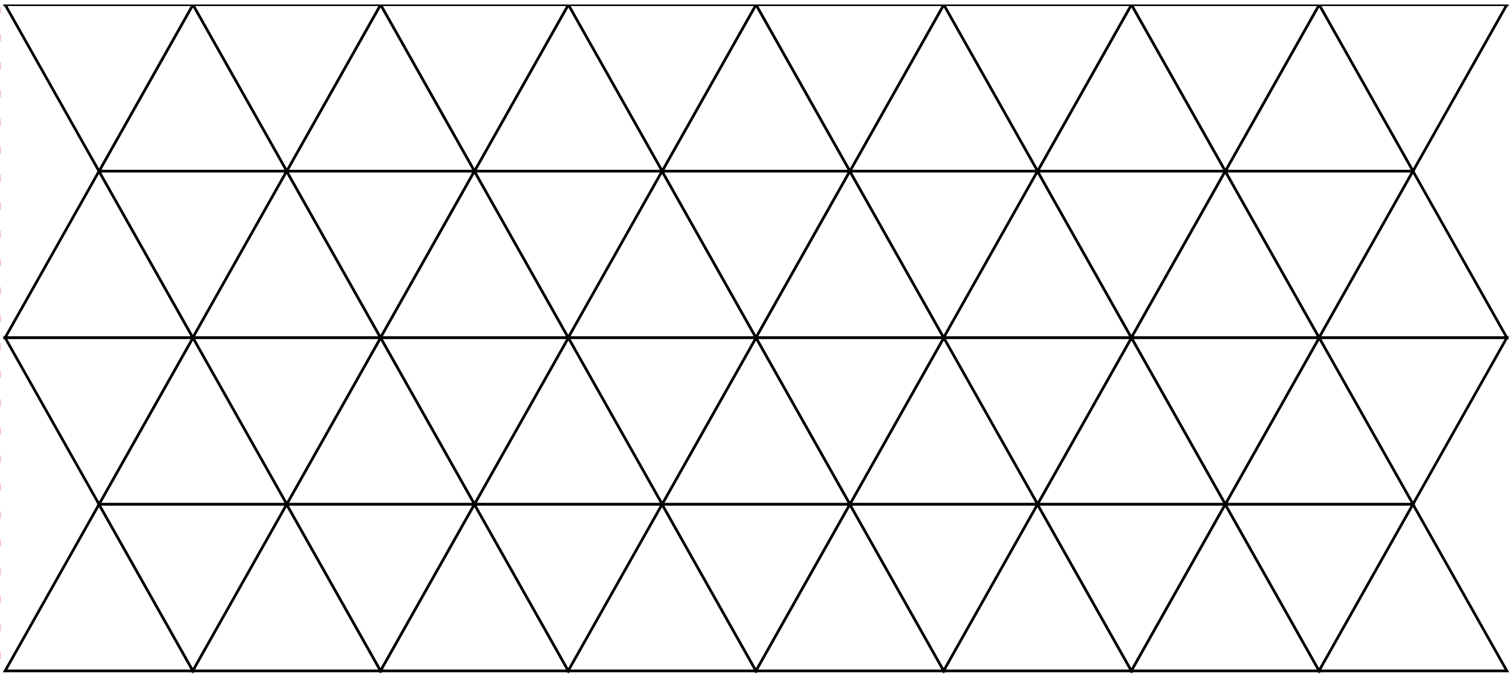
Para ir mais longe

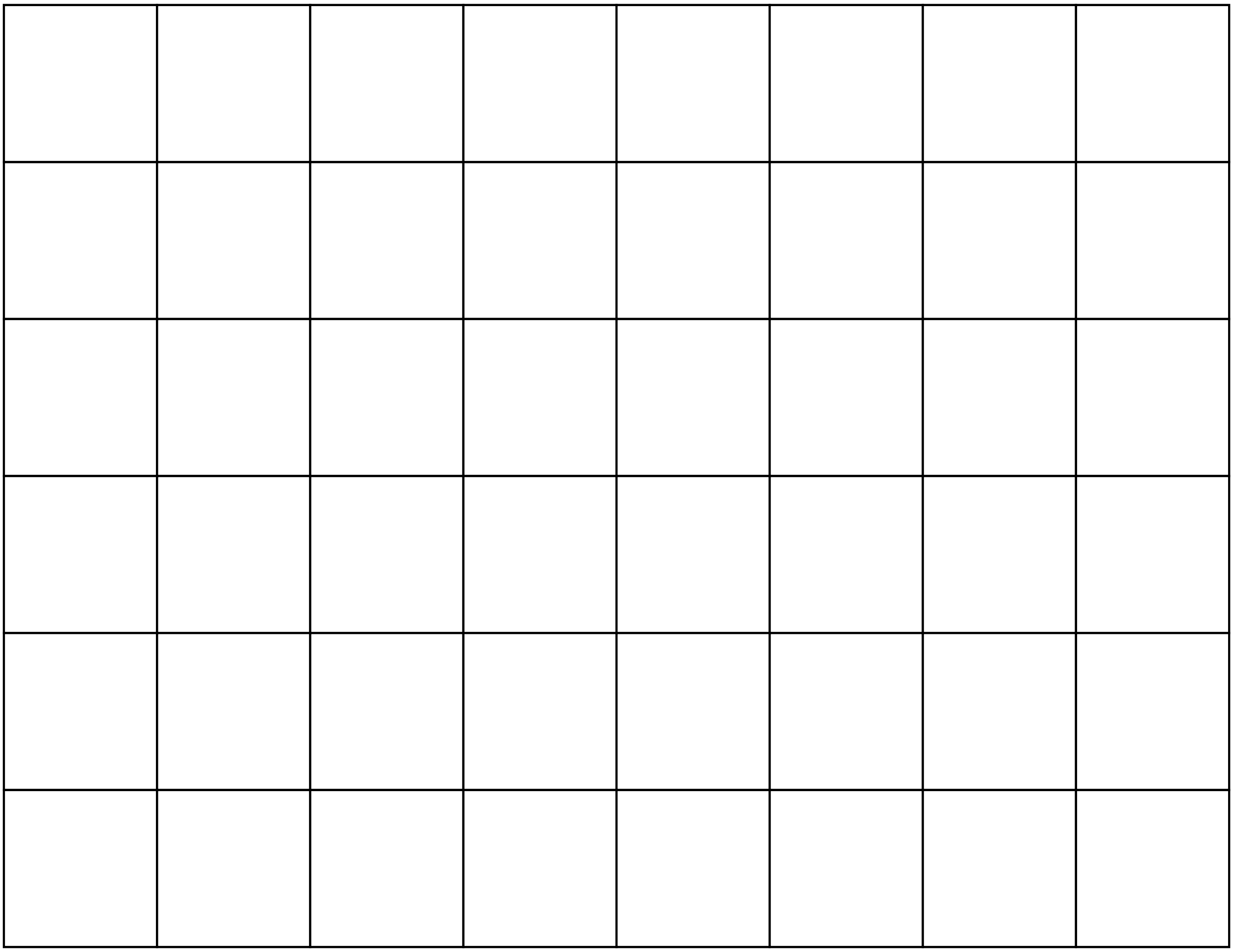


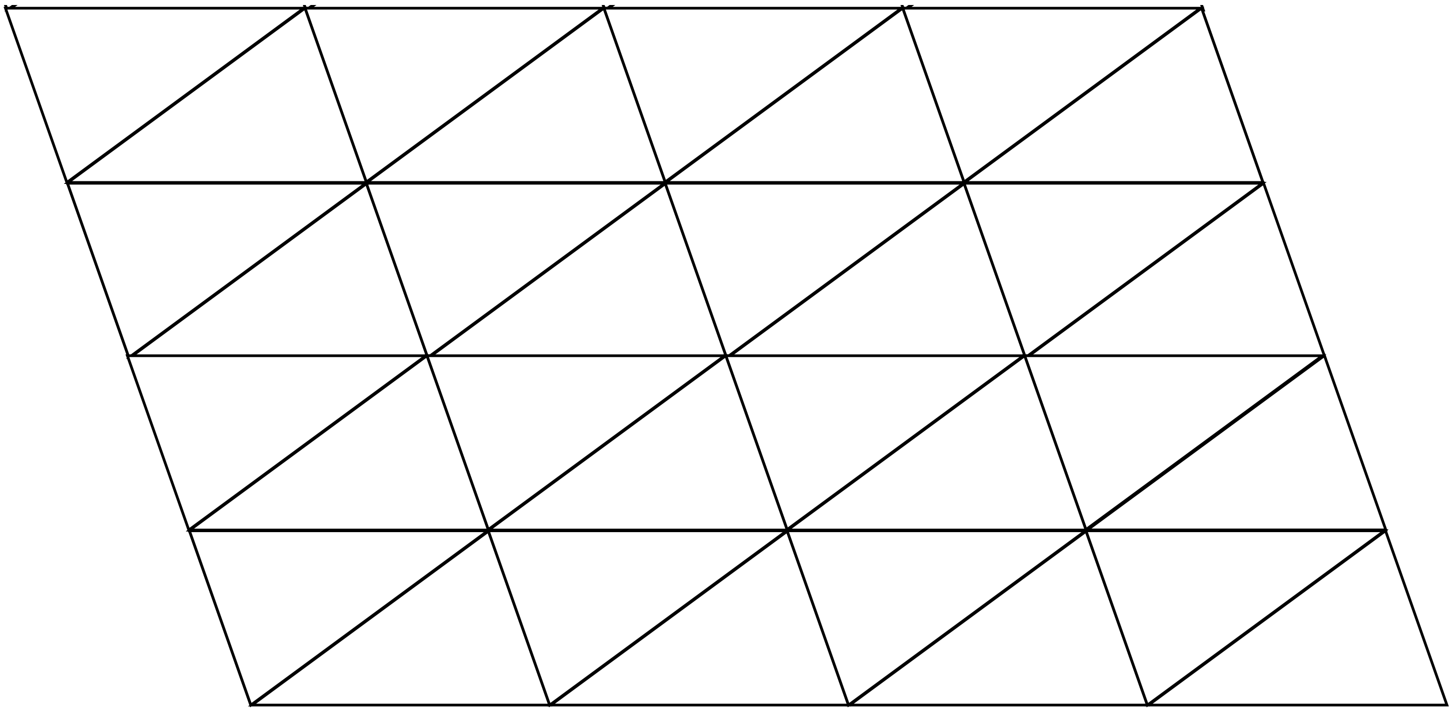
Calculando os ângulos dos polígonos desenhados sobre a esfera, descobrirá propriedades da geometria esférica:

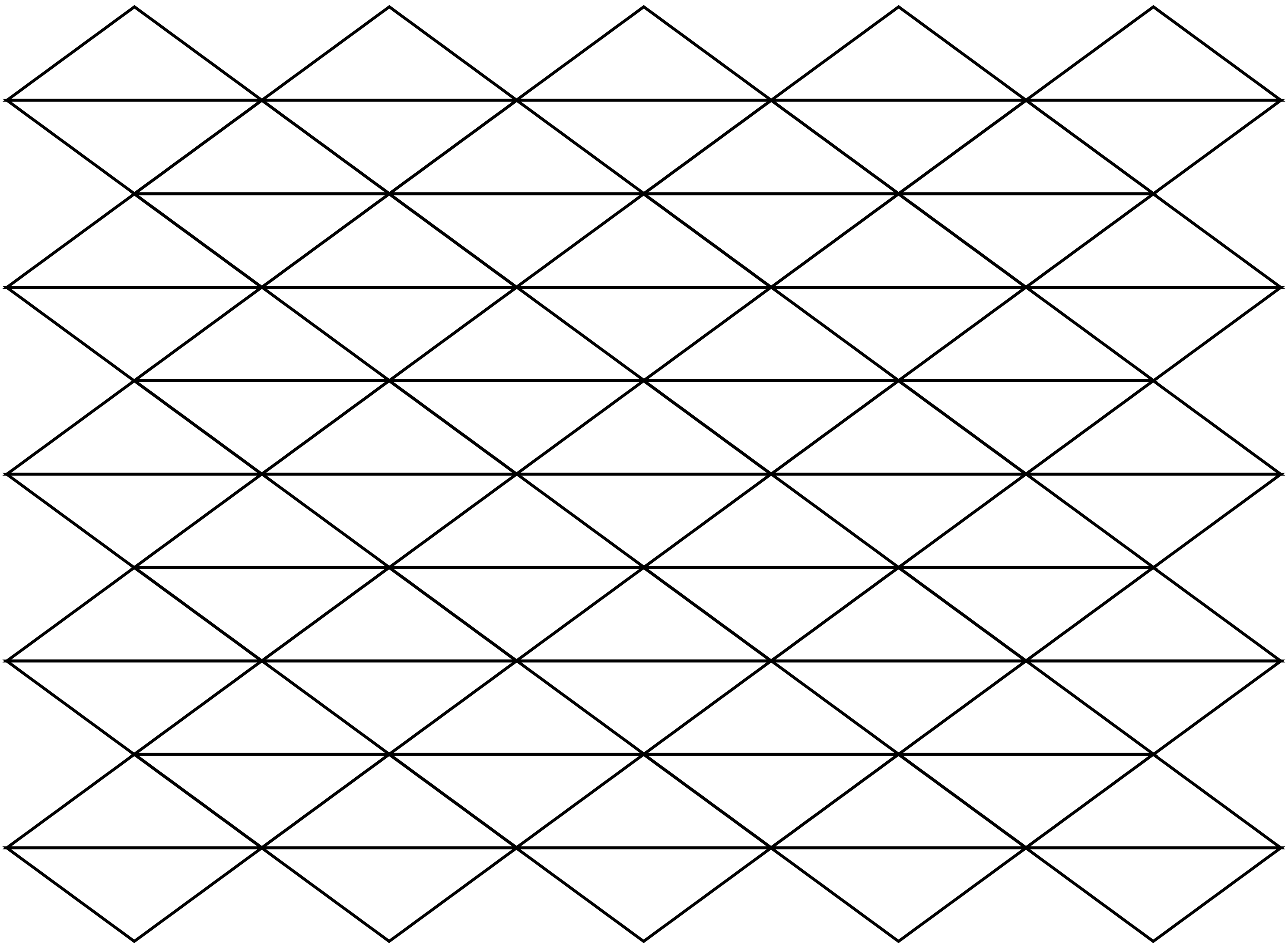
- Qual é a soma dos ângulos dum triângulo esférico?
- Pode-se construir um triângulo esférico que tenha 3 ângulos rectos?
- Que relação existe entre a soma dos ângulos dum polígono esférico e a sua área?

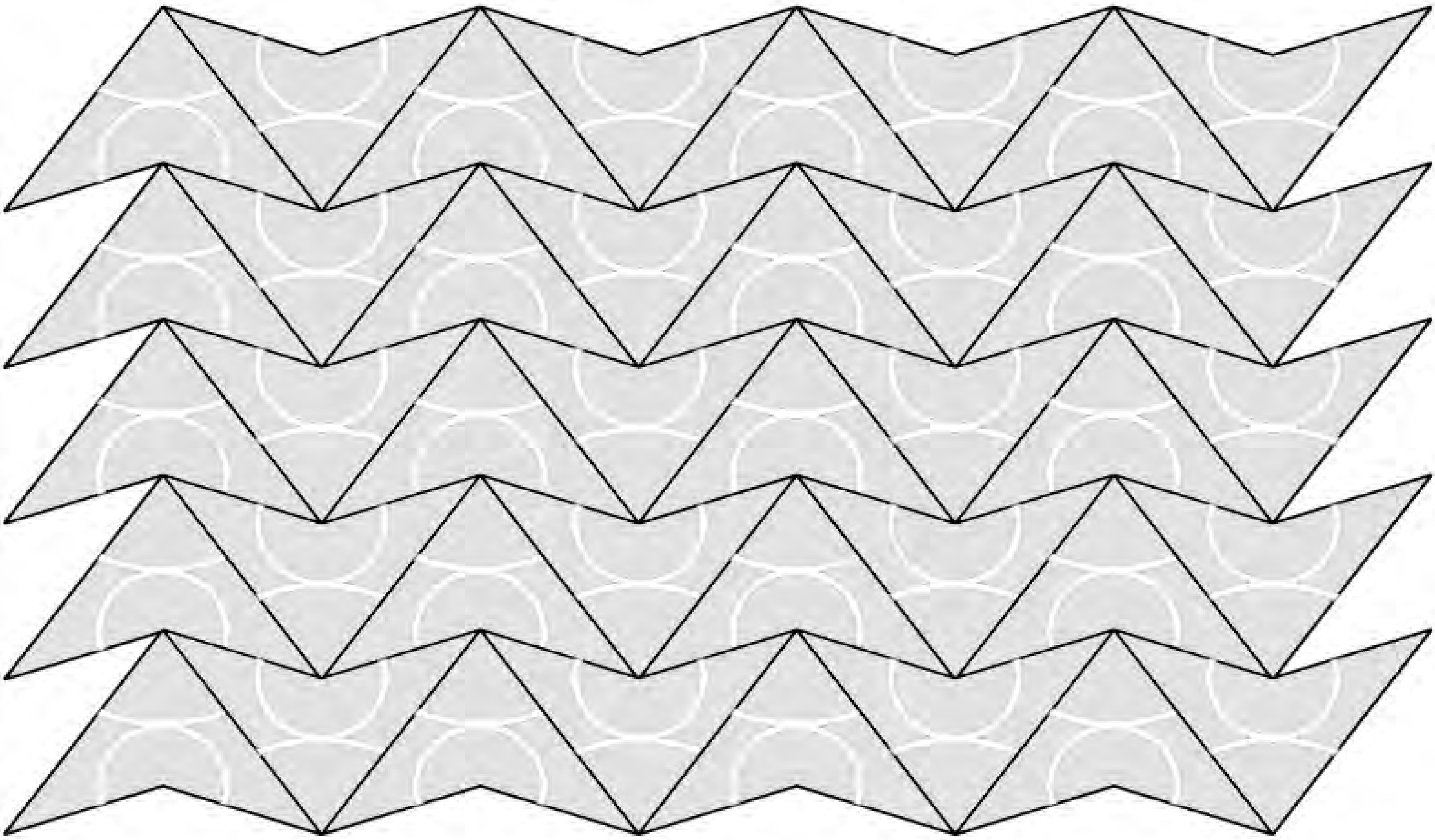


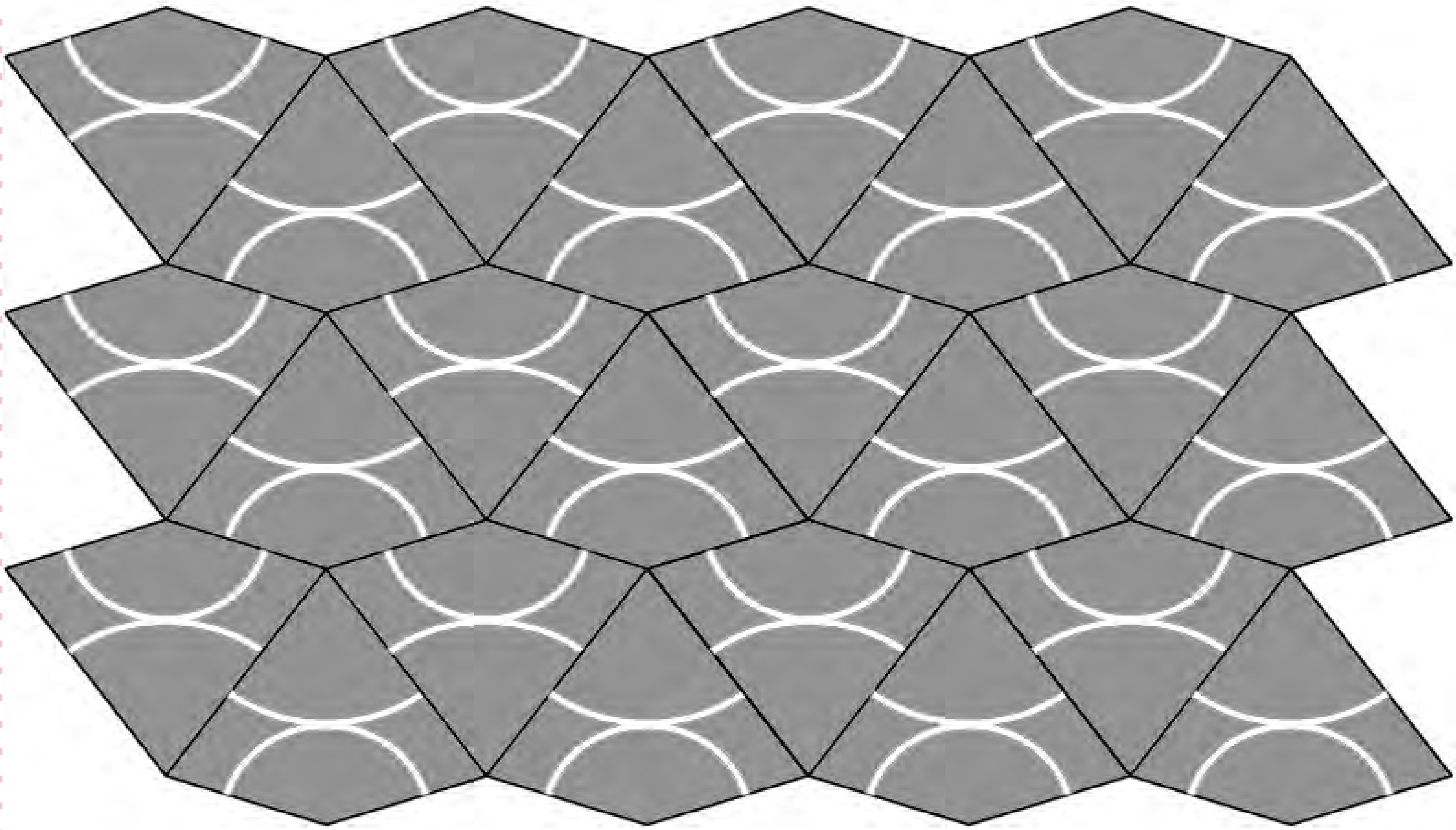


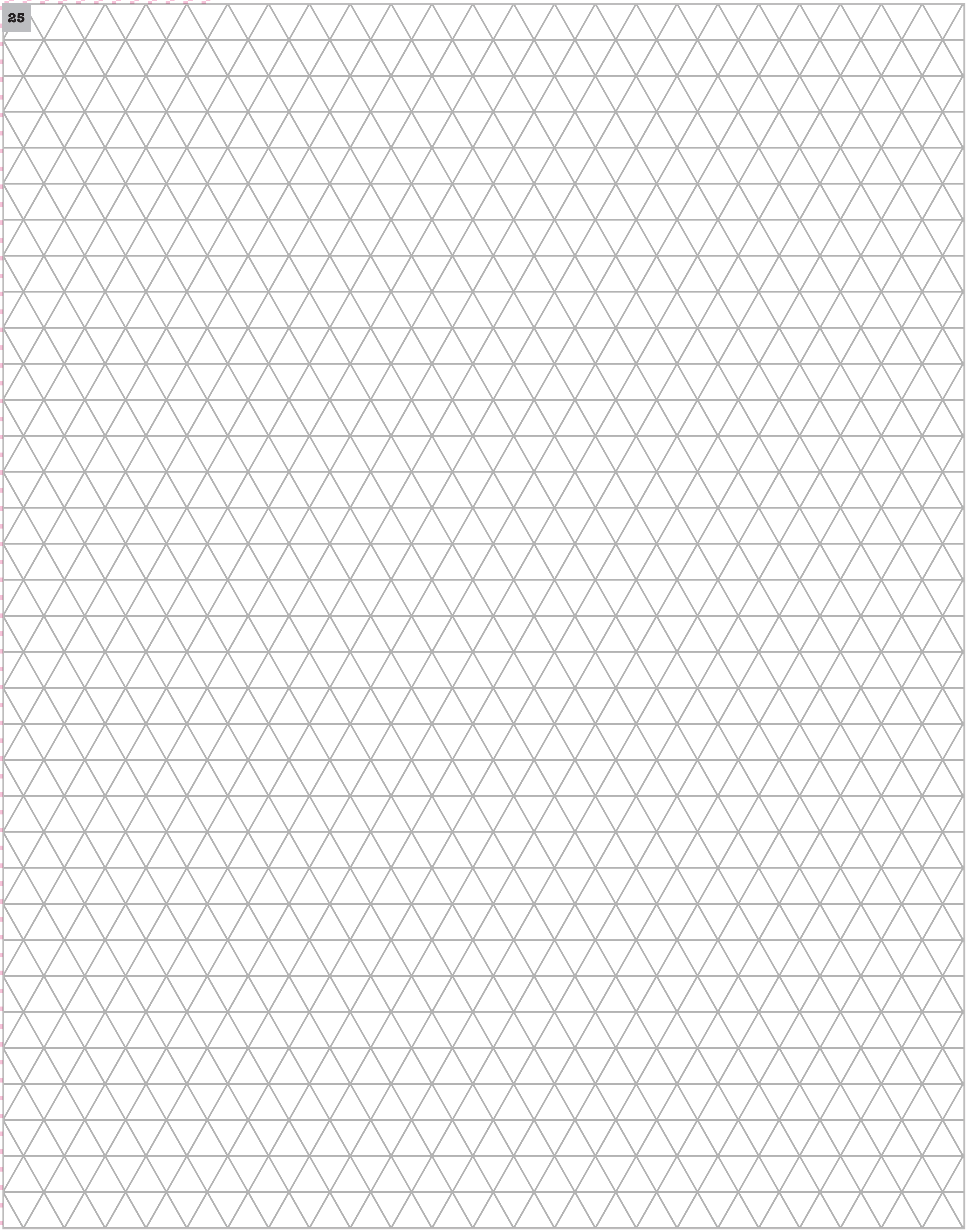


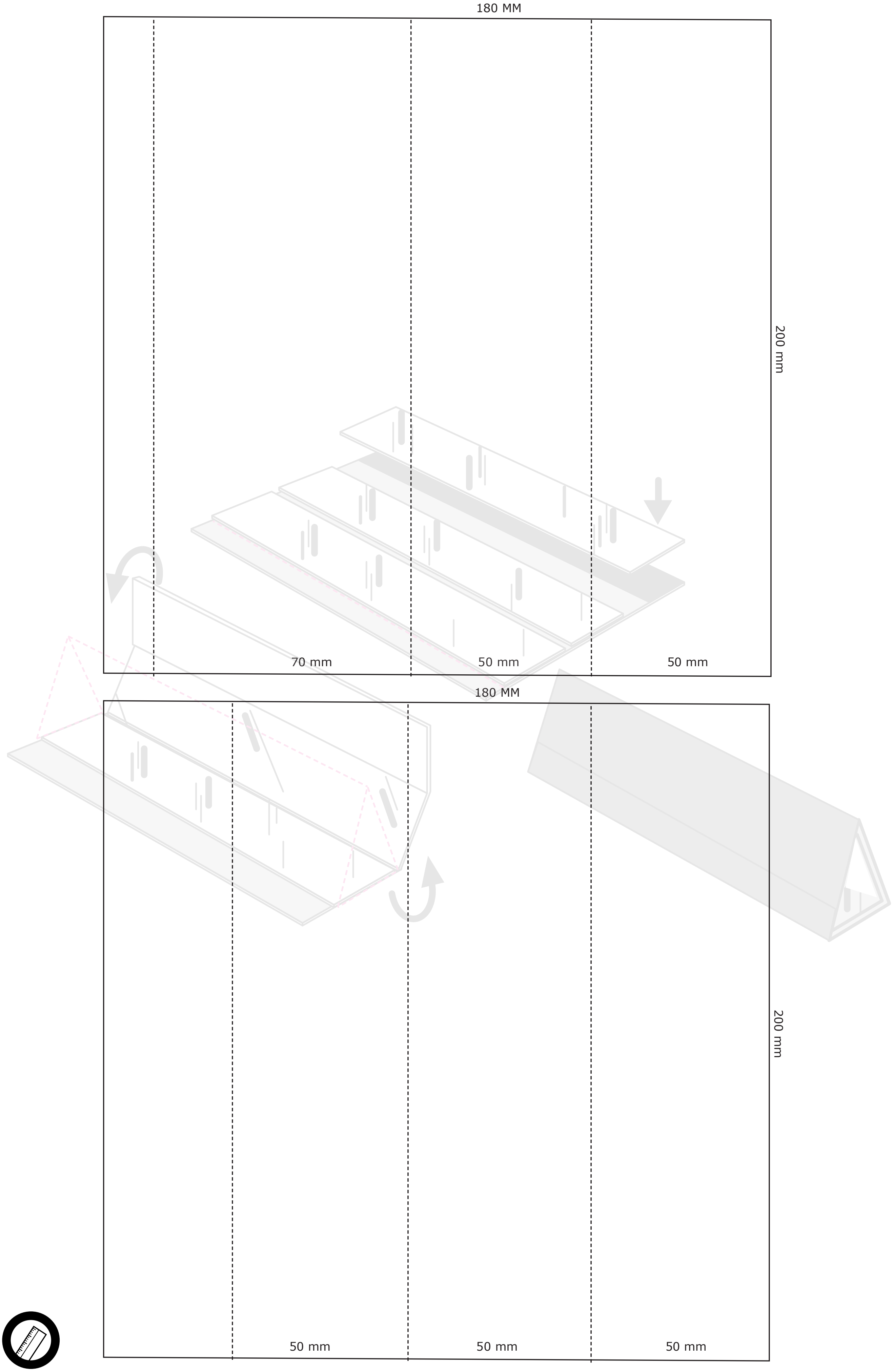


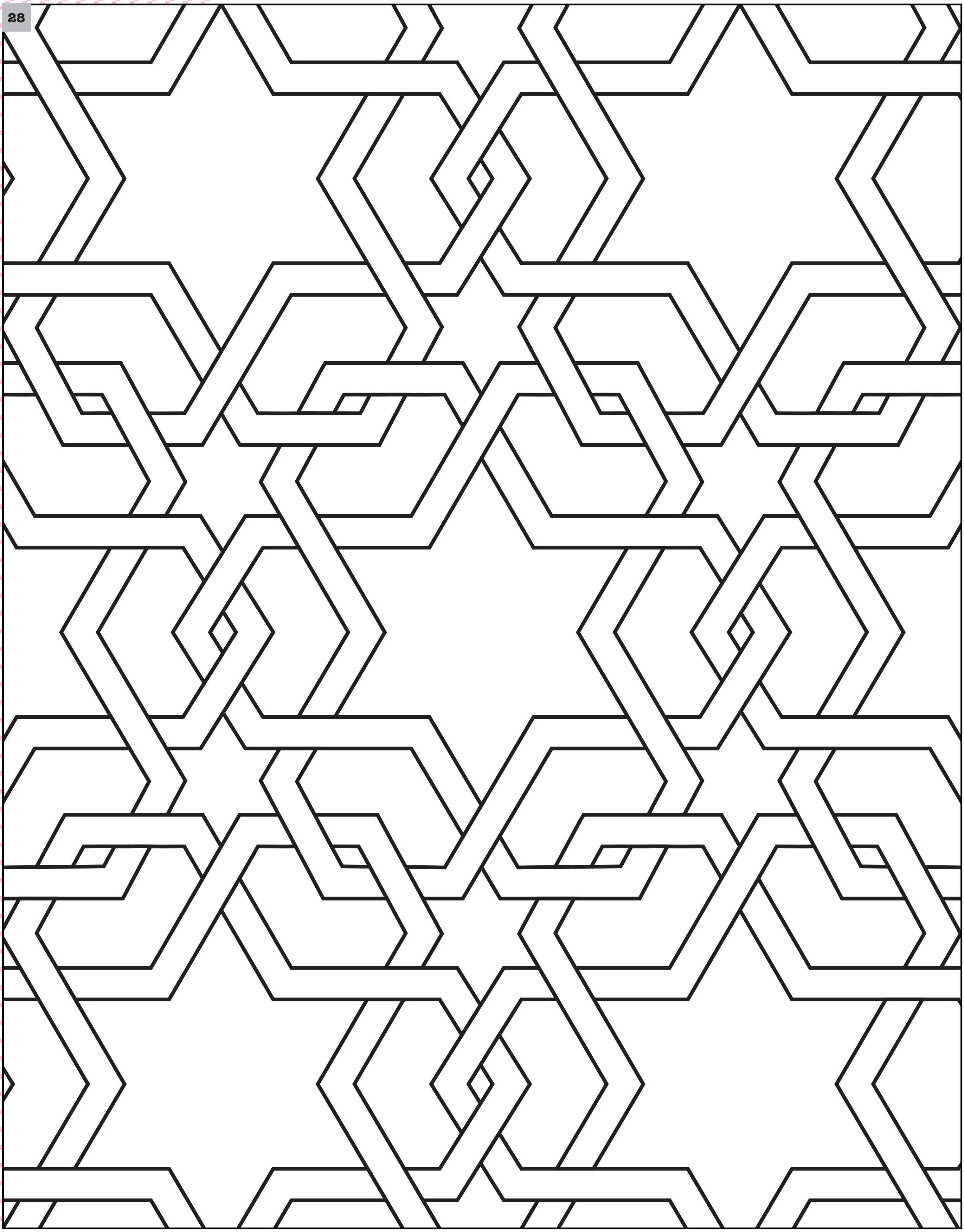


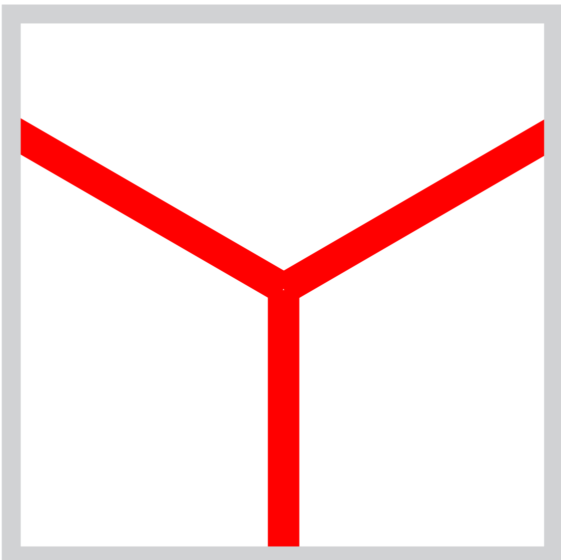


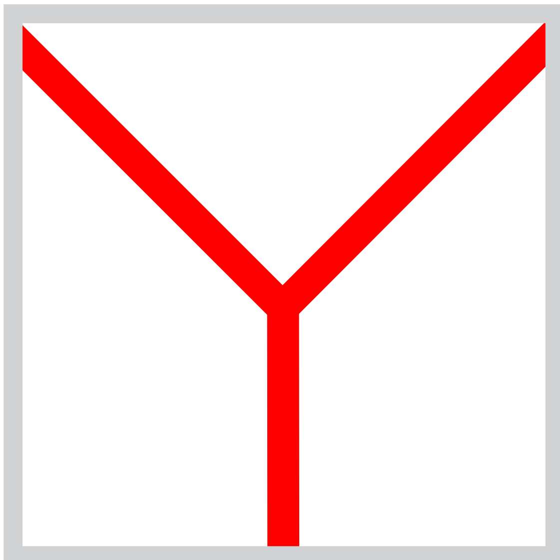




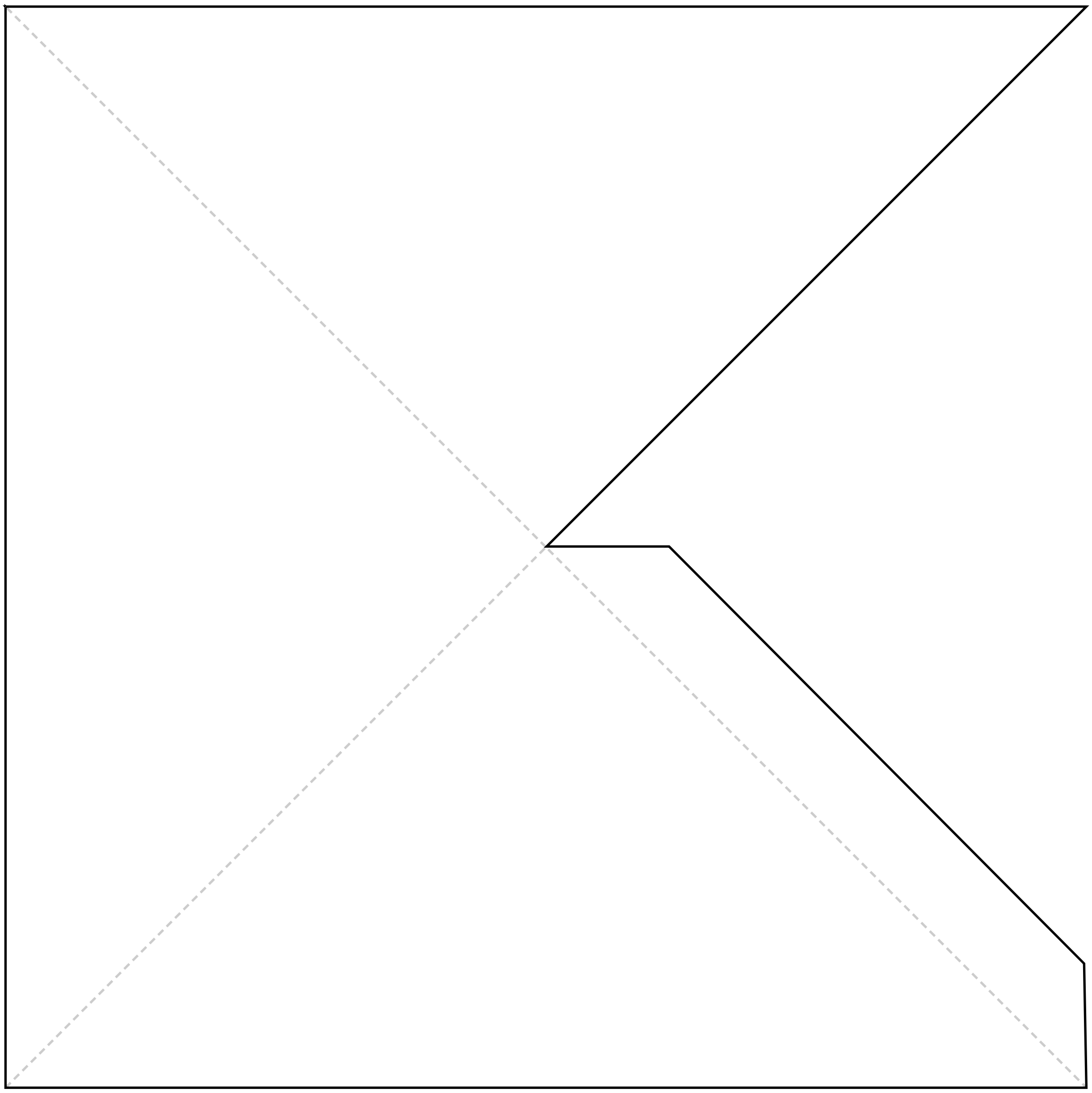

180 MM
200 mm
70 mm
50 mm
50 mm
180 MM
200 mm
50 mm
50 mm
50 mm



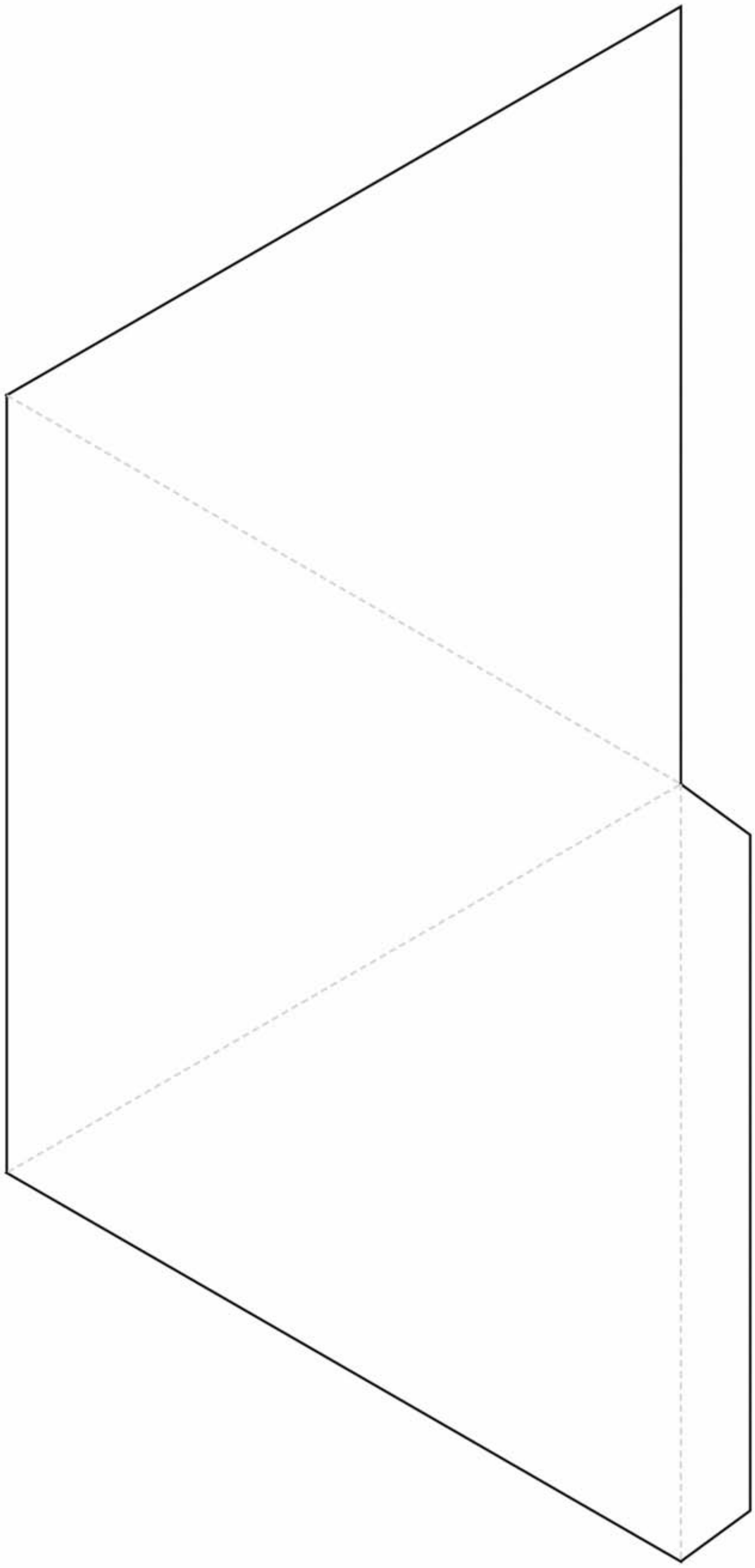




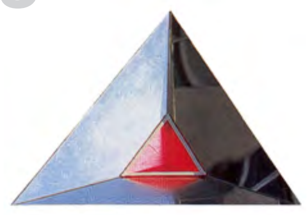
1

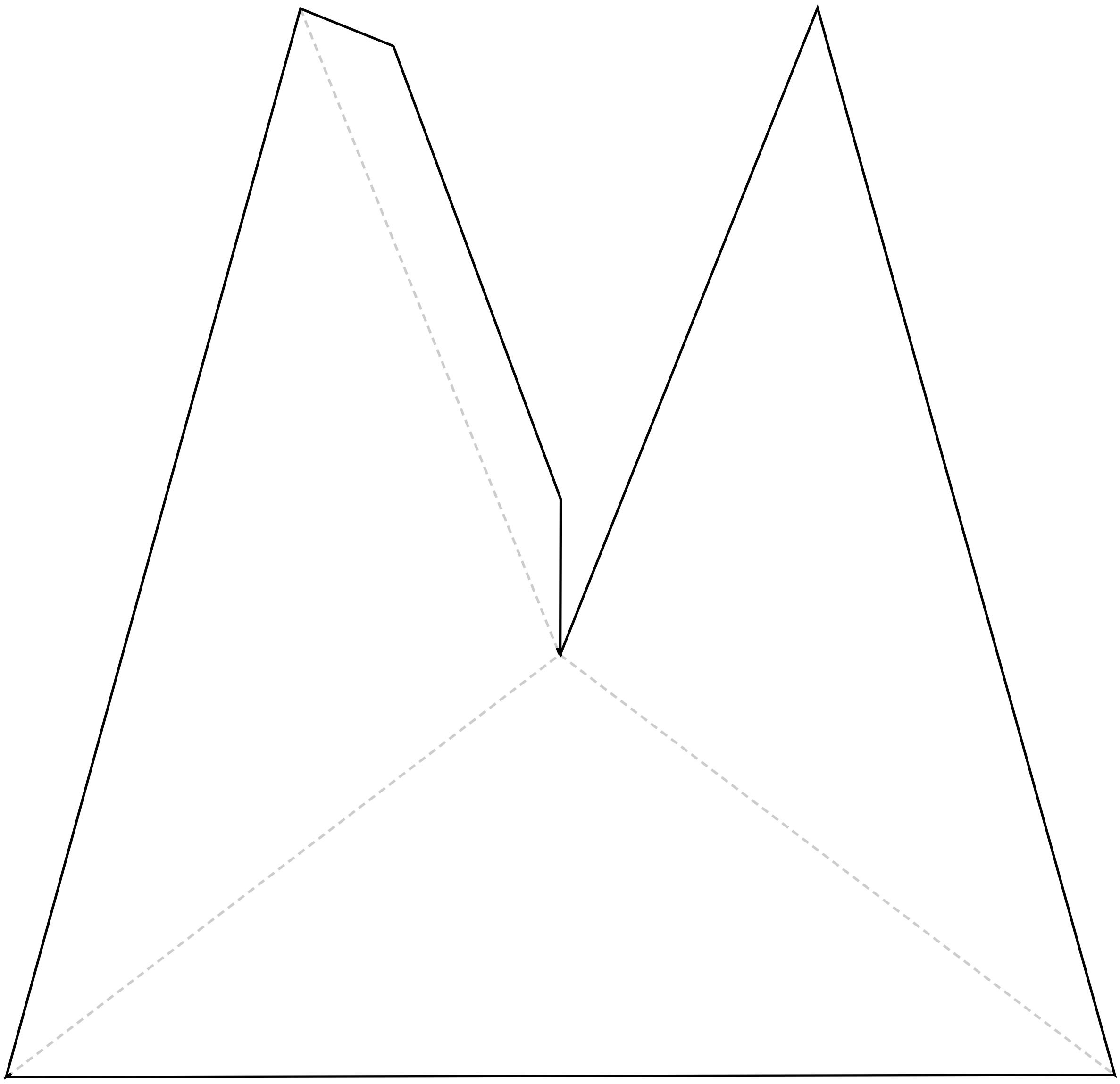


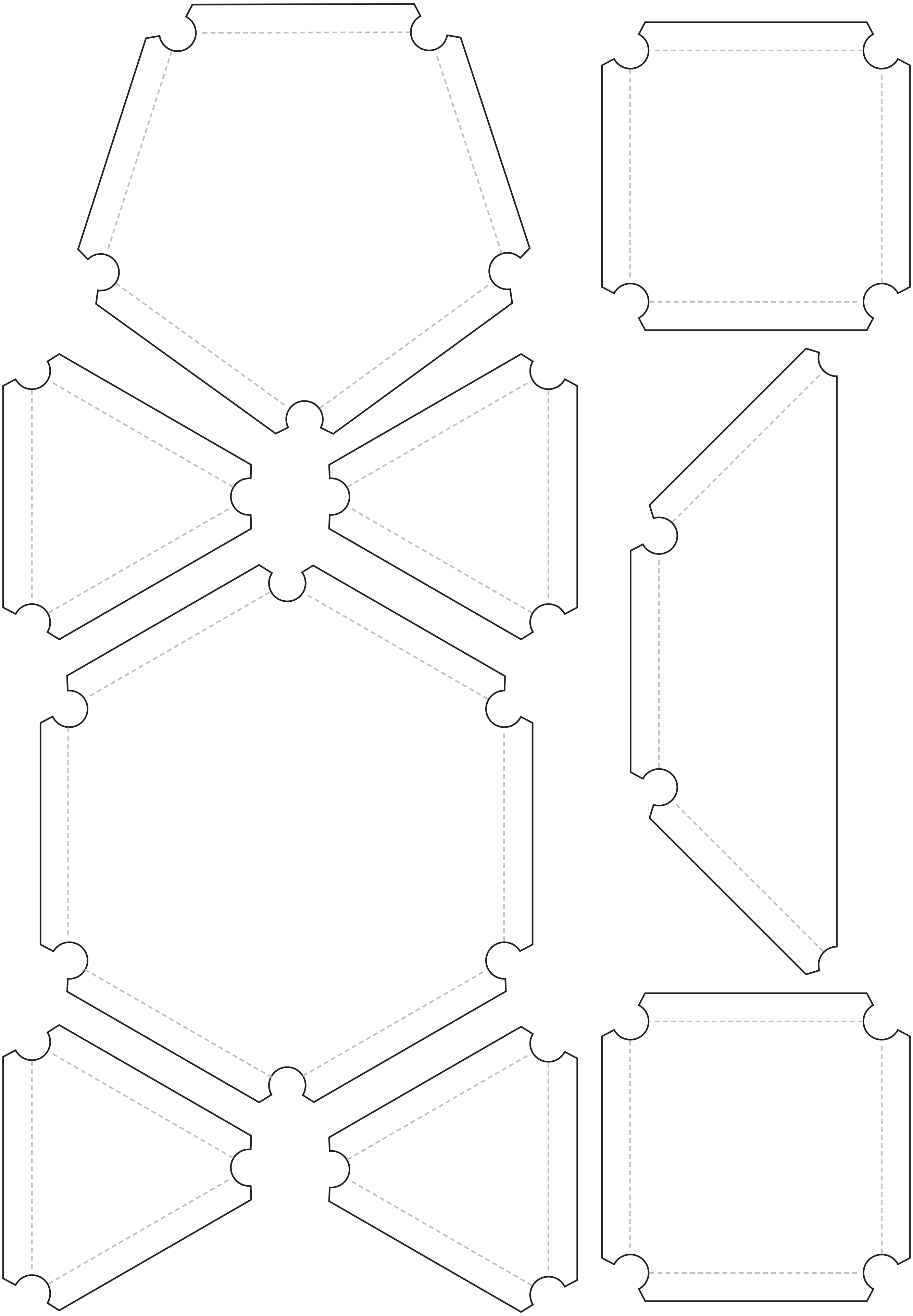
2



3







3.Preencher o Espaço

Empilhar laranjas!

Poliedros

Problemas complexos

3.Preencher o Espaço

Empilhar laranjas!

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 folha de papel quadriculado, moedas, esferas ou laranjas...

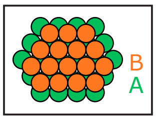
39

Empilhe, empilhe...

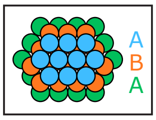
- Coloque o máximo de peças idênticas num quadrado de lado 1, 2, 3... 10 unidades.
- Coloque o máximo de bolas unitárias num cubo de lado 10 unidades.
  Calcule a densidade de cada empilhamento.




Que reter?



Num quadrado de lado 10, pode colocar mais de 100 discos! A partir de que fila se podem colocar mais que o quadrado do lado?
No plano, a densidade* máxima obtida com discos idênticos é de 90,6%. Isto é, há menos de 10% de vazio.

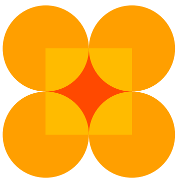
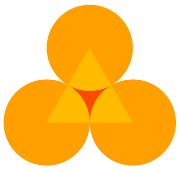


No espaço, quando o empilhamento é regular, a densidade* máxima é obtida (como para as redes cristalinas) quando as esferas estão nos vértices e nos centros das faces dum empilhamento de cubos.
Este empilhamento é chamado "cúbico com faces centradas". A sua densidade é de 74%.

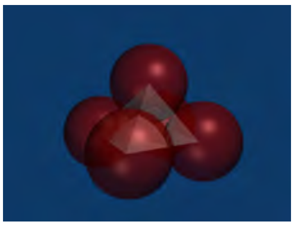
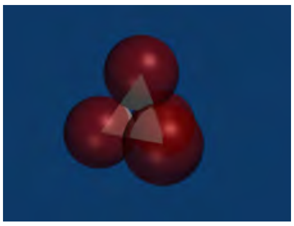
Para os empilhamentos de esferas de diâmetros diferentes ou de formas achatadas, o problema da densidade não está ainda resolvido.

**a densidade é a proporção do volume (ou da superficie) ocupado pelas esferas no interior do invólucro que as contém (aqui a pirâmide ou o cubo – ou o quadrado)*

Para ir mais longe

Calcular as densidades destes empilhamentos de discos é comparar, no quadrado (ou no triângulo), a área da parte ocupada pelos discos à área do quadrado (ou do triângulo).

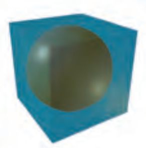



Calcular as densidades destes empilhamentos de esferas é comparar, no cubo (ou no tetraedro), o volume da parte ocupada pelas esferas ao volume do cubo (ou do tetraedro).

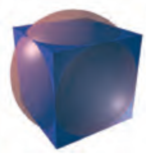
Empilhar laranjas!

Para ir mais longe

Pergunta 1
Entre um quilo de café moído e um quilo de café em grão, qual o que ocupa o menor volume?

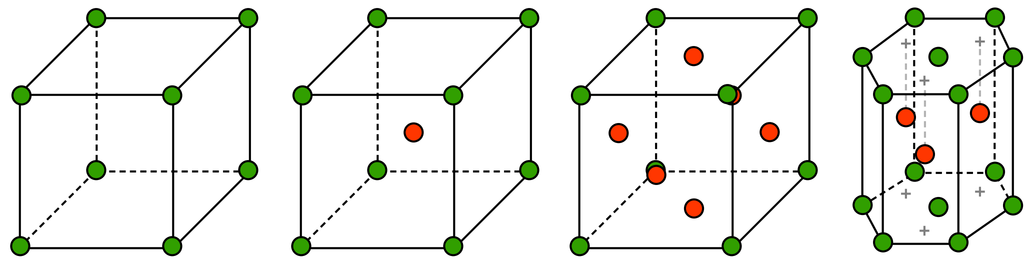


Pergunta 2
Num cubo, coloque uma esfera que seja tangente às 6 faces do cubo.
Estime qual a razão dos volumes. (sem efectuar o cálculo) Faça o mesmo para a razão das superfícies. Verifique, pelo cálculo, **que estas duas razões são iguais!**
É um dos métodos que permitiu a **Arquimedes** calcular a área e o volume da esfera.



Pergunta 3
Num cubo, coloque uma esfera que seja tangente às arestas do cubo.
Volte a fazer as mesmas perguntas. O comentário é, desta vez, o seguinte: **a razão dos volumes é igual a duas vezes a densidade máxima de empilhamentos de esferas.**

Alguns resultados fáceis de deduzir:
a. Empilhamento cúbico simples - Densidade: $\pi/6$
b. Empilhamento cúbico centrado - Densidade: $\pi\sqrt{3}/8$
c. Empilhamento cúbico de faces centradas - Densidade: $\pi\sqrt{2}/6$
d. Empilhamento hexagonal compacto - Densidade: $\pi\sqrt{2}/6$



Onde se emprega a matemática

Todas as empresas que se interessam pelo condicionamento de objectos, de cereais, de pílulas...
Os físicos e engenheiros que se interessam pelos materiais e pelos empilhamentos de átomos. Os empilhamentos são também utilizados nos códigos informáticos de mensagens e nas suas correcções automáticas (códigos de Hamming)!

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Empilhamentos - Densidade - Kepler - Hale

Poliedros

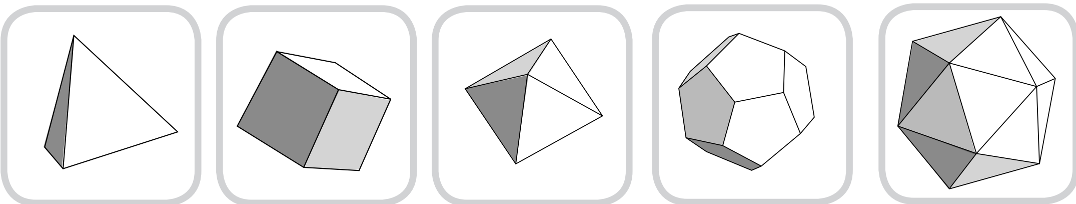
Faça você mesmo

MATERIAL: Padrões de poliedros, Tesoura ou x-acto, cola

40 41 42 43 44

Construa poliedros

- A partir dum padrão em cartão ou de polígonos regulares montados, construa os 5 poliedros de Platão, um duplo tetraedro, uma pirâmide de base quadrada...
- Escolha um poliedro e faça-o rodar.
- Quantas faces tem? e vértices? e arestas?



Preencha a tabela abaixo:

Poliedro	Faces	Vértices	Arestas
cubo	6	8	12
...			

... Existe uma relação entre estes números?

Que reter?

Um poliedro regular é um sólido cujas faces são feitas dum mesmo polígono regular, repartidas da mesma maneira em torno de cada vértice.

Existem 5, que se designam os **sólidos de Platão**.
É semi-regular se as faces são feitas de 2 ou 3 tipos de polígonos regulares. Existem 13, chamados **sólidos arquimedianos**.

Para os poliedros convexos, regulares ou não, existe uma relação entre os números de Vértices, de Arestas e de Faces:
V + F = A + 2.
Foi descoberta por **Euler** em 1752.

- O que se passa com um grafo plano?
- E com um sólido com um orifício? E com dois orifícios?

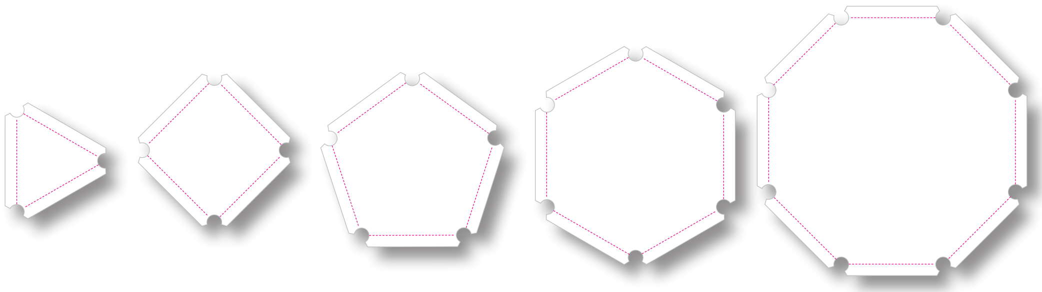
Faça você mesmo

MATERIAL: Padrões de polígonos, folhas de cartão, tesoura, 1 pinça, elásticos

45 46 47 48 49

Construa, conclua...

- Por grupo, recorte polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 ou 8 lados, como indicado.
- Una para construir um poliedro regular, semi-regular.
- Quantos poliedros regulares diferentes se podem construir? e semi-regulares?



Onde se emprega a matemática

Estas estruturas do espaço são utilizadas pelos arquitectos. Mas também se encontram na natureza e interessam também aos físicos (empilhamentos), aos biólogos e aos naturalistas (com as diatomáceas).

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Poliedros - Euler - Platão - Arquimedes

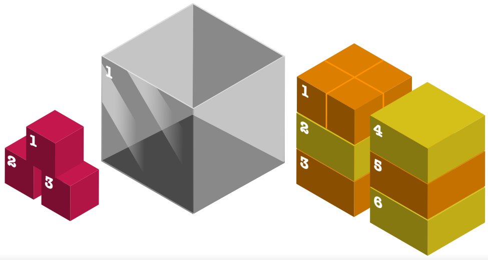
Problemas complexos

Faça você mesmo

MATERIAL: 3 pequenos cubos de madeira (de espuma ou...), 6 placas (do mesmo material) feitas de 4 cubos achatados, 1 recipiente de 3x3x3

Encha o recipiente!

O desafio: encha o recipiente de 3x3x3 unidades com estes dois tipos de caixas!



Que reter?

Na vida quotidiana, confrontamo-nos regularmente com este problema: meter o máximo de objectos numa caixa ou o máximo de caixas num recipiente.
Para os matemáticos – entre outros - é um **problema complexo:** quanto mais objectos existem, mais tempo é necessário para encontrar uma solução. E este tempo aumenta de maneira exponencial com o número de objectos.

Faça você mesmo

MATERIAL: Uma mochila e objectos para lá colocar

O problema da mochila

O desafio: preencha a mochila com objectos com o máximo valor, **sem ultrapassar o peso de 15 kg.**

Que reter?

Uma pirâmide 2 vezes mais alta tem um volume 8 vezes maior. Pode-se assim, por recomposição, comparar o volume destes dois tipos de pirâmides.
Com 3 alturas, pode-se mesmo deduzir a fórmula do volume de qualquer pirâmide:

$$\text{Volume} = \frac{\text{Base x Altura}}{3}$$

Com outros poliedros, o problema de empilhamento é, em geral, mais complicado.

Para ir mais longe
Determine os poliedros que, como o cubo, preenchem, por si sós, o espaço sem buracos nem deformações.

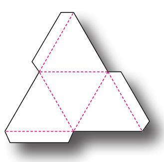
Faça você mesmo

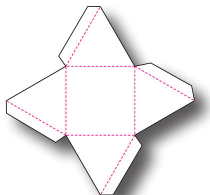
50 51

MATERIAL: 2 padrões de tetraedros, 1 x-acto ou 1 tesoura, 1 tubo de cola

A grande pirâmide

Construa **6 tetraedros regulares e 6 pirâmides de base quadrada** com as mesmas faces triangulares.
Com estas pequenas pirâmides, construa uma pirâmide duas vezes mais alta. Compare os volumes destas pirâmides.

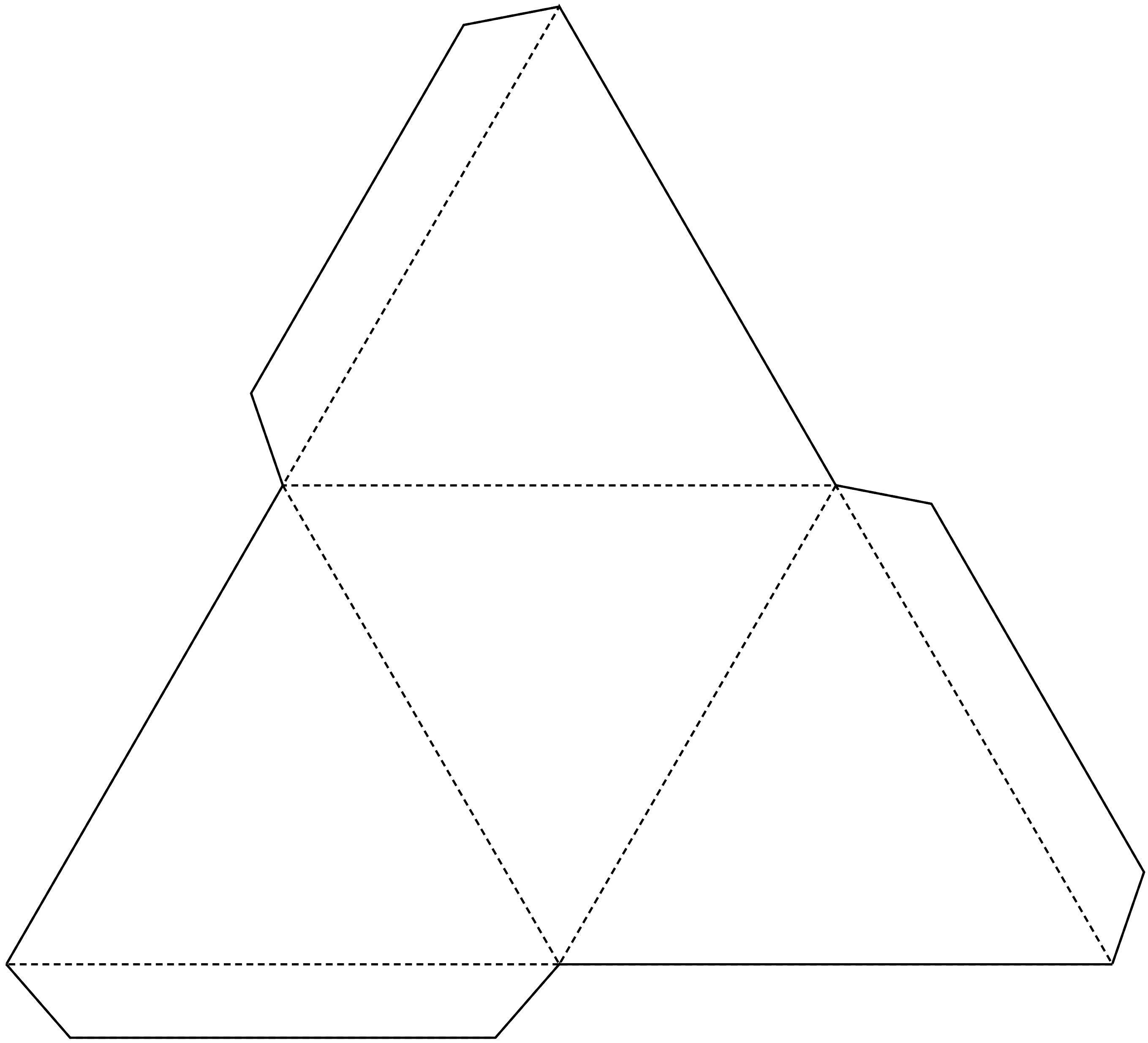


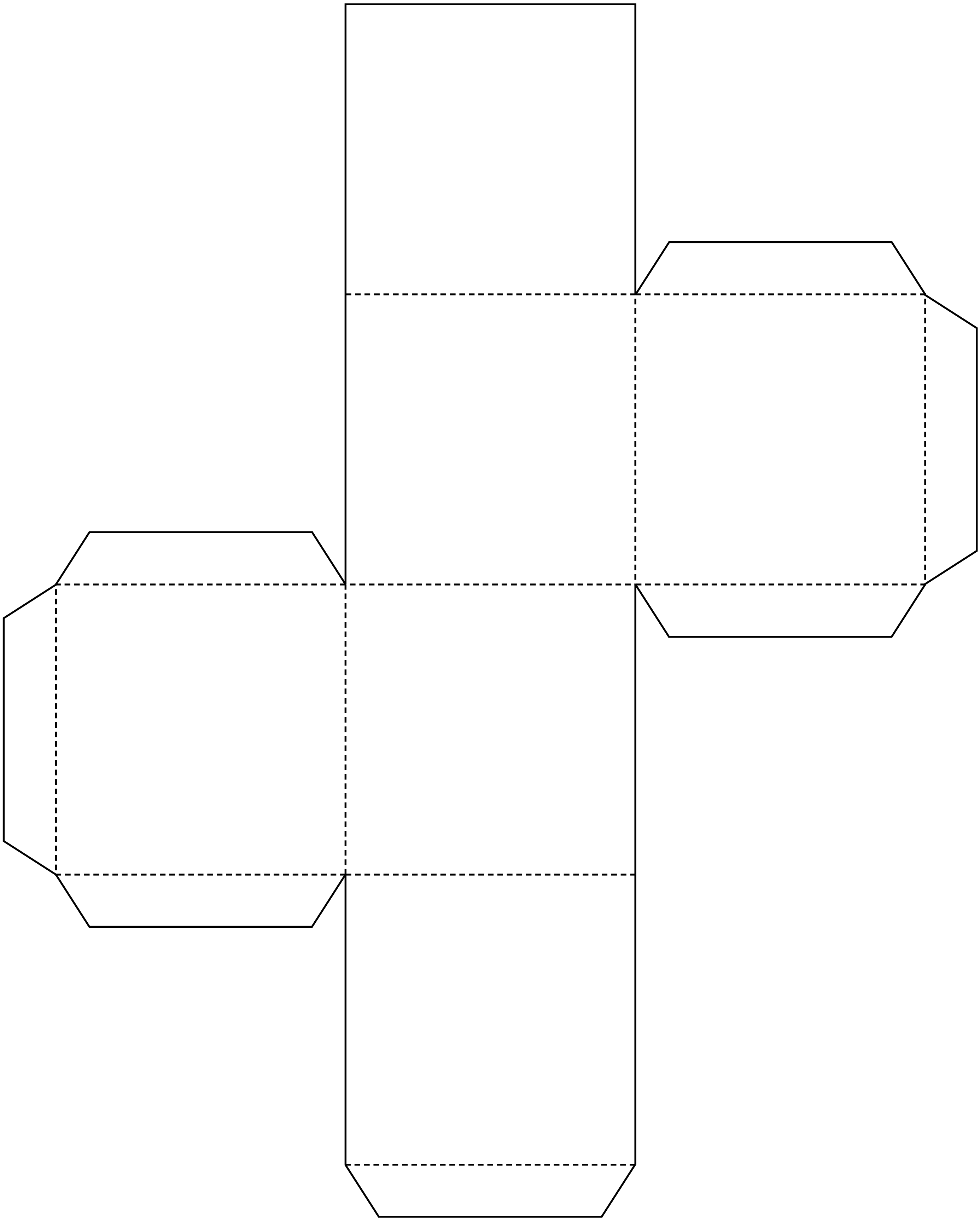


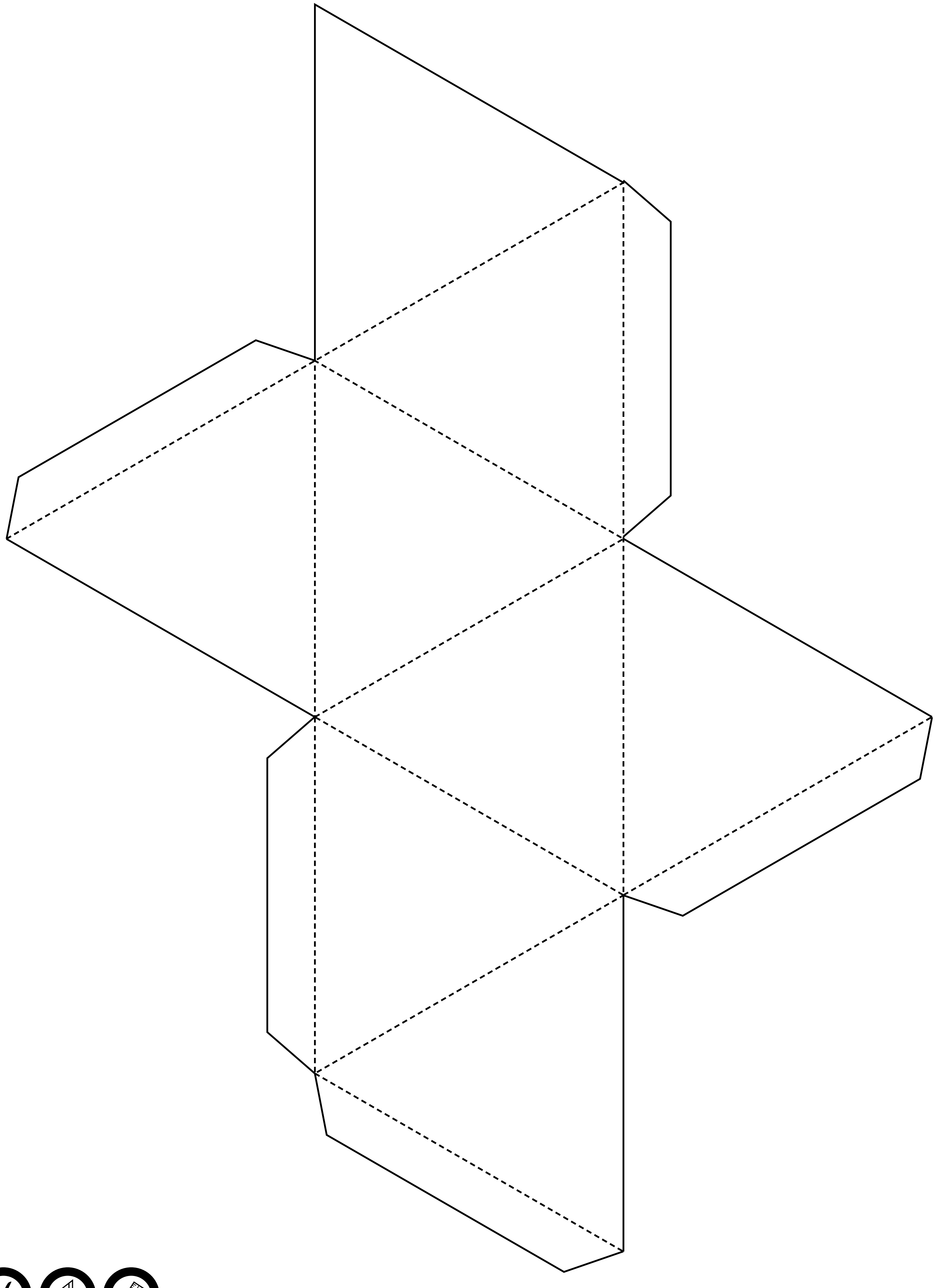
Onde se emprega a matemática

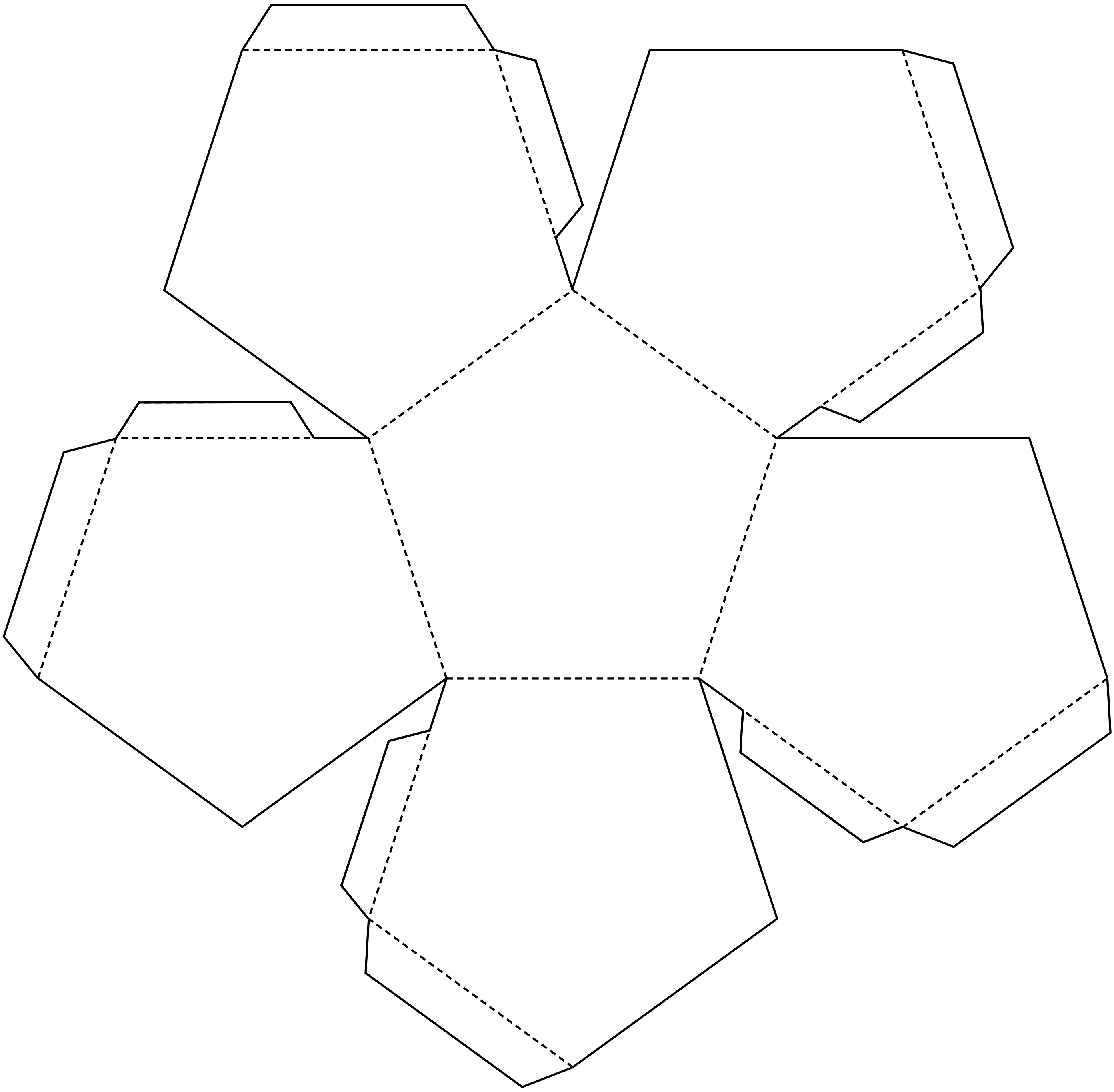
Além da vida corrente, estes problemas de preenchimento óptimo são tratados por todos os transportadores rodoviários, aéreos ou marítimos, por todas as empresas que fazem condicionamento.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Volume da pirâmide - Problema complexo - Problema NP

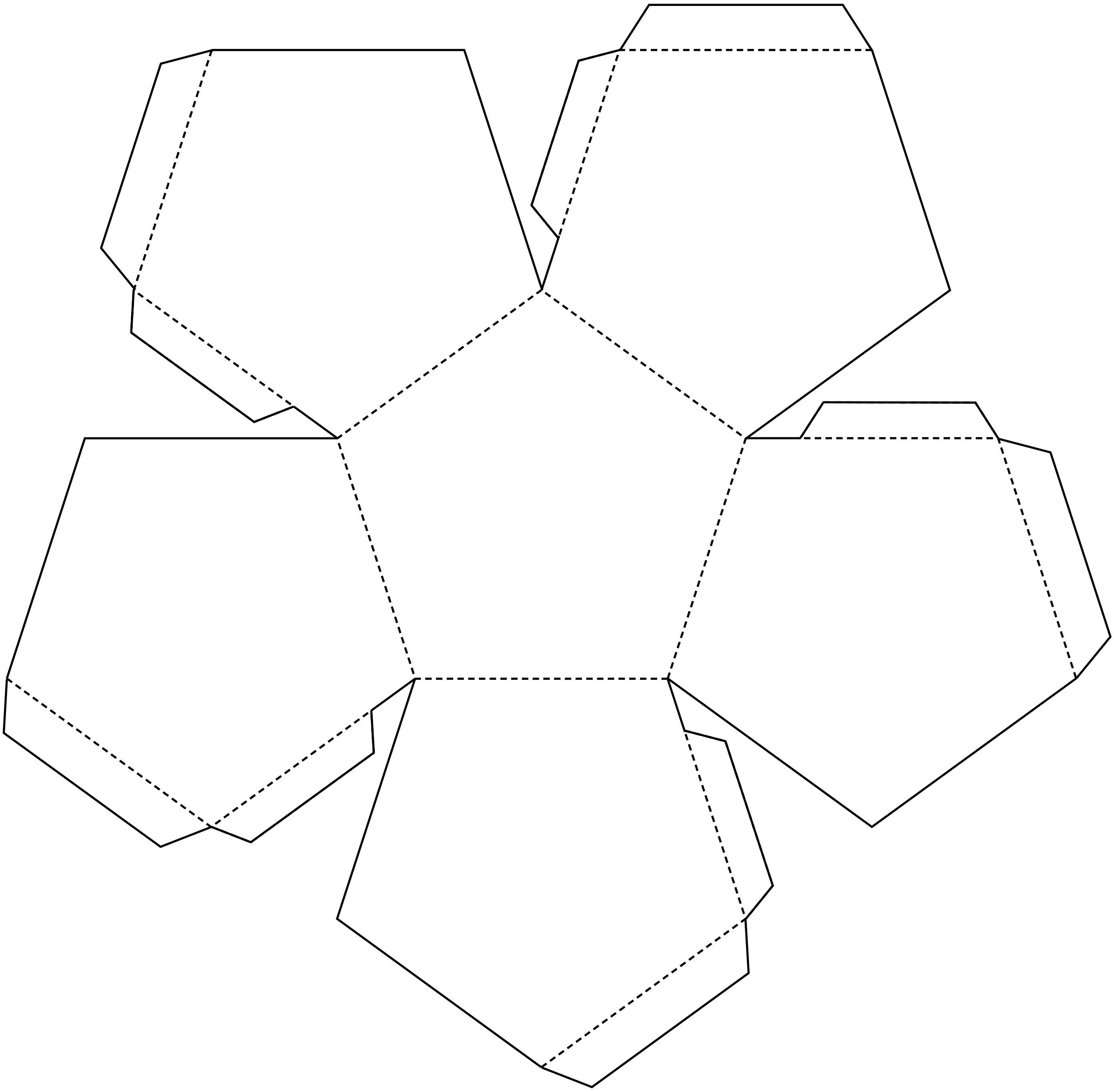




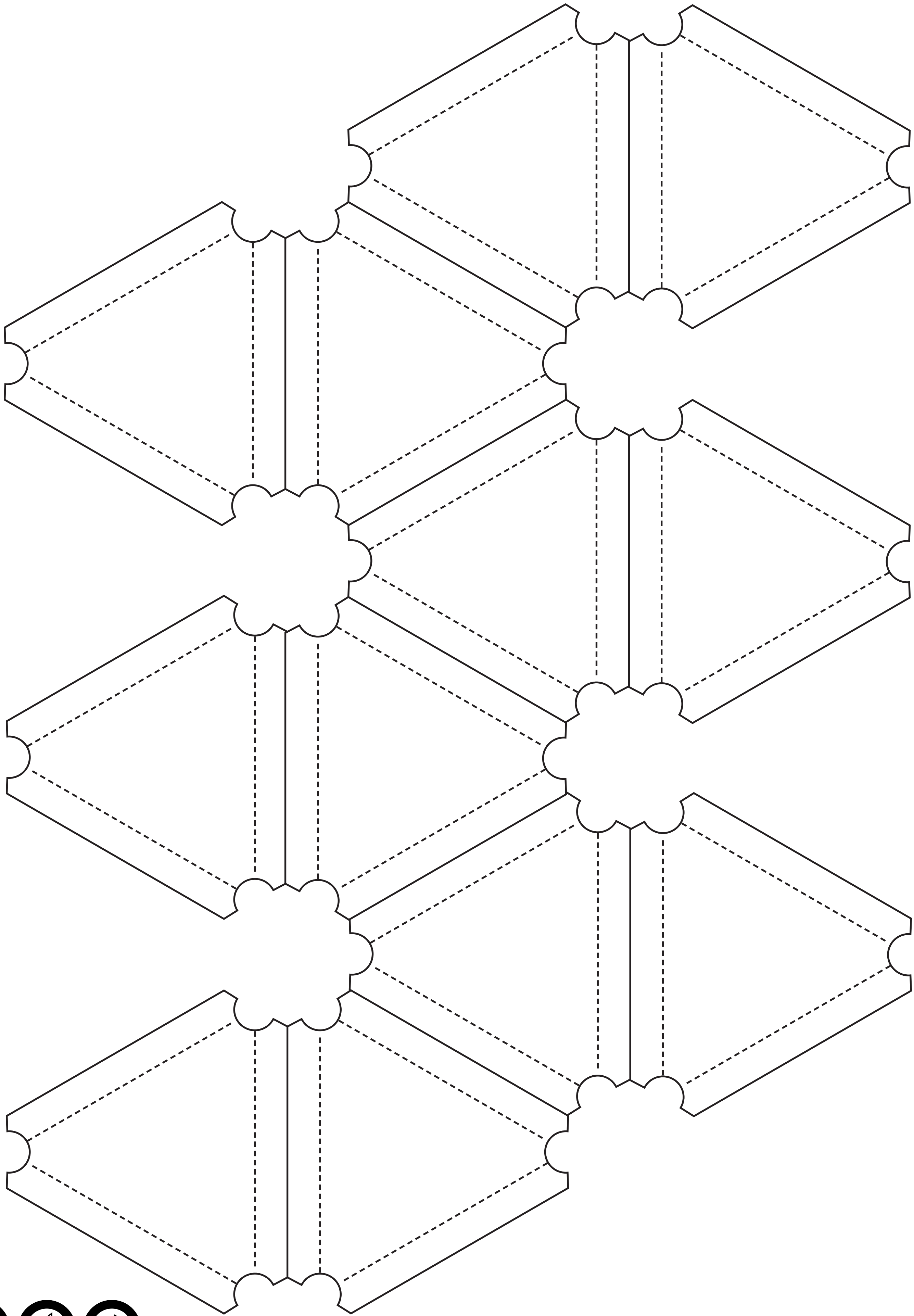


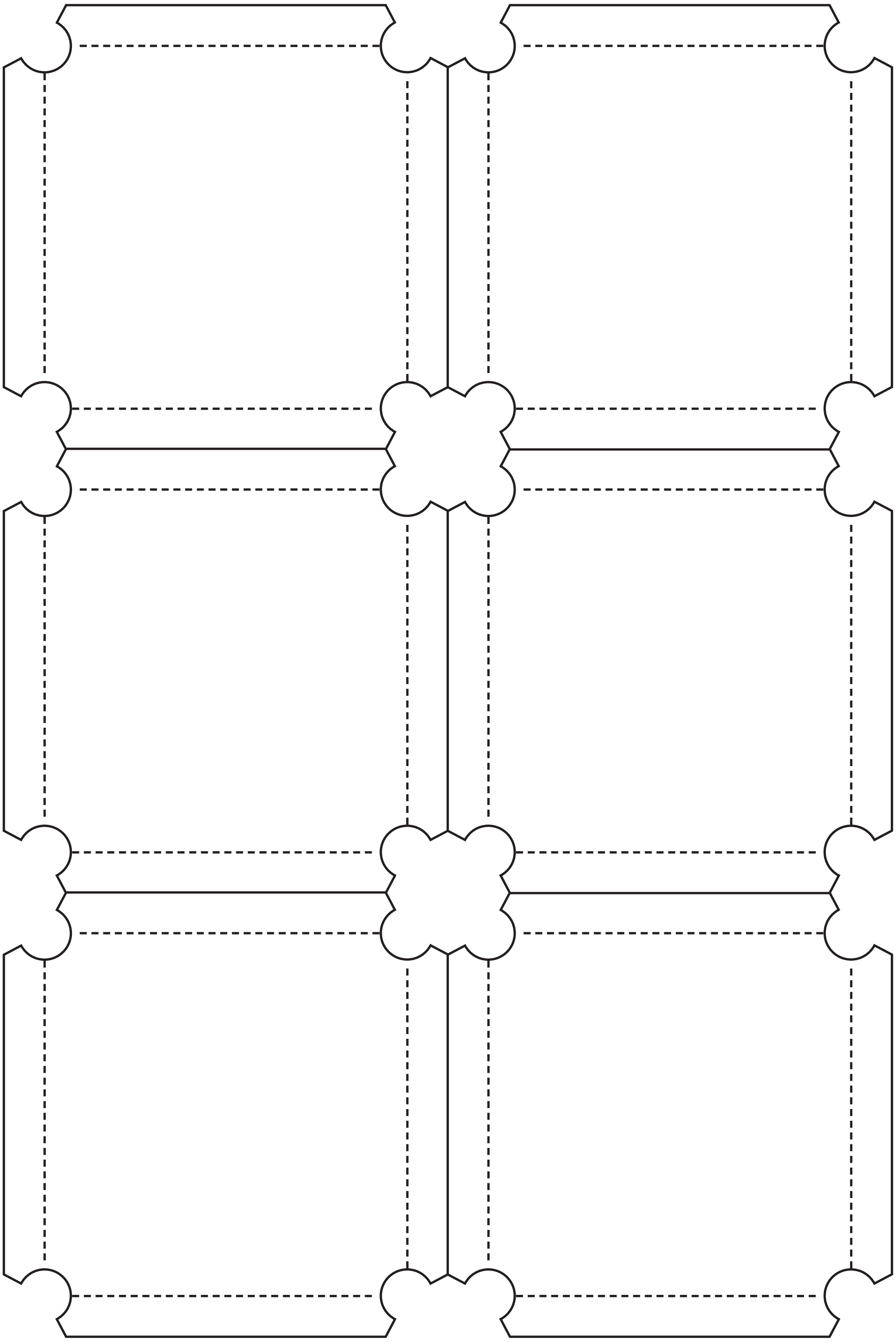


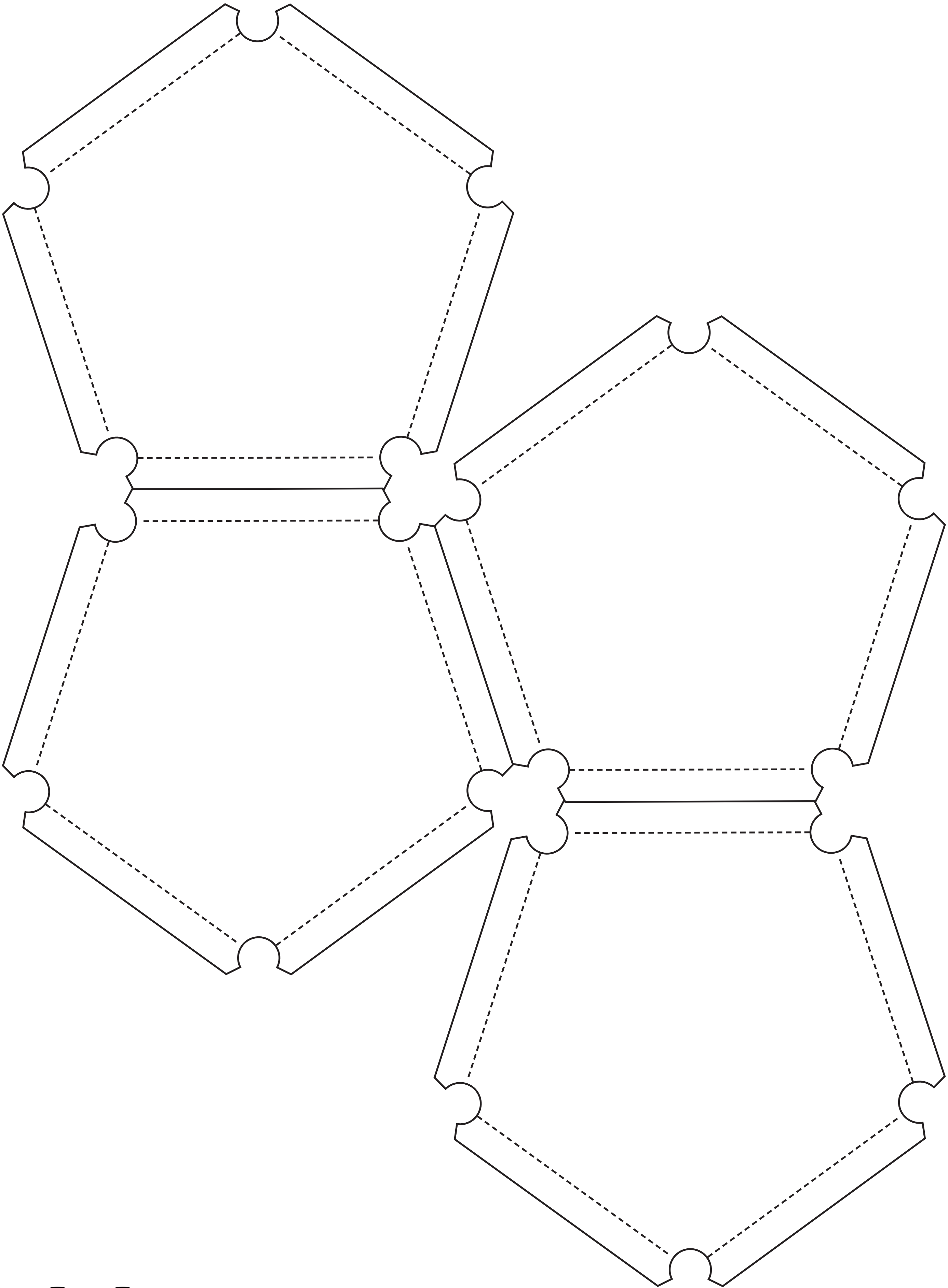
1/2

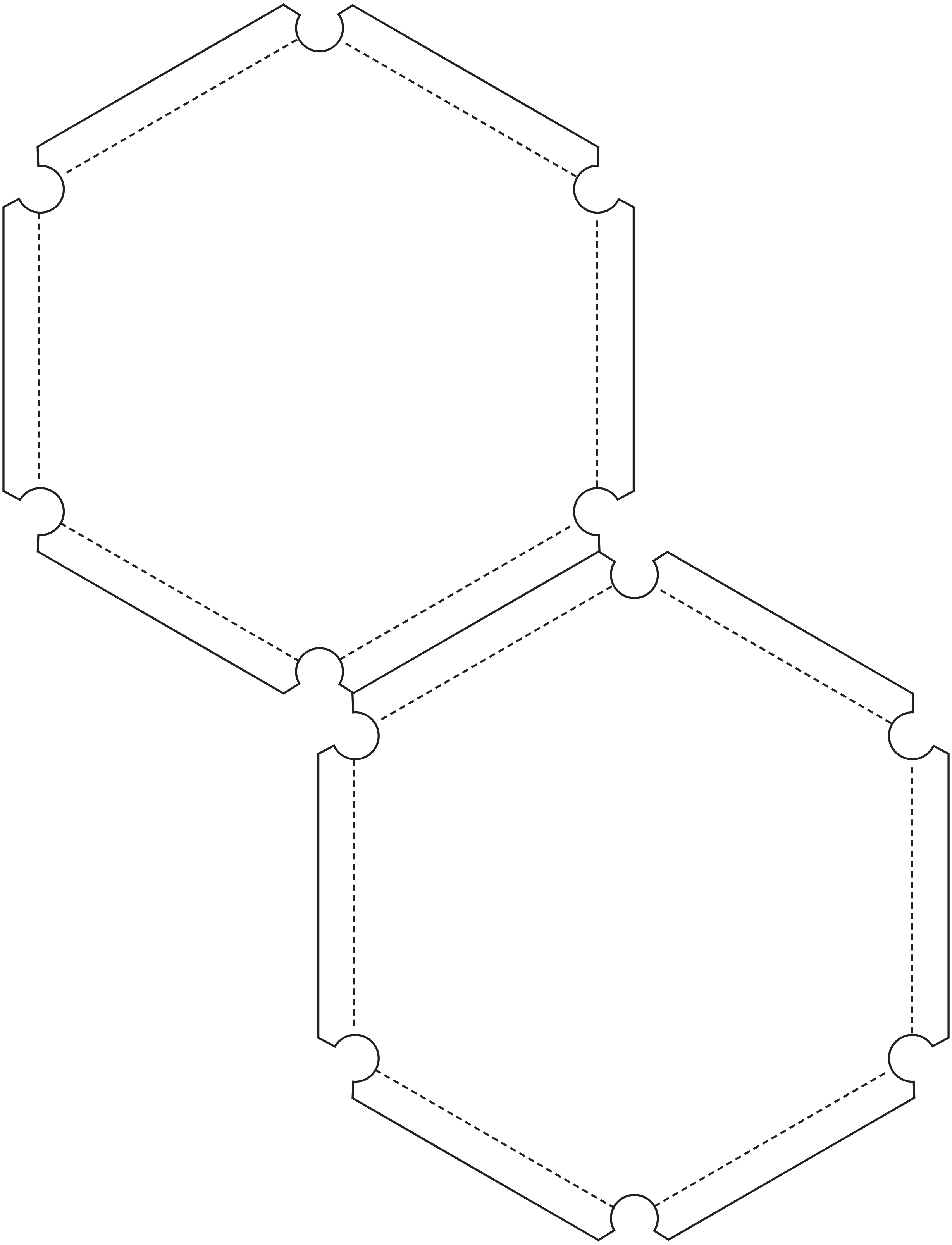


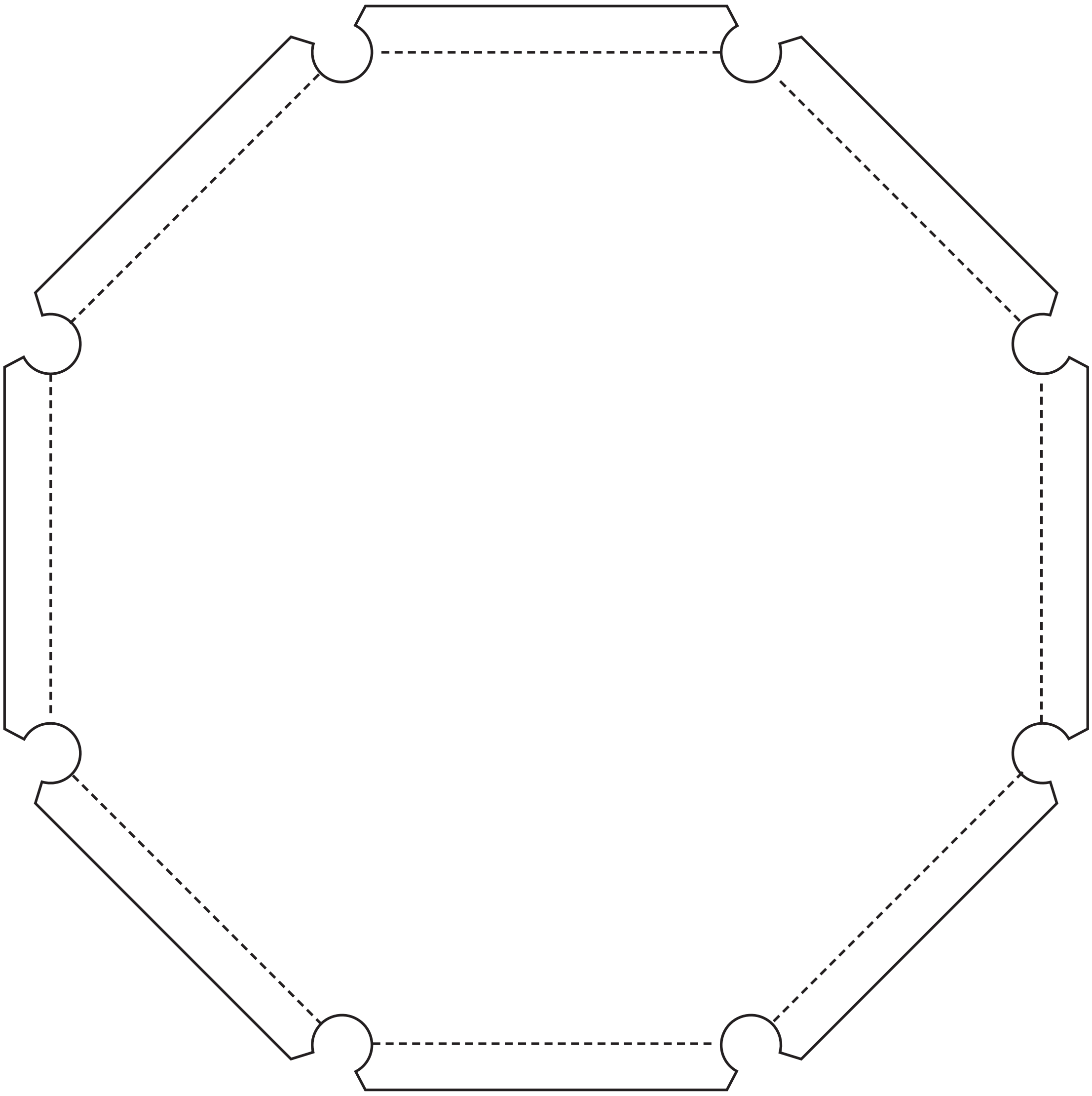
2/2

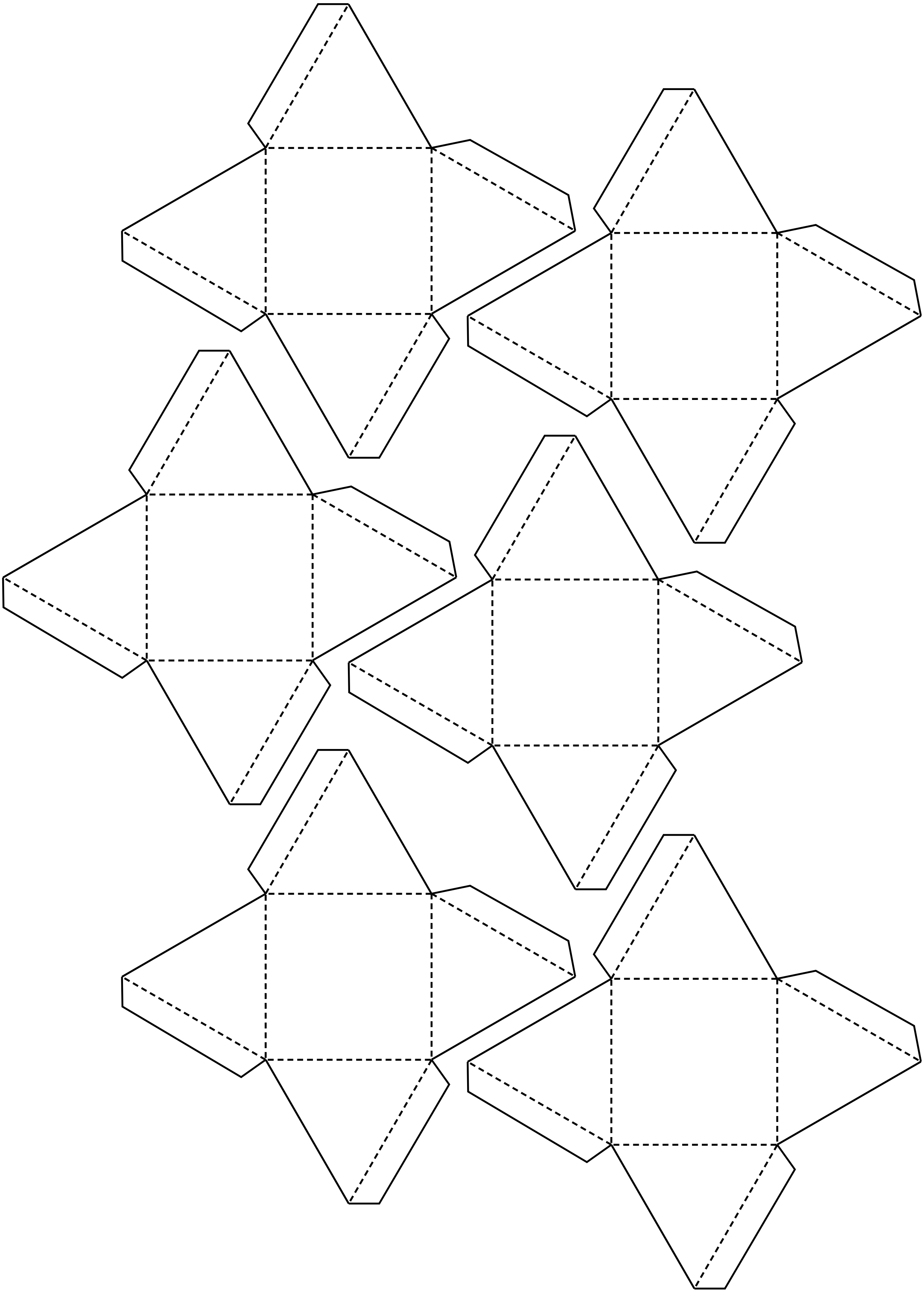


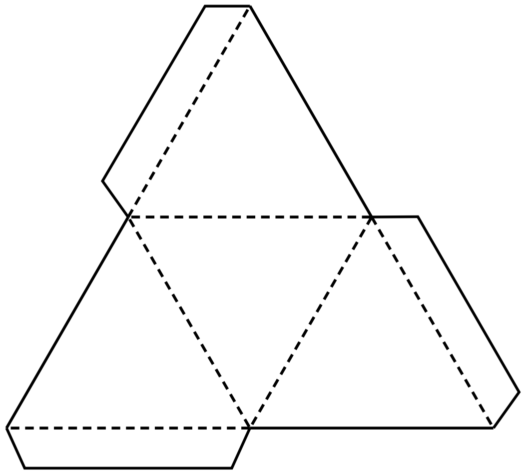


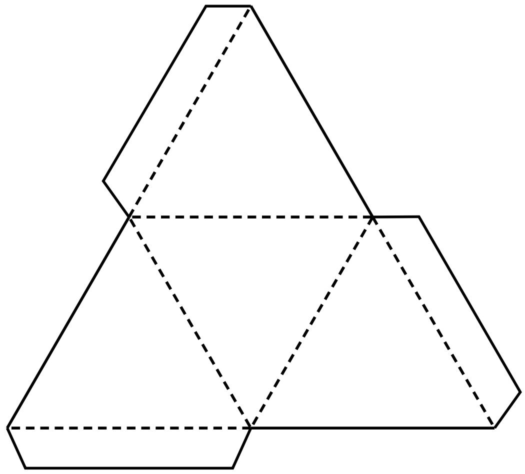


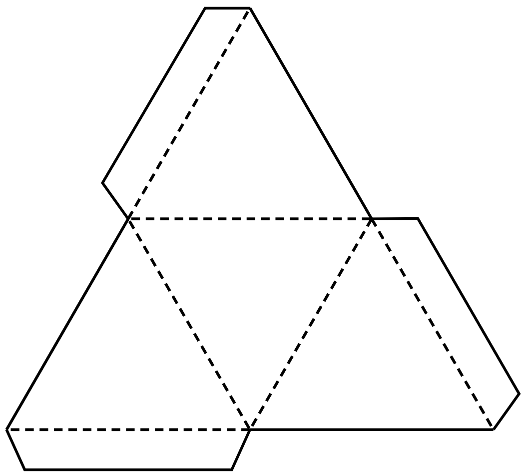


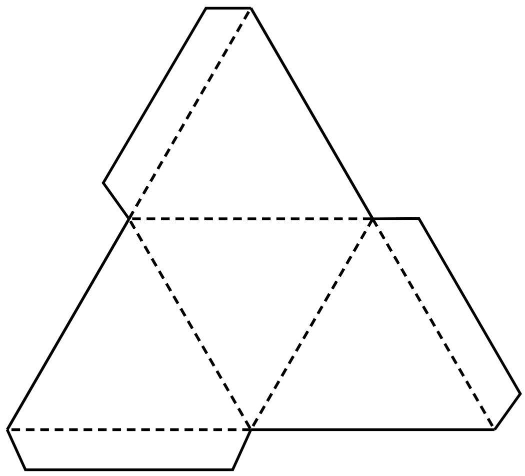


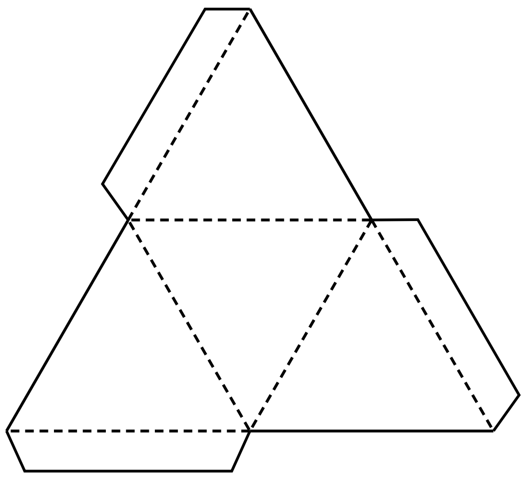


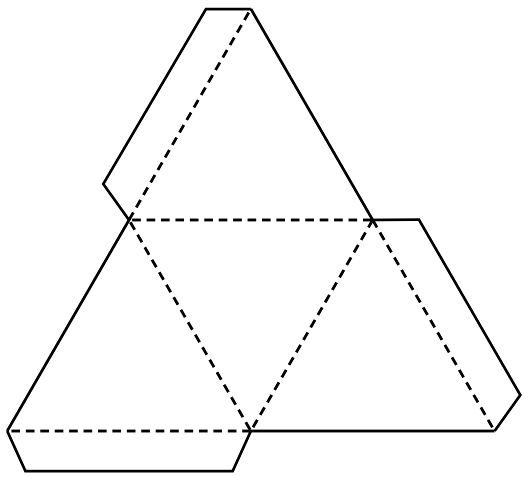




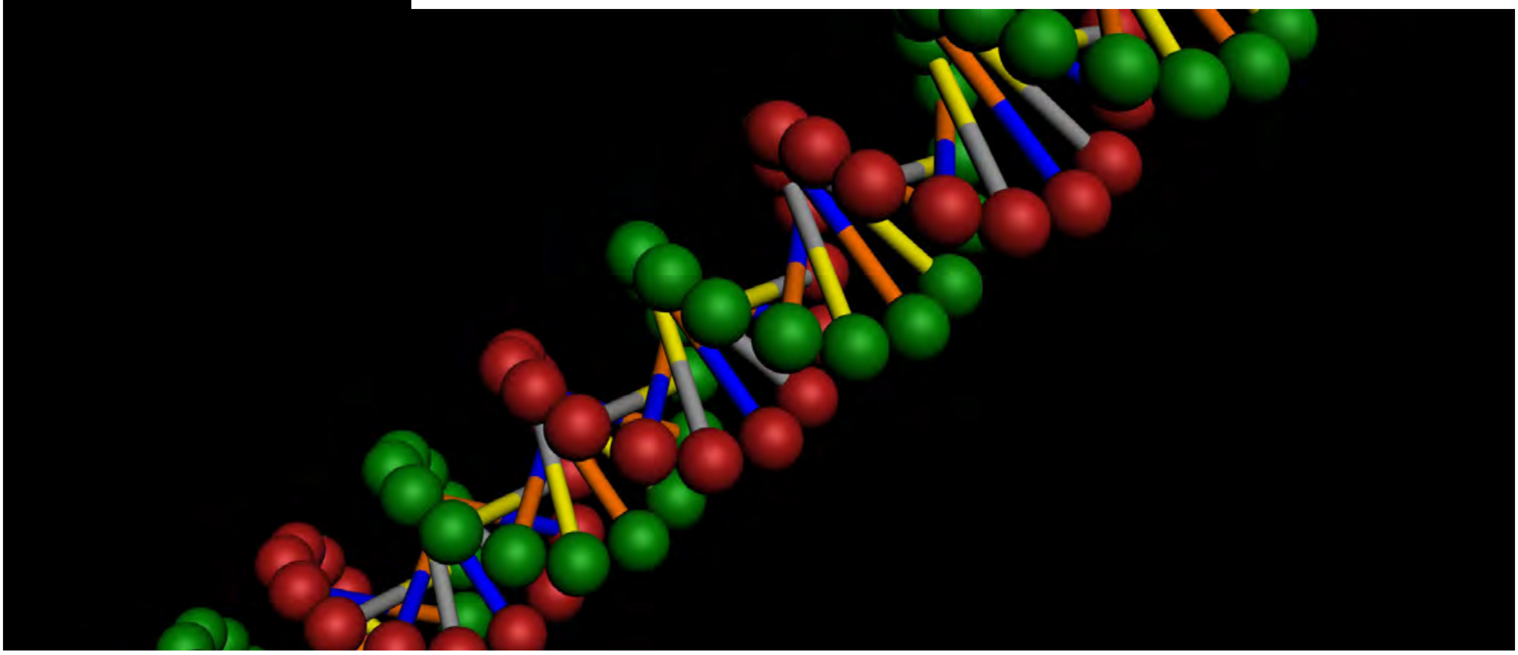








4.Ligar-se



De só um traço

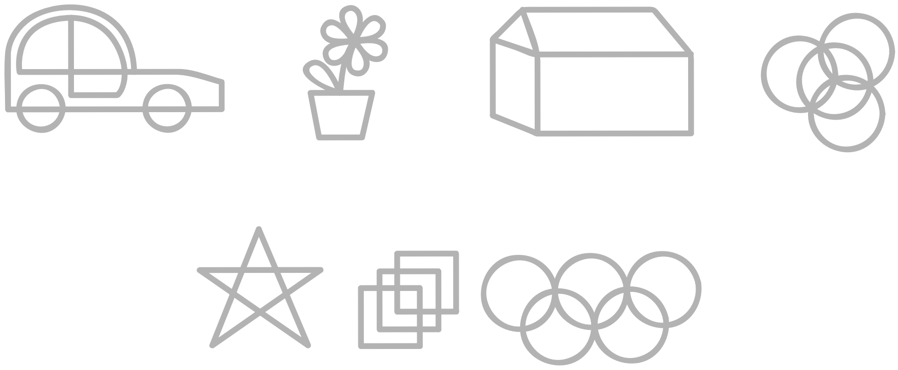
Faça você mesmo

MATERIAL: Modelos de desenhos, 1 lápis

57

Desenhe de um só traço!

Tente desenhar estas figuras sem levantar o “lápis” e sem passar duas vezes pela mesma linha.
Quando é isso possível? Impossível?



Faça você mesmo

MATERIAL: Um jogo de dominó sem as peças duplas

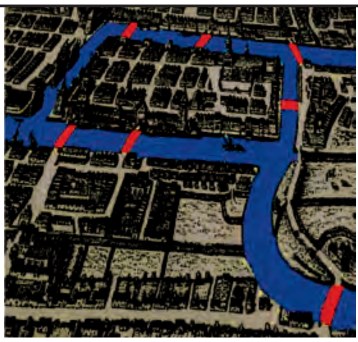
Dominós - Dominós

Tente encadear todas as peças do dominó, seguindo as regras do jogo. Recomece sem as peças que têm um 6, depois sem as que têm um 5, etc. É sempre possível? Porquê?
Cada peça do dominó representa a aresta dum grafo de 7 vértices, numerados de 0 a 6. Cada caminho euleriano corresponde a um encadeamento de dominós.

Onde se emprega a matemática

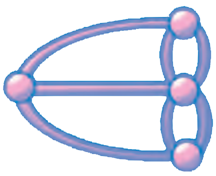
A teoria dos grafos é utilizada para modelar e estudar situações muito concretas tais como redes de telecomunicações, circuitos electrónicos, redes de distribuição – água, gás, electricidade, correios ...– e numerosos problemas de logística, transporte, produção.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Grafos - Teoria dos grafos - Caminho euleriano - Euler



Que reter?

Königsberg*, 1736
É possível percorrer a cidade atravessando cada uma das suas sete pontes uma única vez?
Para resolver este problema, que está na origem da teoria dos grafos, **Euler** reteve apenas a informação essencial: há quatro bairros separados pela água do rio, ou seja, quatro “pontos” a unir por 7 traços que simbolizam as pontes.
O problema ficou: existe, neste desenho, um caminho passando uma única vez por cada traço?
Isto foi o início da **teoria dos grafos**.
Resposta de **Euler**: quantos pontos existem onde termina um número ímpar de traços?
A solução só existe se esse número for igual a zero ou a dois!



Questão :
E se acrescentarmos uma ponte ligando uma ilha a uma das margens (como é o caso na actualidade)?

**hoje Kaliningrado (região russa separada da Rússia pela Polónia e pela Lituânia)*

4.Ligar-se

Quatro cores chegam!

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 mapa, 4 lápis ou canetas de feltro 58

Com apenas 4 cores!!!

Um ou dois jogadores
Tente colorir este mapa utilizando o menor número possível de cores.
A regra: 2 países vizinhos devem ter cores diferentes. Mesmo o mar conta!
Perde aquele que já não puder jogar.

Faça você mesmo

MATERIAL: Poliedros (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, pirâmide de base quadrada...), lápis ou canetas de feltro de 4 cores 59 60 61 62 63

E no espaço?

Construa um poliedro regular (ou outro) respeitando a regra das 4 cores: duas faces vizinhas devem ter cores diferentes.
Do mesmo modo, tente construir um poliedro com um buraco e tente dividi-lo em 7 regiões, necessitando de 7 cores diferentes.

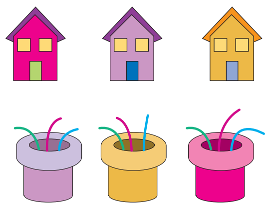
Faça você mesmo

MATERIAL: 1 desenho no plano e sobre um toro

3 poços & 3 casas

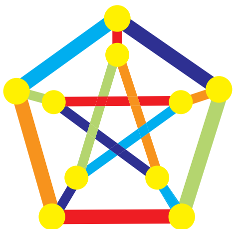
Em cada caso, tente ligar estes três poços e estas três casas por 3 canalizações de superfície sem que as canalizações se cruzem.

Questão: e se juntarmos um 4º poço e uma 4ª casa?



Que reter?

O teorema das 4 cores
A teoria dos grafos permitiu modelar este problema e reduzir o número de casos a estudar. Mas foi graças ao computador que se puderam analisar todas as situações e mostrar que 4 cores bastam.
É possível encontrar um algoritmo para colorir automaticamente com 6 cores. Mas o problema ainda não foi resolvido com 4 cores. Trata-se dum problema “complexo”: o tempo de resolução por algoritmos cresce de maneira exponencial em função do número de “países”.
Algoritmos não deterministas (como os algoritmos genéticos) permitem uma resolução mais rápida.



Questão
Um lobo, uma cabra e uma couve estão na margem direita de um rio. Um barqueiro deve transportá-los para a outra margem do rio, mas só pode transportar um de cada vez. Ajude-o!
Atenção! O lobo come a cabra e a cabra come a couve!!

Onde se emprega a matemática

Estes algoritmos procuram resolver problemas de agrupamento de objectos, respeitando certas regras. Encontram aplicações práticas na elaboração de programas de tarefas (calendários de operações, de horários, de exames...), de redes telefónicas fixas ou móveis, de redes de comunicação Internet, de transmissões seguras pela Web...

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Coloração de grafos - Algoritmos - Algoritmos genéticos

Alô! Estás a ouvir-me?

Faça você mesmo

MATERIAL: 2 mapas, 1 lápis

64

O caixeiro viajante

Um viajante quer visitar estas dez cidades, perdendo o menor tempo possível em transportes.
Deve partir duma cidade, e voltar lá, passando uma só vez por todas as outras.
Ajude-o a fazer a sua viagem.

	Atenas	Berlim	Bruxelas	Lisboa	Londres	Madrid	Oslo	Paris	Roma
Berlim	3								
Bruxelas	4	1							
Lisboa	5	4	3						
Londres	4	1	1	3					
Madrid	4	3	2	1	2				
Oslo	4	1	2	5	2	4			
Paris	3	2	1	2	1	2	2		
Roma	1	2	2	4	2	3	3	2	
Varsóvia	3	2	2	5	2	4	2	3	2

Que reter?

As distâncias podem ser medidas em tempo, em custo de percurso, em despesas de electricidade ou de água...
Este tipo de problemas, que tem um enunciado muito simples, tem soluções tanto mais custosas de calcular quanto maior for o número de cidades.
Se, com 10 cidades, são necessárias 60 etapas de cálculo, realizadas num microssegundo por um computador, com 100 cidades, seriam necessárias 2^{60} etapas de cálculo (2 multiplicado por 2 sessenta vezes) e centenas de anos de computador.
Quanto mais complexo for um algoritmo, mais "tempo de máquina" necessita.

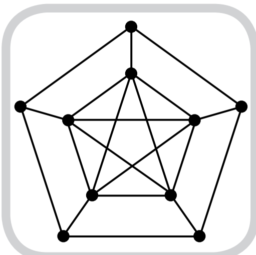
Faça você mesmo

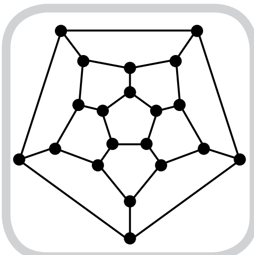
MATERIAL: Modelos de desenhos, Poliedros para fabricar, 1 lápis, 1 fio

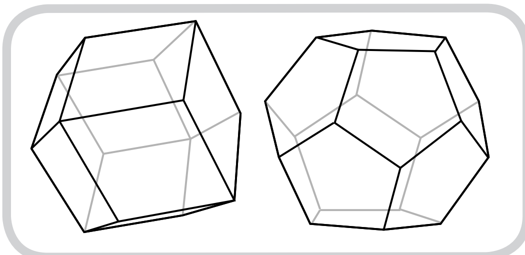
62 63 65 66

A volta ao mundo

Escolha uma figura ou um poliedro e tente encontrar um caminho que passe uma vez, e uma só, por cada um dos vértices.







Que reter?

Encontrar um caminho hamiltoniano, é encontrar um caminho que passe uma só vez por cada vértice. Este tipo de problemas ainda não tem solução geral. É um problema complexo.
Hamilton mostrou que há soluções para os vinte vértices dum dodecaedro regular (feito de 12 pentágonos). Passa-se o mesmo com o outro dodecaedro (feito de 12 losangos)?

4.Ligar-se

Alô! Estás a ouvir-me?

Faça você mesmo

MATERIAL: Um tabuleiro de xadrez, peças para recortar, 1 tesoura

67 68

Cheque às damas?

- Tente colocar oito rainhas num tabuleiro de xadrez sem que nenhuma delas possa tomar outra.
- Tente deslocar um rei de casa em casa de modo a percorrer uma só vez todas as casas (sem fazer diagonais).
- Tente deslocar um cavalo num tabuleiro de xadrez passando em todas as casas uma única vez.

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 lápis

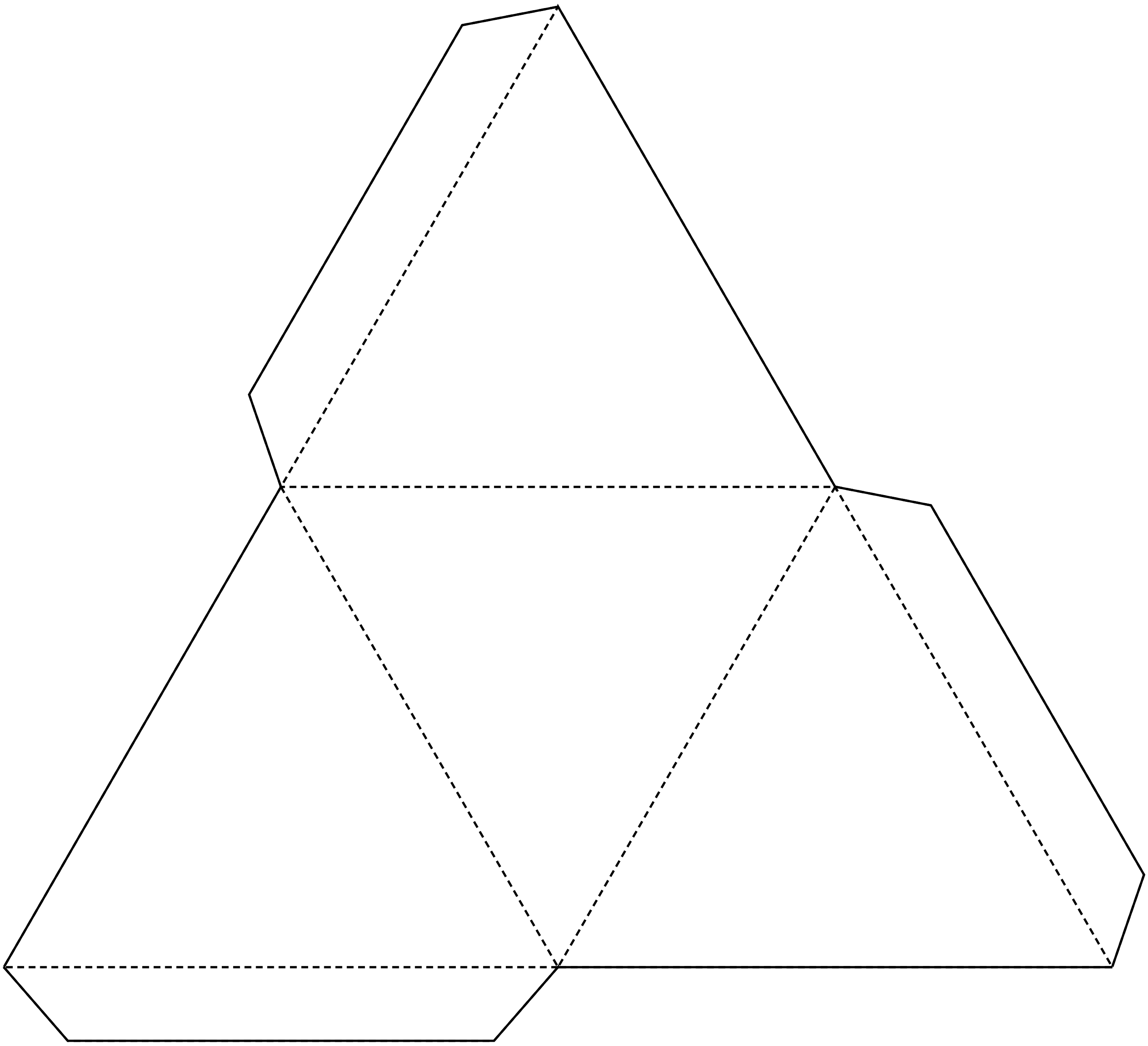
Do rato à mula

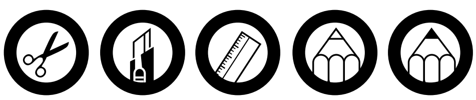
Passe da palavra RATO à palavra MULA, alterando só uma letra de cada vez, e faça-o o mais rapidamente possível! E de DEZ a MIL?

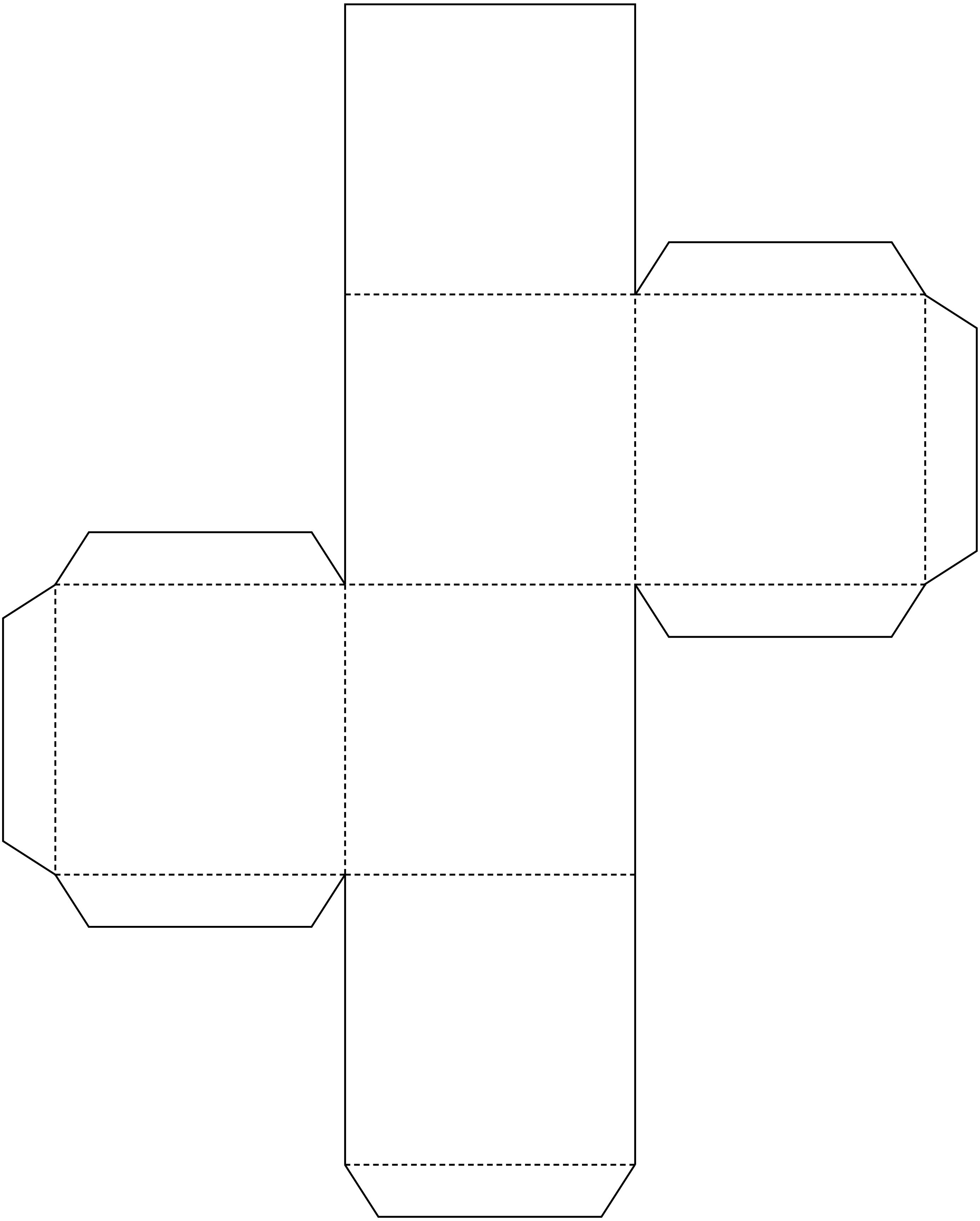
Onde se emprega a matemática

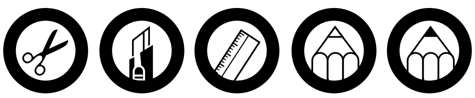
Numerosas investigações são feitas por matemáticos, informáticos, geneticistas com vista a encontrar algoritmos eficazes que possam resolver estes problemas complexos... como o estudo da sequenciação das 30.000 a 100.000 bases (A-T C-G) duma molécula de ADN.

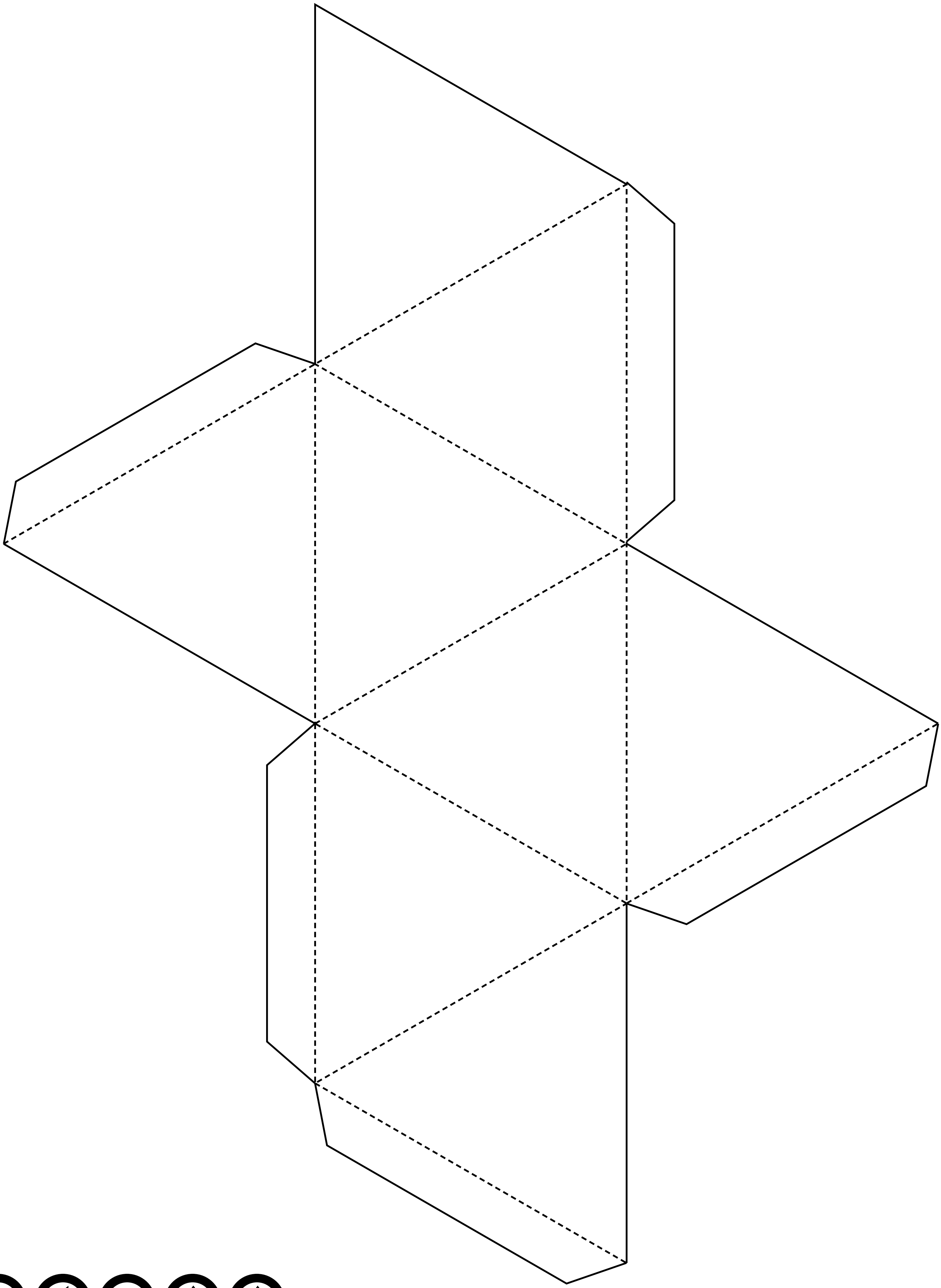
PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Grafos - Caminho hamiltoniano - Caixeiro viajante - Optimização

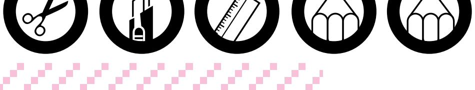


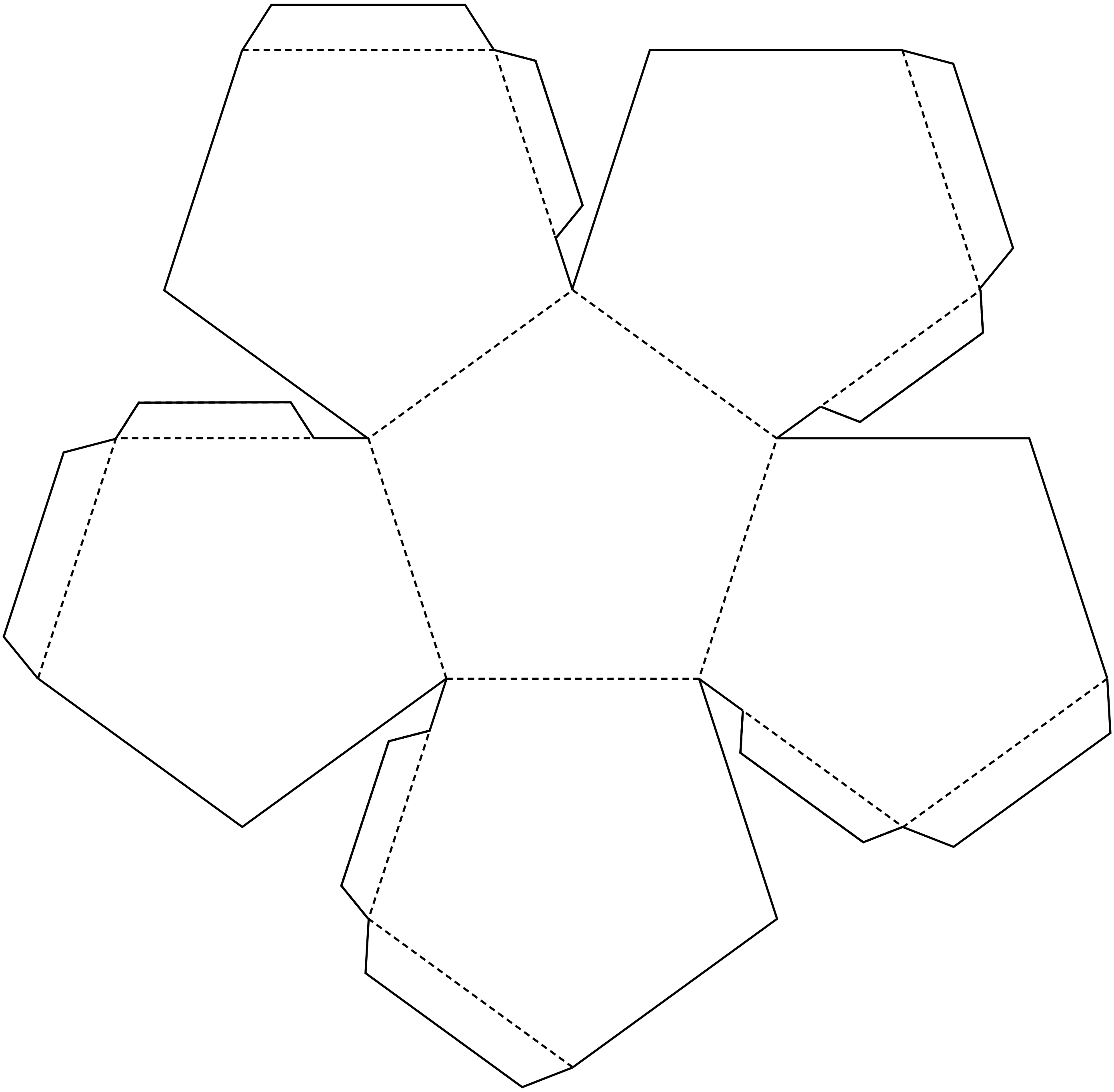




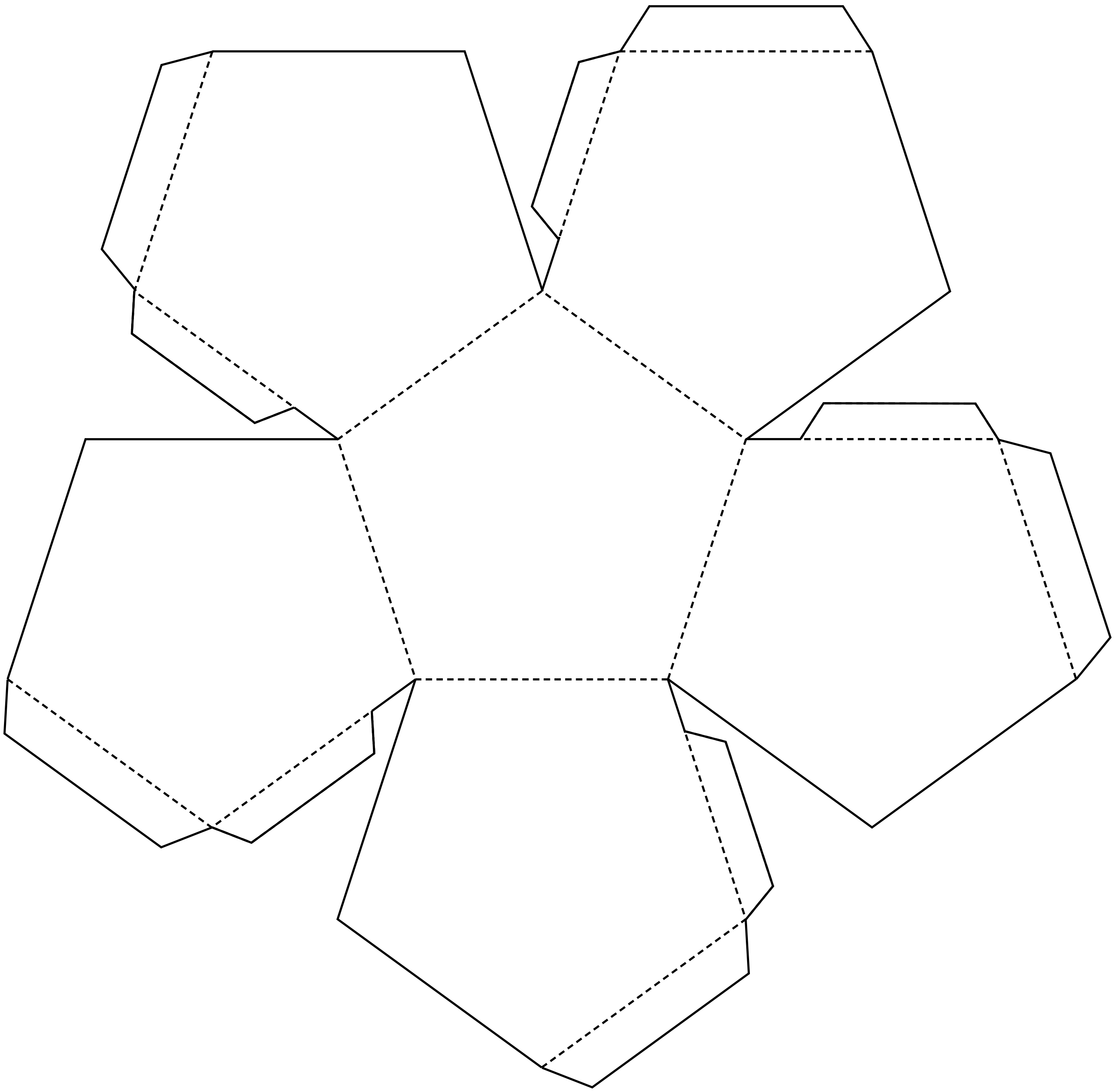






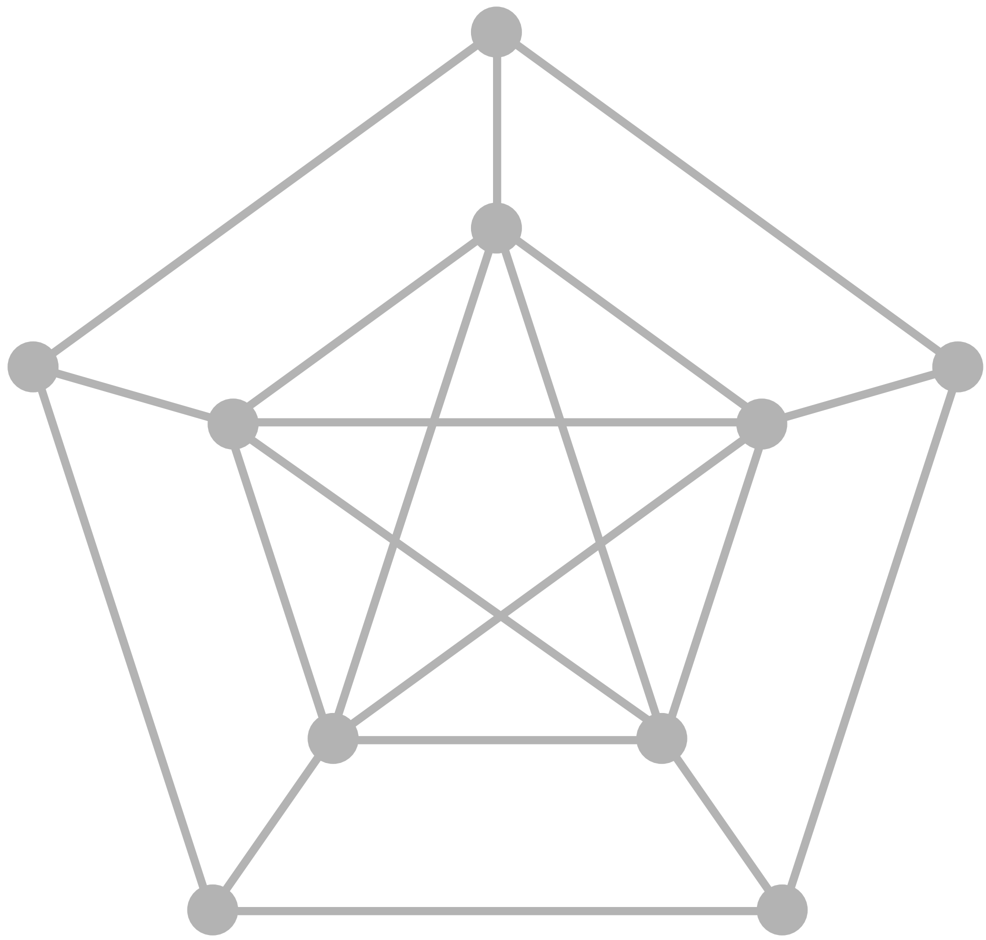


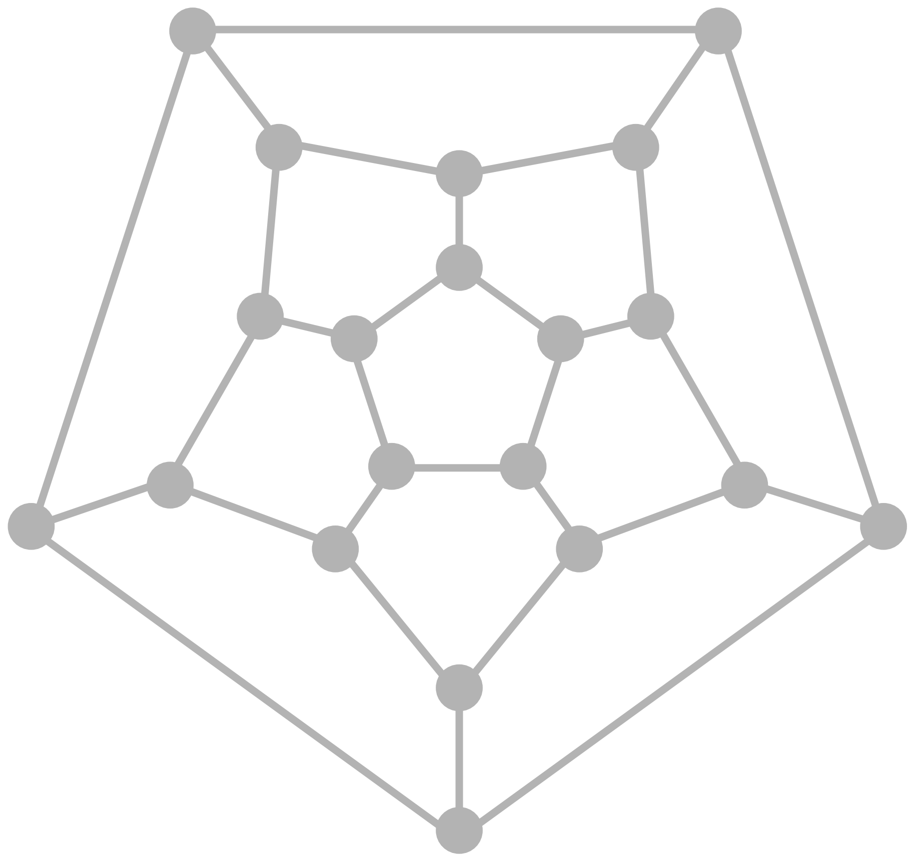
1/2

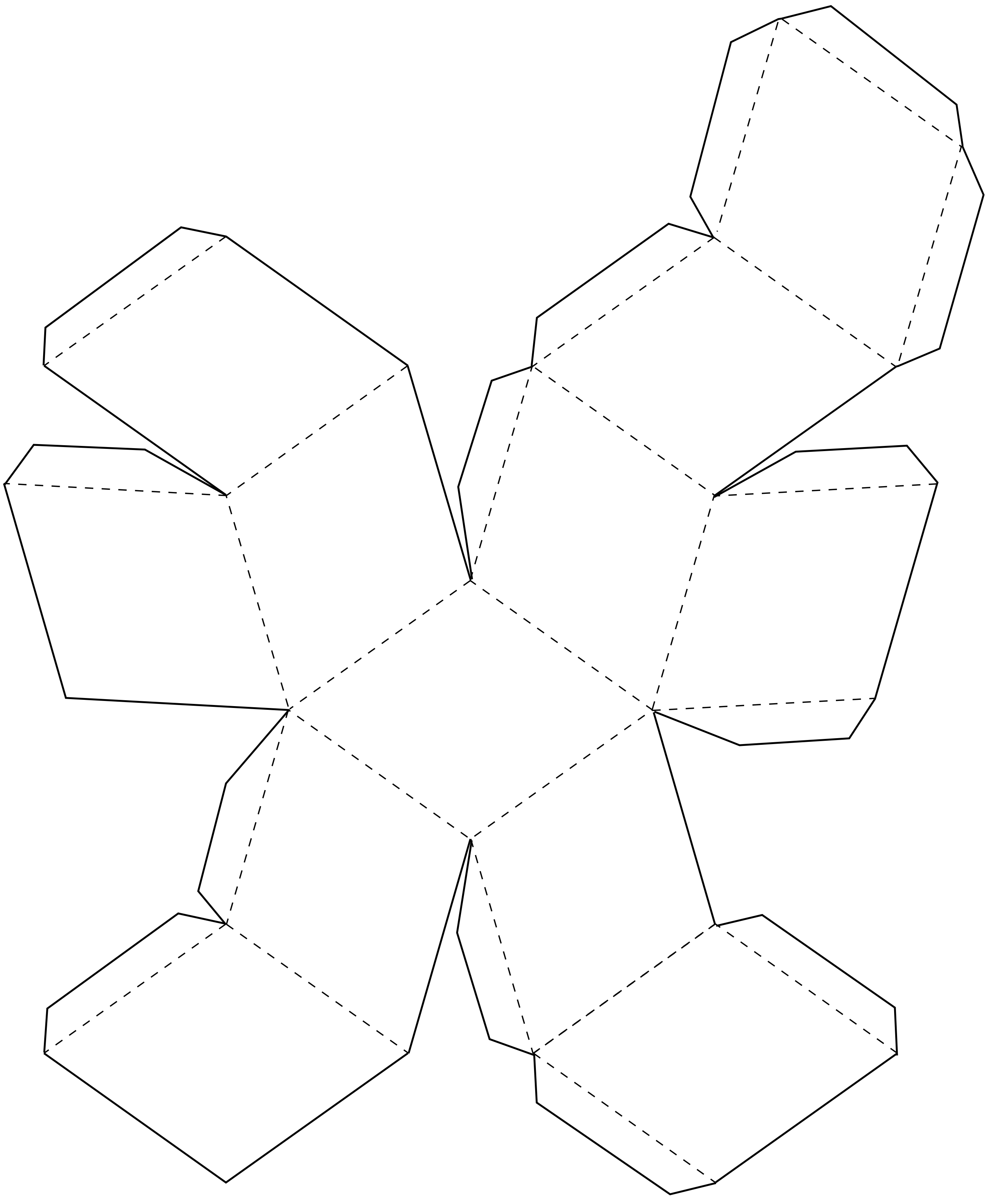


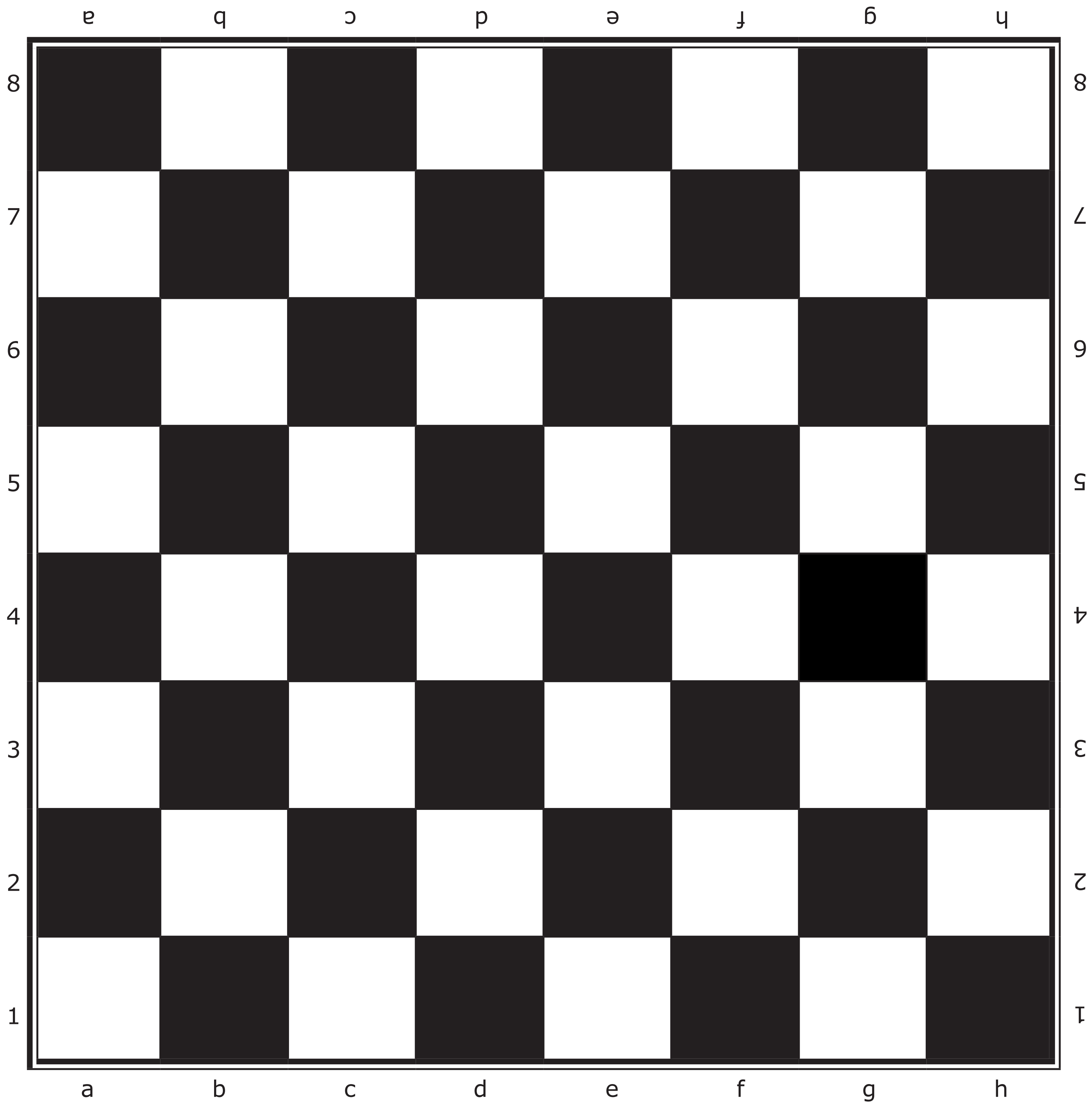
2/2

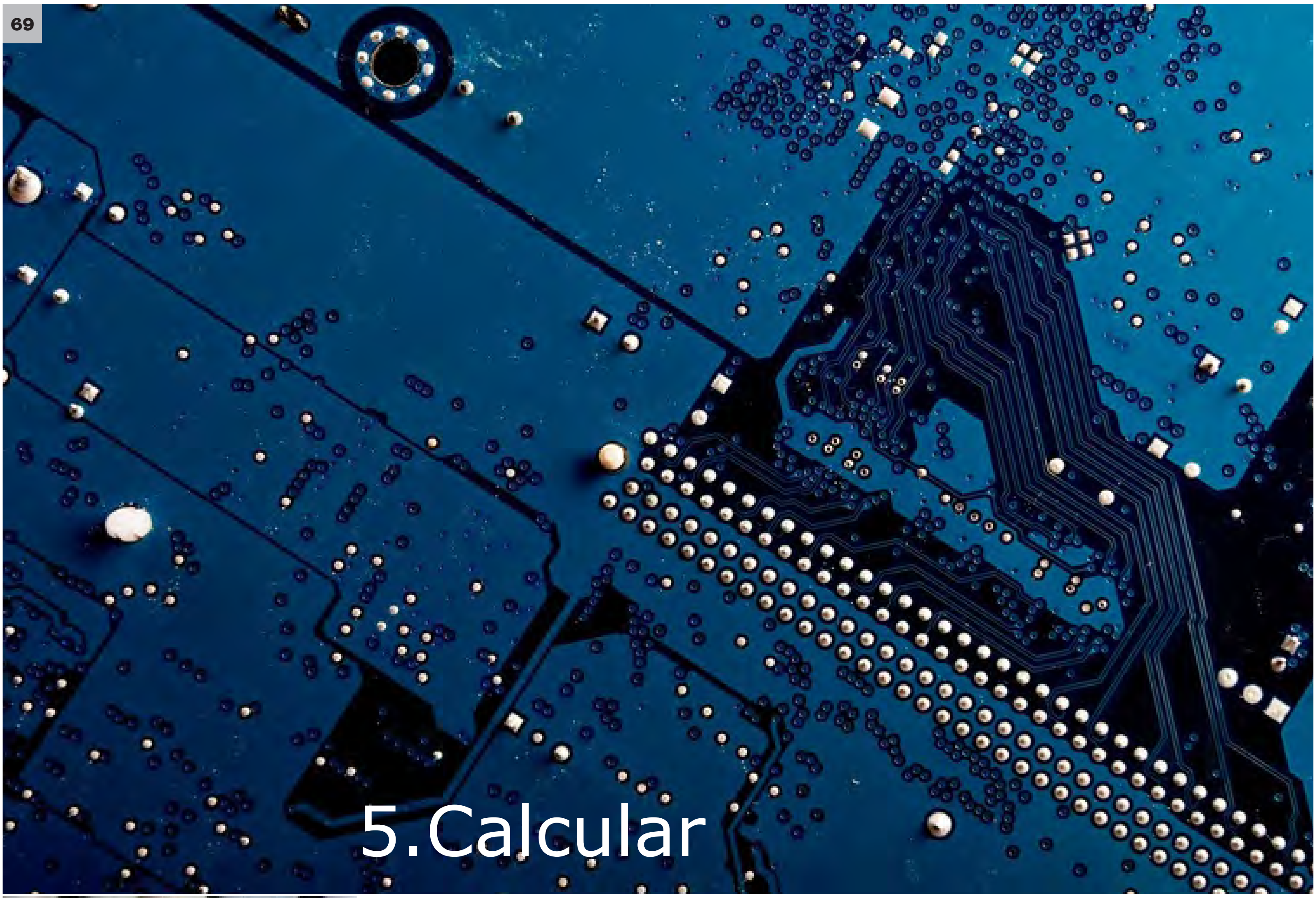
Atenas									
3	**Berlim**								
4	1	**Bruxelas**							
5	4	3	**Lisboa**						
4	1	1	3	**Londres**					
4	3	2	1	2	**Madrid**				
4	1	2	5	2	4	**Oslo**			
3	2	1	2	1	2	2	**Paris**		
1	2	2	4	2	3	3	2	**Roma**	
3	2	2	5	2	4	2	3	2	**Varsóvia**







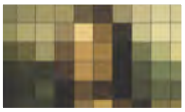

a b c d e f g h
8 7 6 5 4 3 2 1



5.Calcular

Com a cabeça e as mãos

Números primos



Imagens digitais

5.Calcular

Com a cabeça e as mãos

Faça você mesmo

MATERIAL: Os dez dedos das duas mãos!!!

Conte com os dedos!

9X1... 9X2... 9X3... **9 X 4 =** 

As duas mãos abertas em frente de si, contam-se os dedos até 4, come-çando na mão esquerda, e baixa-se o **4**º dedo.

- Lê-se: **3** dedos levantados à esquerda para as dezenas e **6** à direita para as unidades, isto é, **36**

dois números entre 5 e 10 **6 X 8 =** 

Conta-se até 6 com a mão esquerda. **1** dedo fica levantado.
Conta-se até 8 com a mão direita. **3** dedos ficam levantados.

- Resultado: **3+1** que faz **4** dezenas e **4x2** para os dedos que ficaram baixados, que faz 8 unidades: **48**

dois números entre 10 e 15 **13 X 14 =** 

Conta-se até 13 com a mão esquerda. 3 dedos ficam levantados.
Conta-se até 14 com a mão direita. 4 dedos ficam levantados.

- Resultado: **3+4** que faz **7** dezenas e **3x4** para as unidades: isto é, **100+70+12=182**

dois números entre 15 e 20 **17 X 19 =** 

Conta-se até 17 com a mão esquerda. 2 dedos ficam levantados.
Conta-se até 19 com a mão direita. 4 dedos ficam levantados.
Vejamos: **2+4** faz **6 quinzenas** e **2x4** para as unidades, isto é, **90+8=98**

- Resultado: **15x15 + 98 = 225 + 98 = 323**

Que reter?

Aprender a calcular, é começar por aprender as tabuadas da adição e da multiplicação até 10. Mas basta aprendê-las até 5 e, depois, saber contar com os dedos!

Assim, para (5+**a**)x(5+**b**) :

Para as dezenas, quando somo os dedos levantados, calculo 10x(**a**+**b**).

Para as unidades, quando multiplico os dedos baixados,
calculo (5-**a**)x(5-**b**)=25 – 5(**a**+**b**)+**ab**.
Verifique que se obteve (5+**a**)x(5+**b**).
Verifique também para as outras multiplicações.

Para utilizar estas técnicas, basta conhecer os quadrados de 10, 15... Tente esta técnica com os números entre 20 e 25...

5.Calcular

Com a cabeça e as mãos

Faça você mesmo

MATERIAL: Papel e lápis ou ardósia, giz e apagador

Cálculo mental Cálculo rápido

Adições, subtracções

Mande fazer - de cabeça – adições e subtracções de números inteiros de 2 algarismos, de 3 algarismos..., escrevendo os dois números, enunciando-os ou escrevendo um e enunciando o outro.
Mande descrever e analisar, pelos alunos, as diferentes técnicas de cálculo que utilizaram.

38+5
28+18
128+58
289+135...

27-18
66-19
151-28
197-19...

Quem somos?
- A nossa soma é 25, a nossa diferença 1.
- Somos três números consecutivos e a nossa soma é 48.
- A soma dos meus dois algarismos é 12 e o seu produto 14.

O algoritmo de Kaprekar (matemático indiano – 1949)

Considere um número inteiro, 5294 por exemplo, e calcule como se segue:

K(5294) = 9542 - 2459 = 7083
K(7083) = 8730 - 378 = 8352
K(8352) = 8532 - 2358 = 6174
E K(6174) = !!!

Mande efectuar estes cálculos com outros números e peça para formular hipóteses sobre os diferentes casos possíveis.

Multiplicações, divisões

- Em primeiro lugar, mande aprender de cor os quadrados de 11, 12, 13, 15, 20, 25.
- Mande fazer multiplicações e divisões por 5, por 9, por 11, por 12, 13, 15, 19, 25, 50, 100.
- Calcule 46x96 e 64x69. Estranho, não é? Encontre outros.
- Calcule 23x9 e 78x9. Diz-se que 23 e 78 são associados. Encontre outros!

Multiplicações surpreendentes

Calcule, continue e encontre outros

1 x 8 + 1 = ...	**9 x 9 + 2 = ...**
12 x 8 + 2 = ...	**98 x 9 + 6 = ...**
= ...?	**= ...?**
1 x 9 + 2 = ...	**1 x 1 = ...**
12 x 9 + 3 = ...	**11 x 11 = ...**
= ...?	**= ...?**

A conjectura de Siracusa

- Considere um número inteiro *N* e calcule como se segue:
  - Se *N* é par, divida-o por 2.
  - Se é ímpar, multiplique-o por 3 e some 1.
- Recomece este cálculo com o resultado....
  Por exemplo: 20 -> 10 -> 5 -> 16 -> 8 -> 4 -> 2 -> 1 -> 4 -> 2 -> 1...

Mande efectuar estes cálculos com outros números e peça para formular hipóteses sobre os diferentes comportamentos possíveis destas sequências. (Fala-se de altitude para o maior número atingido pela sequência, de duração de voo para o comprimento da sequência antes que ela atinja um valor abaixo do número de partida...).
Este algoritmo, criado por **Collatz** e **Hasse** (matemáticos alemães – 1932) deu origem a uma conjectura, dita de Siracusa, ainda não demonstrada..

Faça você mesmo

MATERIAL: Papel e lápis

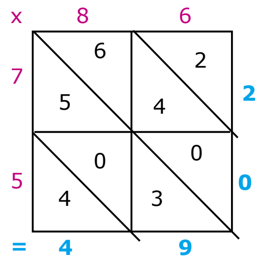
Cálculos e algoritmos

Dividir para multiplicar **57 x 86 = ?**

A multiplicação à russa

57	86
~~28~~	~~172~~
~~14~~	~~344~~
7	688
3	1376
1	2752
	4902

A multiplicação *per gelosia*



Ou ainda, próximo da técnica clássica:

```
      5 7
    x 8 6
    30 42
 + 40 56
 = 40 86 42
 = 4 9 0 2
```

Para saber mais

Com os computadores, para não ter de colocar linhas de produtos a adicionar e evitar o problema das retenções ... (a reter!) são utilizadas outras técnicas de cálculo rápidas. É o domínio da algoritmia.
É o caso do algoritmo do russo **Anatolii Karatsuba** (1962):

Calculemos 1234 x 5678.
Corta-se cada número em pacotes de 2 algarismos para obter:

$$\begin{aligned}
1234 \times 5678 &= (12\times10^2+34) \times (56\times10^2+78)\\
&= 12\times56\times10^4+[(12+34)\times(56+78) - 12\times56 - 34\times78] \times 10^2 + 34\times78\\
&= 672\times10^4+[46\times134 - 672 - 2652] \times 10^2 + 2652\\
&= 672\times10^4+[6164 - 672 - 2652] \times 10^2 + 2652\\
&= 6720000 + 284000 + 2652\\
&= 7006652
\end{aligned}$$

Bastou fazer 3 multiplicações de números 2 vezes mais pequenos e algumas adições a mais, mas muito simples. Na base deste algoritmo, encontram-se as seguintes relações algébricas:

$$\begin{aligned}
(ax + b)^2 &= a^2x^2 + [(a+b)^2 - a^2 - b^2]\, x + b^2\\
(ax + b)(cx+d) &= acx^2 + [(a+b)(c+d) - ac - bd]\, x + bd\\
\text{e} \;:\; 4ab &= (a+b)^2 - (a-b)^2
\end{aligned}$$

5.Calcular

Com a cabeça e as mãos

Faça você mesmo

MATERIAL: Papel e lápis

Cálculo rápido e proporcionalidade

Como calcular rapidamente:

Em **6** h uma climatização consome **7** Kw. Quanto consome em **18** h?
Em **9** h uma climatização consome **18** Kw. Quanto consome em **108** h?
Em **32** h uma climatização consome **27** Kw. Quanto consome em **8** h?
Em **21** h uma climatização consome **17** Kw. Quanto consome em **90** h?

A dupla proporcionalidade

Complete quadros do tipo:

Consumo de batatas numa escola (em kg)

NÚMERO DE ALUNOS / NÚMERO DE DIAS

	1	20	40	100
1	0,1	2		
5	0,5		20	
10	1		40	
		30		150
20	2		80	

Cálculo da área dum rectângulo (em cm^2)

COMPRIMENTO / LARGURA

	1	4	5	6	10	12
1	1					12
2	2		10		20	
3						
		16				
5	5			30		

Cálculo da área dum triângulo (em cm^2)

BASE / ALTURA

	1	3	5	8	15
1	0,5	1,5	2,5	4	
2,5		3,75			
3					
5		7,5	12,5		37,5

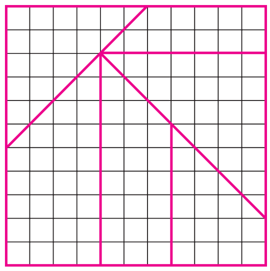
Faça você mesmo

MATERIAL: 6 peças do puzzle, 2 por grupo de alunos, papel quadriculado, régua, lápis, tesoura

78 79

Cálculo & geometria

Puzzles para aumentar



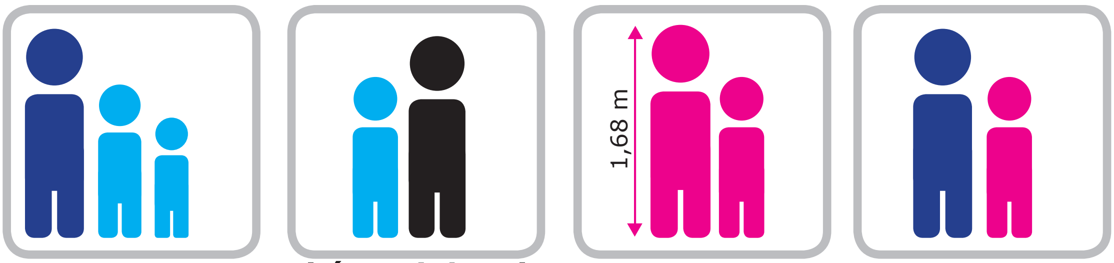
Com estas 6 peças reconstitua um quadrado.
Depois construa o mesmo puzzle em maior, respeitando a regra seguinte: os trapézios cuja altura mede 4 cm devem ser aumentados para ter uma altura de7 cm.
Assim que acabar, deve poder reconstituir um quadrado grande com as 6 peças aumentadas.

Para ir mais longe

Tales e a proporcionalidade

Fotografias de férias

O pai e os meus dois irmãos | O meu irmãozinho e eu | A minha mãe e a minha irmã | O meu pai e a minha irmã



Qual é a minha altura?

5.Calcular

Com a cabeça e as mãos

Que reter?

A proporcionalidade é um eixo essencial da aprendizagem da matemática e de outras ciências. É também uma ferramenta muito presente na vida quotidiana. Permite introduzir a multiplicação e a divisão na escola. É sobretudo essencial para compreender as relações entre grandezas munidas duma unidade de medida, em física e nas outras ciências.

As propriedades utilizadas são:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(a.x) = a.f(x)$$
$$f(a.x) + f(b.y) = a.f(x) + b.f(y)$$

Duas funções matemáticas entram em acção nestes cálculos:

A função «escalar»:

6 (h)	7 (Kw)
18 (h)	?? (Kw)

A função «das dimensões»:

9 (h)	18 (Kw)
108 (h)	?? (Kw)

Faça você mesmo

MATERIAL: Papel, lápis

Cálculos aproximados

Ordem de grandeza

Mande estimar a ordem de grandeza de cálculos, verificados de seguida, com ou sem calculadora. Assim, o resultado de cada um destes cálculos está compreendido entre 0 e 1, entre 0 e 0,1, entre 0 e 0,01, entre 1 e 2, entre 1 e 10 ?

125÷28 = 0,4464 ou 4,4643 ou 44,6428 ou ???
28÷1275 = 0,0022 ou 0,0220 ou 0,2196 ou ???
357÷176 = 0,203 ou 2,028 ou 20,284 ou ???
41,84 2,25 = 9,414 ou 94,14 ou 941,9 ou ???
1/(1+√2) = 0,414 ou 2,142 ou 4,142 ou 21,421 ou ???

Faça você mesmo

MATERIAL: Papel, lápis ou calculadora ou computador

Enganado pelo meu computador!

Escolha um número compreendido entre 0 e 1. Multiplique-o por 2.
- Se o resultado for inferior a 1, multiplique-o de novo por 2.
- Caso contrário, subtrair 1 e multiplicar o resultado por 2. E recomece 60 vezes. Refaça os mesmos cálculos com um número muito próximo.
O que constata?

- Escolha um número ainda mais próximo e recomece os cálculos.
- Tente também com números tais como √2-1, √3-1 ou π–3 e números decimais muito próximos.

Exemplo

0,3	0,305
0,6	0,61
0,2	0,22
0,4	0,44
0,8	0,88
0,6	0,76
0,2	0,52
0,4	0,04
0,8	0,08
...	...

Para contar, usamos os números inteiros e os decimais. No mercado, vale mais saber fazer rapidamente um cálculo mental, ou aproximado, mesmo quando se possui uma calculadora.
O computador só utiliza números decimais com apenas algumas dezenas de casas decimais. As leis matemáticas não podem ser respeitadas o que conduz frequentemente a erros.

Onde se emprega a matemática

Certas técnicas de cálculo podem ser utilizadas na vida quotidiana. Outras são investigadas pelos matemáticos e pelos informáticos para permitir que os computadores calculem sempre mais depressa e vão mais longe ou verifiquem muito rapidamente a exactidão dos cartões bancários.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Cálculo - Cálculo rápido - Cálculo mental - Cálculo aproximado - Ordem de grandeza
Algoritmos de cálculo

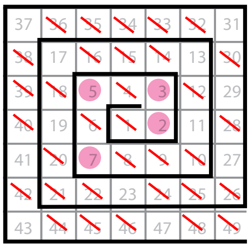
Números primos

Faça você mesmo

80 81

MATERIAL: 3 tabelas com os números inteiros sobre 6 colunas, 20, depois 30 colunas
lápis, borracha

Na pista dos números primos!



É primo todo o número inteiro, diferente de 1, que só é divisível por 1 e por ele próprio.
Para cada tabela:

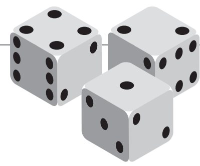
- risque 1, depois ponha em negrito o primeiro número não riscado, isto é 2,
- risque todos os múltiplos de 2 (depois de 2),
- ponha em negrito o número seguinte não riscado, isto é, 3 que é primo,
- risque todos os múltiplos de 3,
- e recomece até nãojá não haver números a riscar.

Observe, seguindo a tabela utilizada, as propriedades desta técnica.
A partir de que número primo parou? Que pode concluir?

*Esta técnica – chamada **crivo de Eratóstenes** - permite evidenciar todos os números primos da lista.*

Faça você mesmo

MATERIAL: 3 dados



Jogue ao 421

Lance os 3 dados.
Escreva os 3 algarismos no quadro.
Ganha aquele que, com estes três algarismos, construir o maior número primo.
Cada aluno pode dizer porque tal ou tal número proposto não é primo.

Que reter?

Critérios de divisibilidade por...

- um número inteiro é divisível por 2 se o último algarismo é múltiplo de 2,
- divisível por 4 se... por 8 se ...
- divisível por 3 se ... (o mesmo por 9). Porquê?
- divisível por 5 se ...
- divisível por 11 se ...
- e por 7? e por 13?

Faça você mesmo

MATERIAL: Uma lista de números primos

A grande família dos números primos

Na família dos números primos:
• encontre gémeos (isto é, números ímpares consecutivos) como 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13... e triplos? Conjectura não demonstrada: há uma infinidade!

• Encontre primos primos (que diferem de 4). Deve haver tantos quantos os números gémeos!

• Encontre primos sexy (que diferem de... 6)!

• Verifique se o produto dos primeiros números primos +1 é primo. Isto permite provar que há um número infinito de números primos. Mas quanto maiores mais raros são.

• Verifique que todo o número par (inferior a 100, por exemplo) se pode escrever como soma de 2 números primos (é a **conjectura de Goldbach** que fará ganhar uma grande quantia de dinheiro a quem a demonstrar!).

Números primos

Faça você mesmo

MATERIAL: Papel, lápis

La grande famille des nombres entiers

• Escreva 10101, 1001, 101, 11, como produtos de números primos. Faça o mesmo com 304, 305, 403, 404, 504, 604... Todo o número inteiro se decompõe, de maneira única, num produto de números primos.

• Fora da família dos números primos, encontre números perfeitos (isto é, iguais à soma dos seus divisores, como 6 = 3 + 2 + 1). Note que 1/6 + 1/3 + 1/2 = 1 e que isto se verifica para os outros números perfeitos encontrados).trouvés.

• Encontre números inteiros produto de dois números primos diferentes. Ganha quem encontrar o maior!

Os códigos secretos utilizados actualmente são baseados em números que são o produto de dois números primos muito grandes. Encontrá-los, ultrapassa o tempo de cálculo dos computadores mais potentes.

• Encontre o MDC e o MMC (máximo divisor comum e menor múltiplo comum) de 28 e 70, de 330 e 900, de 276 e 483, ...
• Verifique, nestes exemplos, que MDC(a,b) x MMC(a,b) = ab.

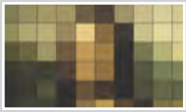
Onde se emprega a matemática

Os trabalhos de investigação sobre os números primos e suas relações com a informática são numerosos e também são numerosas as questões que continuam por resolver.
A segurança das redes informáticas e de comunicações está estreitamente ligada aos números primos (criptografia, códigos correctores de erros, algoritmia, etc.).

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Números primos - Critérios de divisibilidade - Eratóstenes - Euclides - Criptografia
Códigos secretos com chave pública

5.Calcular

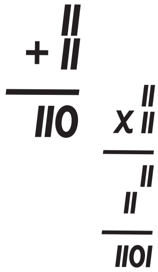
Imagens digitais



Faça você mesmo

MATERIAL: Papel, lápis

1 + 1 = 10 !!!



Na base 2, os números inteiros escrevem-se utilizando apenas 0 e 1:
0, 1, 10, 11, 100, 101, 110...
Calcule na base 2, pondo a adição: 101 + 11, 101 + 101, 111 + 111...
Depois: 101 x 11, 101 x 101, 111 x 111

Que reter?

Depois de ter contado com calhaus (na origem da palavra cálculo), os homens inventaram o sistema de numeração em base 10. Assim, dizer que há 549 carneiros significa que há, de facto, $5 \times 10^2 + 4 \times 10 + 9$. Este modo utiliza dez símbolos, os algarismos e tem em conta a posição de cada algarismo (da direita para a esquerda). Graças à lógica matemática, o sistema de numeração de base 2 permite actualmente representar situações em que há apenas dois estados: verdadeiro ou falso, sim ou não, a corrente passa ou não passa, íman está magnetizado ou não está, a luz é muito reflectida ou não é muito...
O digital, que invadiu o nosso quotidiano, consegue reproduzir a realidade com uma qualidade sempre crescente. Compensa o aspecto elementar do sistema binário, com quantidade de informação elevada que pode tratar rapidamente.

Faça você mesmo

MATERIAL: 3 imagens digitalizadas

72 dpi ou 300 dpi?

Estas 3 imagens têm as mesmas dimensões: 7 x 4,35 cm.

• Quantos quadrados unidade (diz-se píxeis) têm (largura x altura)? É o tamanho da imagem em píxeis.
A imagem 1 tem uma resolução de 75 dpi (dot per inch ou ponto por polegada), a 2: 150 dpi e a 3: 300 dpi.
• Como varia o número de quadrados em função da resolução?

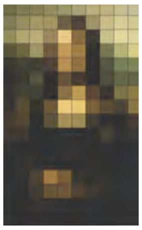


imagem 1

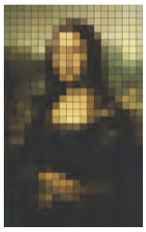


imagem 2

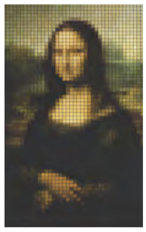


imagem 3

O tamanho das fotografias

Como varia o tamanho das imagens? Complete a tabela.
Uma mesma imagem digitalizada em 75 dpi, é aqui apresentada em 75, 150 e 300 dpi.
• A primeira resolução, suficiente para um ecrã, produz uma imagem impressa pontilhada.
• A segunda é suficiente para tablets e smartphones, mas às imagens impressa é pouco nítida.
• A terceira, 4 vezes mais fina, é utilizada para obter uma impressão fotográficas nítidas e suaves.

Dimensão da imagem		Resolução em dpi	Tamanho em K bytes
em polegadas	em cm		
3,74x2,39	8,74x5,39	75	125 Ko
		100	?
		150	?
		300	?
1,90x1,18	4,45x2,75	75	?
		100	?
		150	125 Ko
		300	?
0,94x0,59	2,20x1,39	75	?
		100	?
		150	?
		300	125 Ko

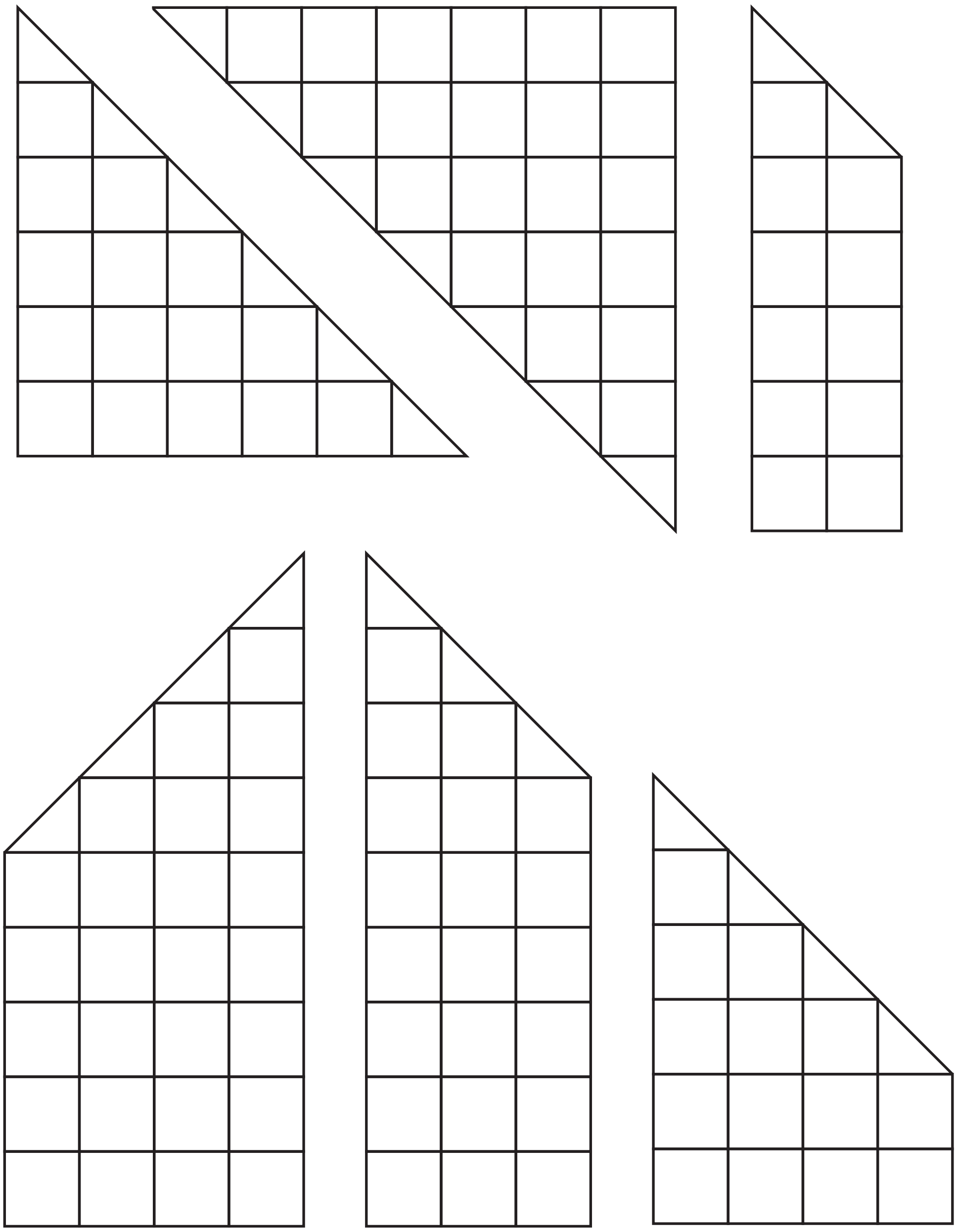
Que reter?

Uma imagem digital colorida é constituída de quadrados unidade, os píxeis, e cada quadrado é uma mistura de 3 ou 4 cores: vermelho, verde, azul (RGB) para os ecrãs e ciano, magenta, amarelo, negro (CMYB) para a impressão.
Para a mesma superfície, quantos mais píxeis houver, maior é a definição.

Onde se emprega a matemática

Fotografia, CD, DVD, Internet, telemóvel, TV alta definição... utilizam as imagens digitais. Para guardar, transmitir, analisar, tratar, comprimir, corrigir, modificar estas imagens, os matemáticos tornaram-se indispensáveis.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Píxeis - Compressão de imagens - Impressão digitalizada



1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126
127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138
139	140	141	142	143	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

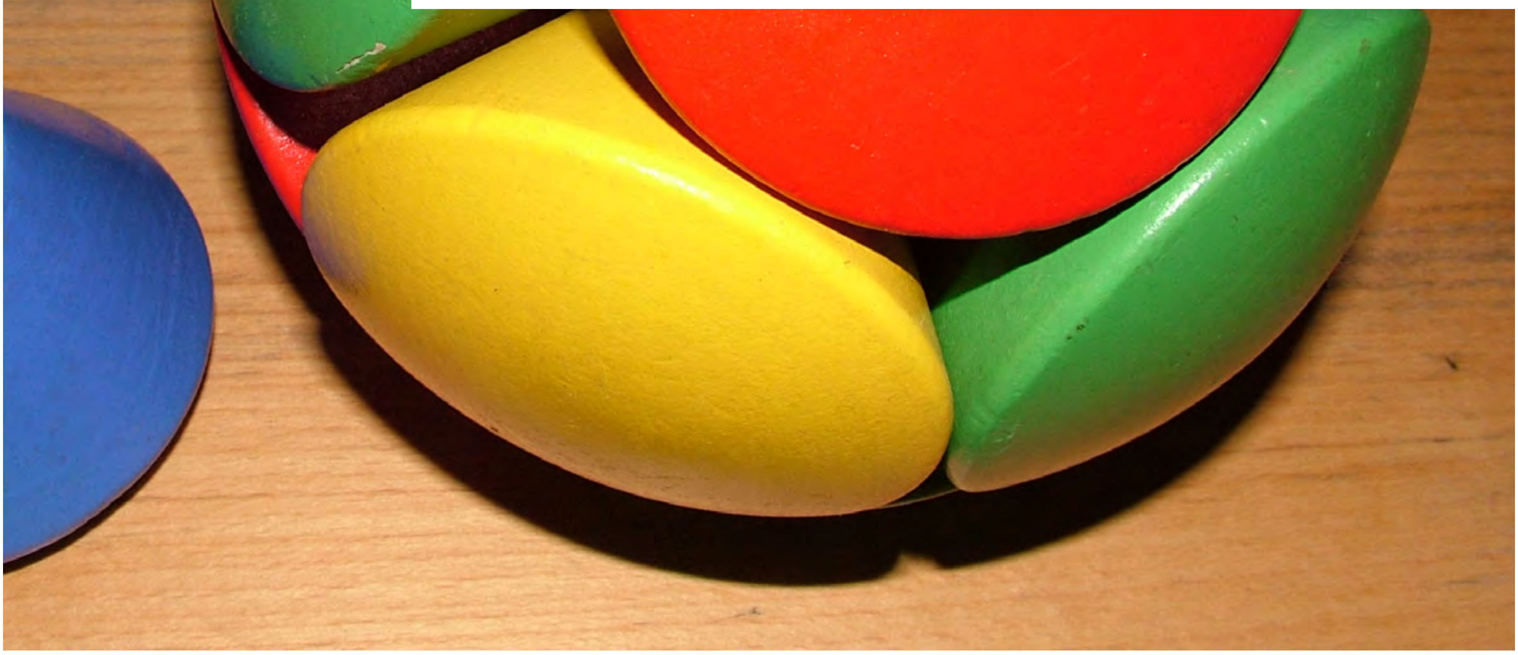
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600

6.Construir

Curvas & Velocidade

Curvas & Volumes

Curvas suaves

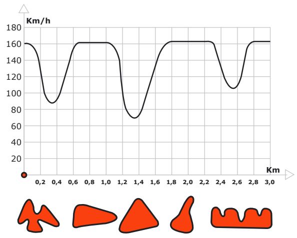


6.Construir

Curvas & Velocidade

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 desenhos de 5 circuitos de corrida, 1 gráfico de velocidade 88



Em que circuito estamos?

Este é o gráfico da velocidade dum automóvel de corrida, em regime máximo, na terceira volta do circuito.
Perguntas:
• Em que circuito pode estar?
• Em que sentido corre?
• Onde está a linha de partida?

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 papel quadriculado, 1 lápis 89

Sabe ler um gráfico?

• Cada um imagina um circuito automóvel, desenha-o, construindo o gráfico das velocidades numa volta do circuito, passa-o ao vizinho, que já fez o mesmo.
Questão: a partir do gráfico fornecido pelo seu vizinho, encontre o circuito em que ele pensou. Ganha quem acertar primeiro.
• Traduza, em forma de gráfico a história seguinte: Um caminhante sobe uma encosta de 4 km a 2 km/h, pára uma hora e volta a descer, pelo mesmo caminho, a 4 km/h.
• Dois ciclistas fazem uma corrida de ida e volta. O primeiro percorre a ida a 60 km/h e a volta a 40 km/h. O segundo percorre a ida e a volta a 50 km/h. Qual é o que chega primeiro?

Que reter?

Velocidade e aceleração
A **velocidade** é uma medida física que permite conhecer e descrever a evolução duma quantidade (frequentemente uma distância) em função do tempo. Exprime-se em metros por segundo, em km/h, em nós na marinha e em mach na aviação.
A **aceleração** é a variação da velocidade dum objecto em função do tempo.

Diz-se que a função "velocidade/tempo" é a **derivada** da função "distância/tempo". Do mesmo modo, a função "aceleração" é a derivada da função "velocidade".
Descreve a evolução da tangente à curva velocidade/tempo em cada ponto.

Para ir mais longe...

Menos devagar

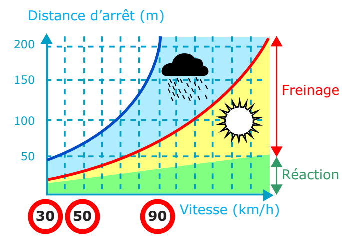
• Um automóvel anda a 100 km/h de média, em vez de 90 km/h.
Quanto tempo ganha num percurso de 90 km?
• Um ciclomotor anda à velocidade de 50 km/h em vez de 45 km/h.
Quanto tempo ganha em 45 km? E em 90 km?

Trave a tempo!

Entre o momento em que um condutor vê um obstáculo e aquele em que começa a travar, há um **tempo de reacção** estimado entre 1 e 2 segundos.
A **distância de travagem**, que depende da velocidade e do estado do veículo, é estimada, com o tempo seco, em $0{,}08v^2$, sendo v a velocidade do veículo expressa em metros/segundo.
- Calcule a distância que percorre um automóvel para parar, se andar a 90 e a 100 km/h.
- Calcule também a distância percorrida pelo ciclomotor a 45 e 50 km/h.

E em tempo de chuva???

A distância de travagem depende também do estado da estrada.
Em estrada molhada, a distância de travagem aumenta 40%.
- Volte a calcular as distâncias de travagem precedentes.
- Construa uma tabela, depois um gráfico, das distâncias de paragem em função da velocidade e do estado da estrada.



Onde se emprega a matemática

O **cálculo diferencial** desenvolveu-se nos séculos XVII e XVIII. Permite descrever a evolução do declive da tangente a uma curva contínua:
- Se a função crescente é representada por uma curva, as tangentes à curva em cada ponto têm um declive positivo.
- Si a função é decrescente, o declive das tangentes é negativo.

Esta propriedade é utilizada por todos os que estudam fenómenos evolutivos, dos matemáticos aos físicos, dos engenheiros aos biólogos, dos demógrafos aos economistas...

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Função - Gráfico - Derivada - Tangente - Velocidade - Aceleração

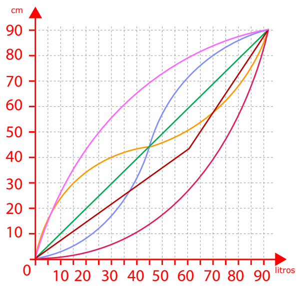
6.Construir

Curvas & Volumes

Faça você mesmo

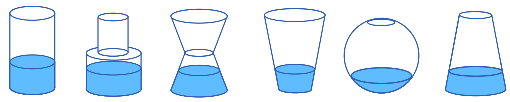
MATERIAL: 1 desenho de 6 recipientes, 1 desenho com os 6 gráficos

90 91



O volume do tonel

• Estes seis recipientes têm a mesma altura (90 cm) e o mesmo volume (90 l). O gráfico indica o nível de preenchimento dos recipientes, a débito constante, em função do tempo.
• Qual é a curva de preenchimento de cada recipiente?
• Quais podem ser as dimensões de cada recipiente?



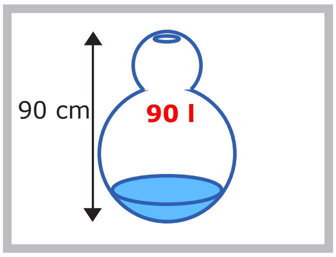
Faça você mesmo

MATERIAL: 1 papel quadriculado, 1 lápis

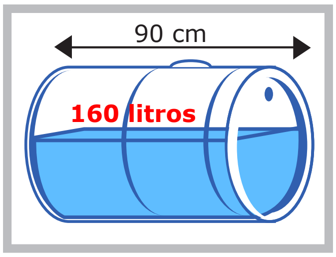
89

Sabe ler um gráfico?

• Cada um imagina um recipiente (de 90 cm de altura e de 90 l) e desenha-o.
• Constrói o gráfico de preenchimento, passa-o ao vizinho que já fez o mesmo.
• A partir do gráfico fornecido pelo seu vizinho, encontre o recipiente em que ele pensou. Ganha quem acertar primeiro.



• Qual é o gráfico de preenchimento deste recipiente?



• Qual é o gráfico de preenchimento deste recipiente?

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 desenho dos 6 recipientes, 1 desenho de 6 sondas graduadas

92

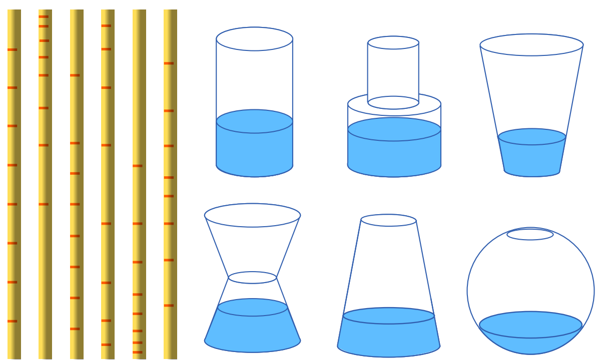
A cada um sua sonda

• Cada vara é a sonda, graduada de 10 em 10 litros, de um destes seis recipientes. Associe cada sonda ao seu recipiente.

• Gradue de 10 em 10 litros, a sonda dum barril de 160 litros, deitado, sendo que o orifício de preenchimento se encontra numa tampa ou no cimo do tonel.

Esvazie os reservatórios
• Retome os 6 recipientes e os seus gráficos de preenchimento.

• Desenhe agora o gráfico de esvaziamento de cada um (supondo que o débito é constante e que a rolha de esvaziamento está no fundo).



Que reter?

Para determinar a curva de preenchimento dum recipiente, em cada instante, é necessário estimar (ou calcular) a evolução da área da secção do recipiente em função da altura h. Isto consiste em utilizar directamente, ou aproximadamente, os cálculos de volume em função da altura. É o domínio do cálculo integral, introduzido por **Newton** (1642-1727) e **Leibniz** (1646-1716).
Mas muitas fórmulas de volumes (e de áreas) são conhecidas desde **Arquimedes** (287-212 antes de Cristo).

Algumas fórmulas

Volume dos recipientes em função da altura
(altura em dm, volume em cm^3)

- Cilindro: $V(h) = \text{Base} \times h = \pi R^2 \times h$
- Pirâmide sobre a base: $V(h) = B \times h/3$
- Cone sobre o vértice: $V(h) = V(H) \times (h/H)^3$
- Esfera: $V(h) = \pi h^2 (R - h/3)$

Onde se emprega a matemática

A noção de relação entre duas (ou várias) variáveis exprime-se em matemática através das **funções**. As suas **representações gráficas** fazem actualmente parte da vida quotidiana (curva de temperatura, cotação da bolsa...) e são ferramentas utilizadas em numerosos domínios técnicos.
O **cálculo integral**, que permite calcular áreas e volumes, desenvolveu-se ao mesmo tempo que o cálculo diferencial, no século XVII.
Os problemas de medida de volume e de sondas foram utilizados, desde sempre, pelos comerciantes e pelos engenheiros.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Função - Gráfico - Cálculo integral - Volumes - Arquimedes - Barril

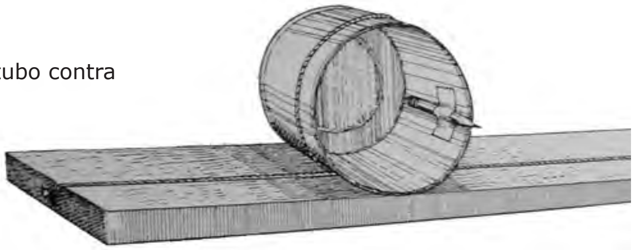
6.Construir
Curvas suaves

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 folha, 1 lápis, 1 régua, 1 tubo

Roleta e ciclóide

- Fixe o lápis no interior do tubo
- Trace a curva obtida fazendo girar o tubo contra a régua, sem deslizar.



Esta curva chama-se uma ciclóide.
É a curva descrita por um ponto num pneu de bicicleta que roda numa estrada.

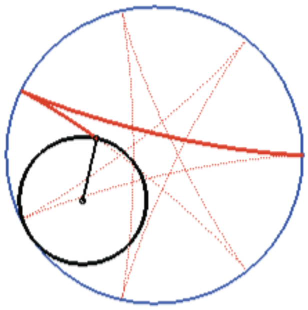
Faça você mesmo

MATERIAL: 1 lápis, 1 folha discos de cartão rígido ou em PVC... 1 disco oco

93 94

Curvas em caracol

- Fixe o lápis ao bordo dum disco.
- Trace curvas, fazendo rodar este disco no interior ou no exterior doutro disco.



Estas curvas chamam-se **hipociclóides** ou **epiciclóides**.

- Tente construir uma destas curvas exteriores com 1, 2, 3... ramos.
- Tente construir uma destas curvas interiores com 2, 3 ou 4 ramos.
- Estas curvas são sempre fechadas?

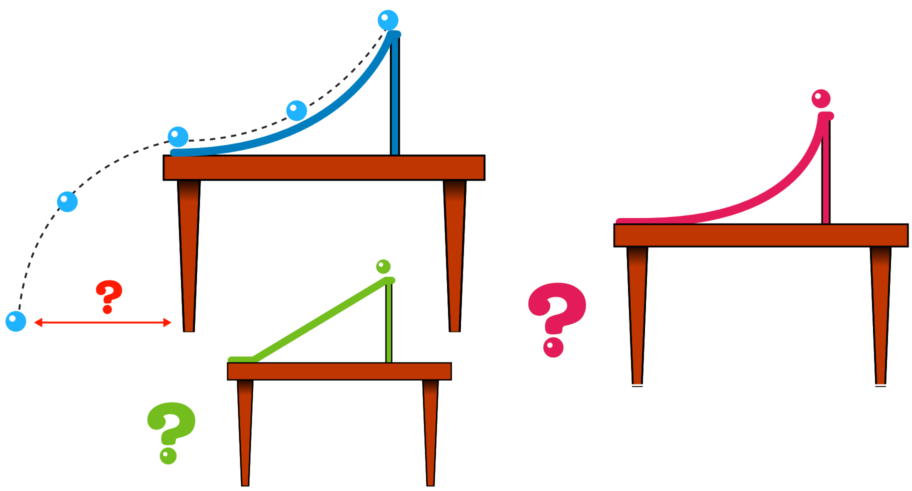
Faça você mesmo

MATERIAL: 3 tobogãs de madeira ou PVC em U ou ... 3 esferas idênticas em aço de preferência

O caminho mais curto?

Ponha os tobogãs no bordo duma mesa. Lance as 3 esferas ao mesmo tempo.

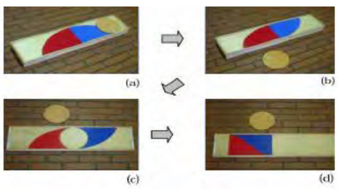
- Qual será a esfera que chegará em primeiro lugar ao fundo dos tobogãs?
- Qual será a que vai cair mais longe?



Moral da história: «A linha recta nem sempre é o caminho mais curto!»

Que reter?

O nome «**ciclóide**» foi proposto por **Galileu** (1667-1748).
Esta curva possui várias propriedades originais. Duas esferas que partem a alturas diferentes, encontram-se sempre no fundo da ciclóide.
A área sob um ramo da ciclóide é igual a 3 vezes a área do disco que a descreve.



O melhor tobogã?
É o que permite a uma esfera chegar mais rapidamente ao fundo do tobogã.

Este problema foi proposto, em forma de desafio, por **Jean Bernoulli** em 1696.
A resposta foi dada por ele mesmo, mas também pelo seu irmão Jacques, por G. de l'Hospital, Leibniz e Newton.
Este tipo de problemas está na origem do **cálculo das variações**.
A resposta é uma ciclóide, mais particularmente uma braquistócrona.

Curvas suaves

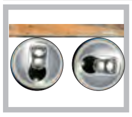
Para ir mais longe...

Problemas choque

Um problema choque é um problema cuja resposta vai contra o raciocínio lógico natural.
Eis três exemplos.

2 moedas idênticas.
Uma delas dá uma volta completa à volta da outra, que está fixa.
• Quantas voltas deu sobre ela própria? Porquê?

Uma garrafa está deitada numa mesa e dá uma volta sobre si própria, com o gargalo apoiado num pedaço de madeira.
• Qual é a distância percorrida por um ponto da garrafa?
E por um ponto do gargalo? Porquê?

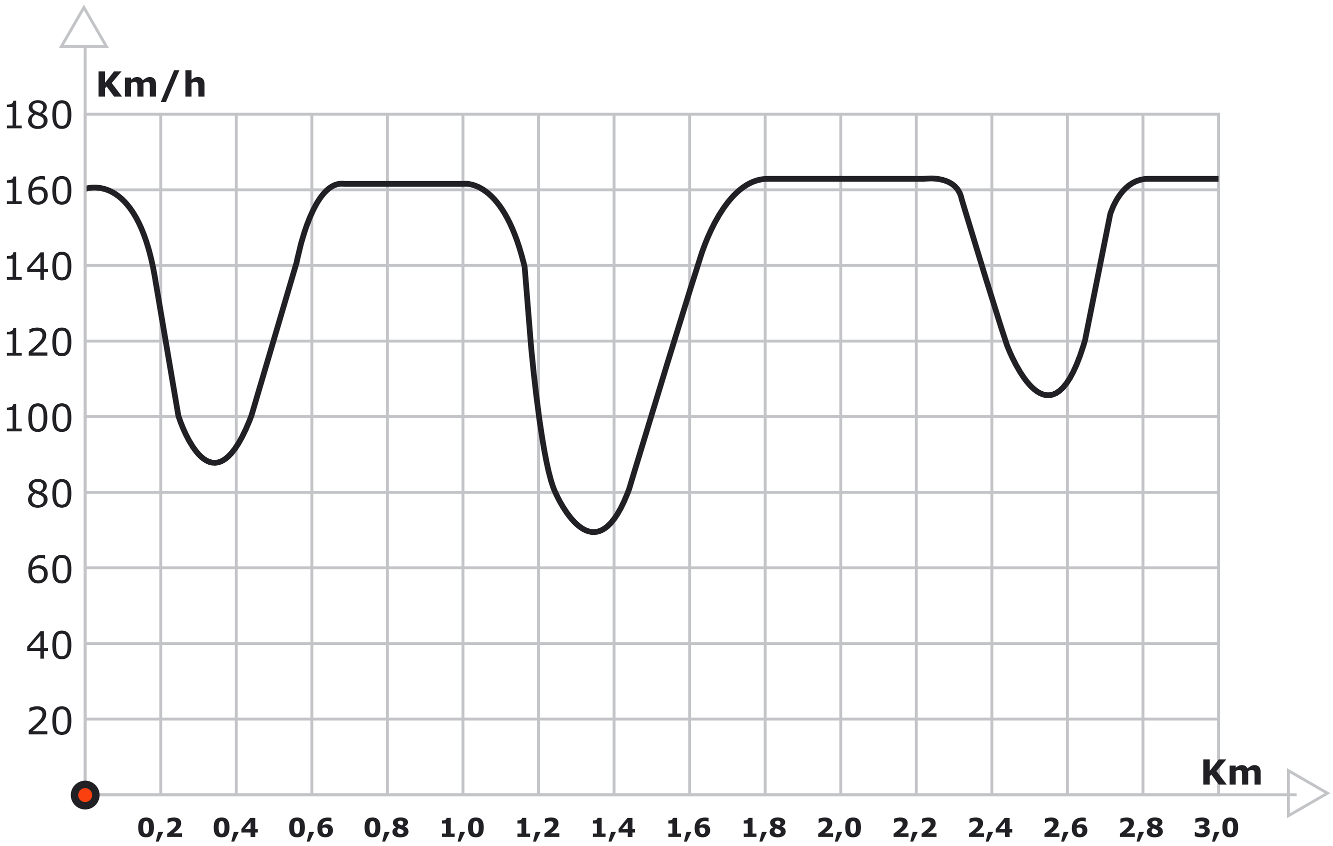


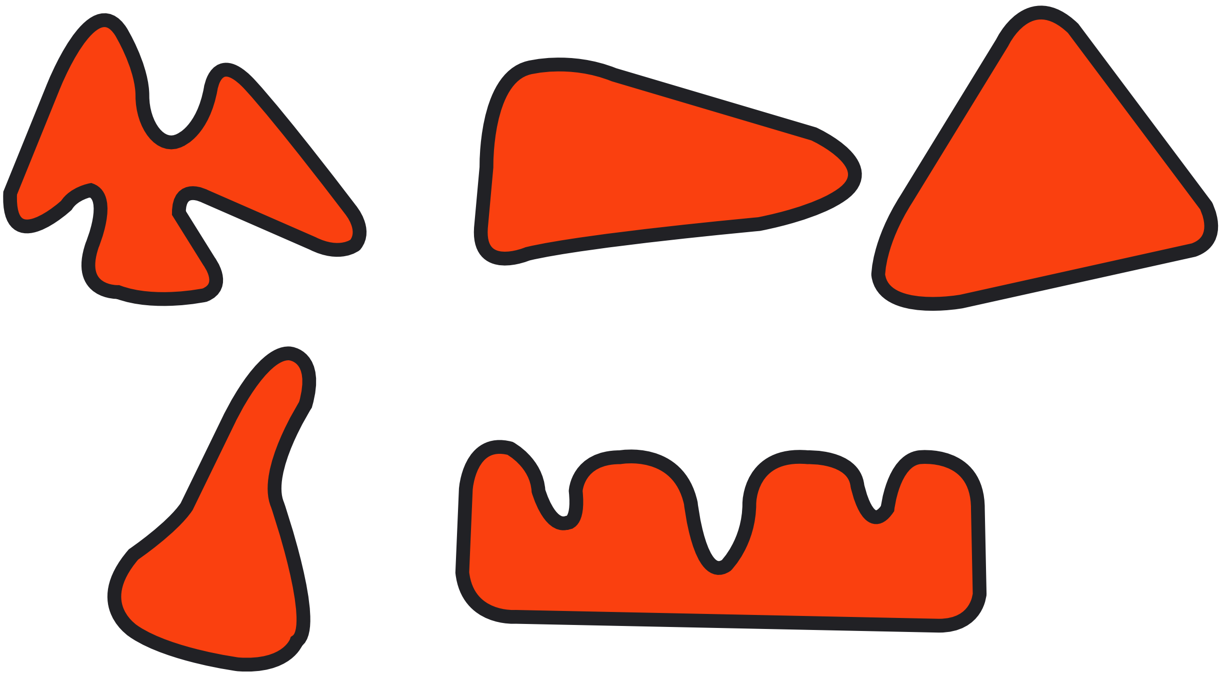
Uma prancha está pousada sobre dois cilindros idênticos.
• Qual é a distância percorrida pela prancha quando os cilindros dão uma volta?

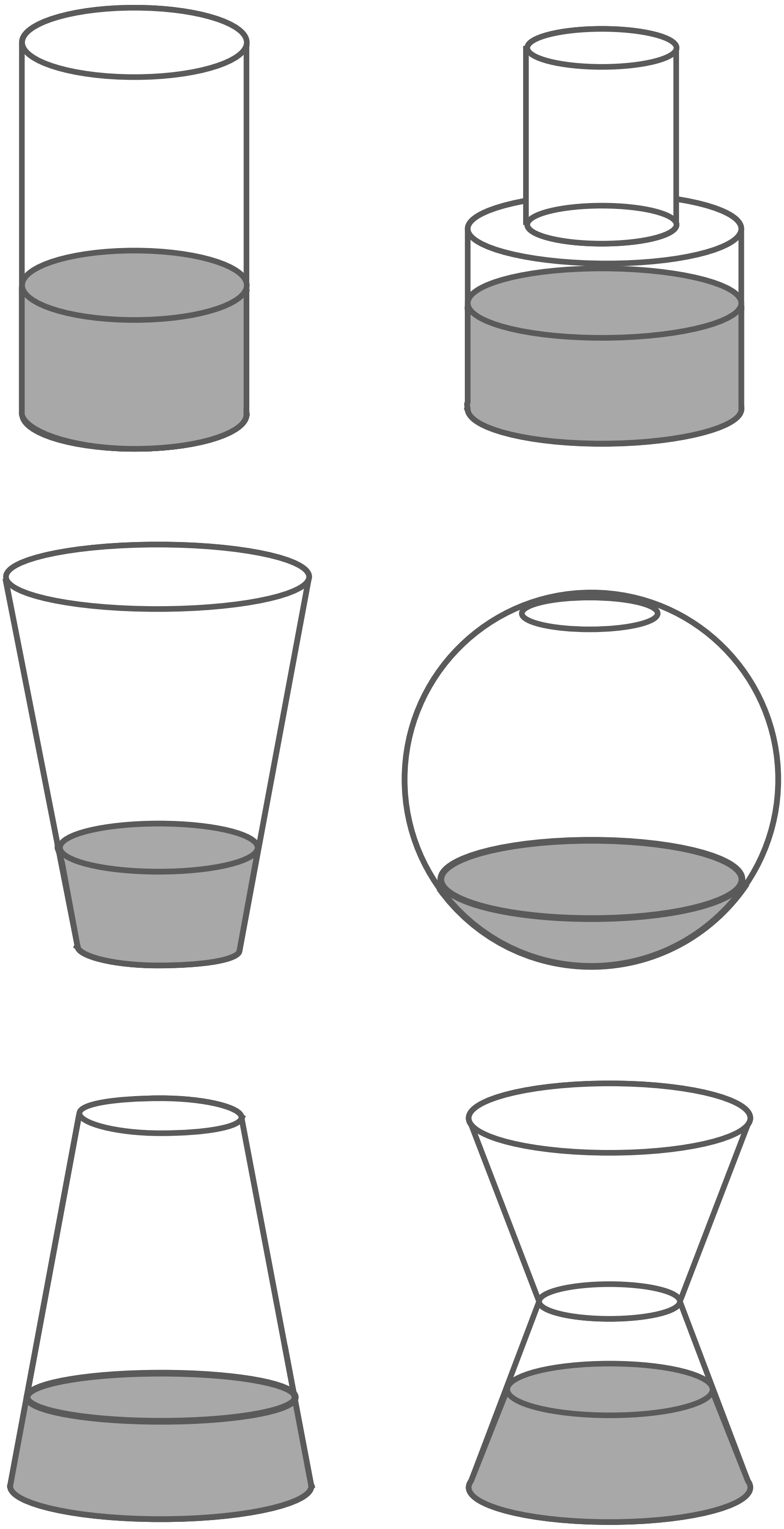
Onde se emprega a matemática

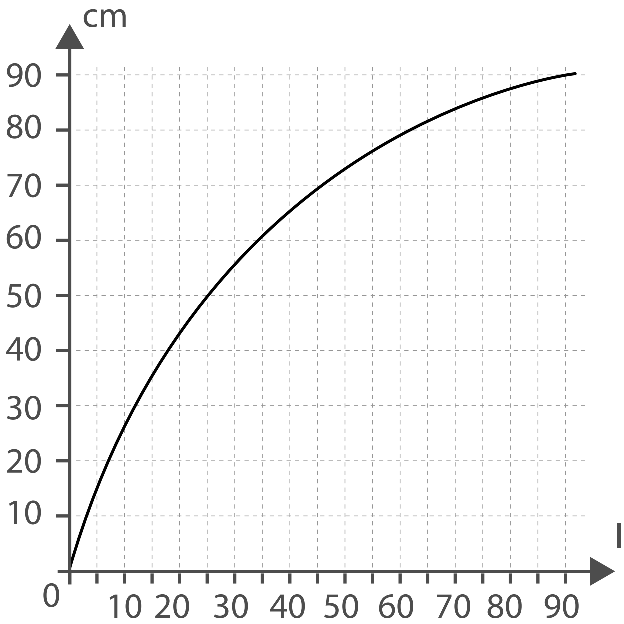
Estas curvas são conhecidas desde a Antiguidade. Foram utilizadas por **Aristóteles** e **Ptolomeu** para descrever os movimentos dos planetas. Os astrónomos utilizam-nas ainda hoje.
Para obter medidas mais precisas do tempo em navegação e em astronomia, **Huygens** inventou em 1659 um relógio de pêndulo que oscila entre dois arcos de ciclóide. É o pêndulo isócrono.
Em mecânica, as formas de ciclóide são utilizadas em engrenagens e em redutores de velocidade.
Uma pista de skate em forme de ciclóide teria mais vantagens que as pistas actuais!

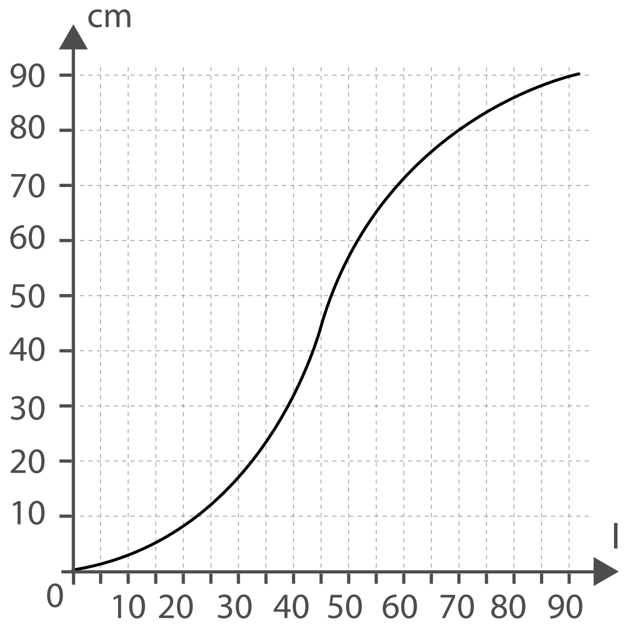
PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Bernoulli - Braquistócrona - Tautócrona - Ciclóide - Caustica - Relógio de Huygens

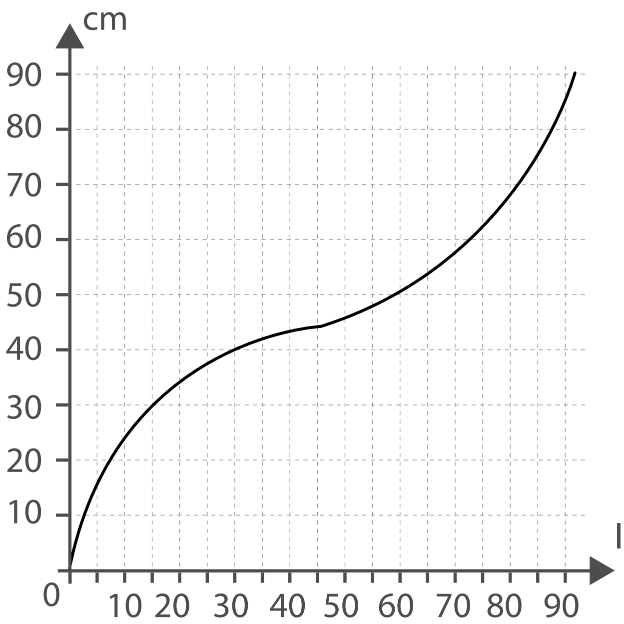

Km/h
180
160
140
120
100
80
60
40
20
Km
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6
2,8
3,0

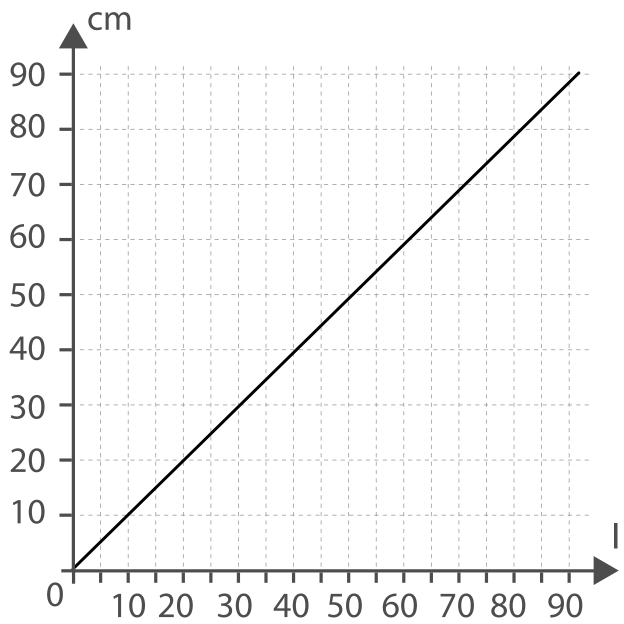


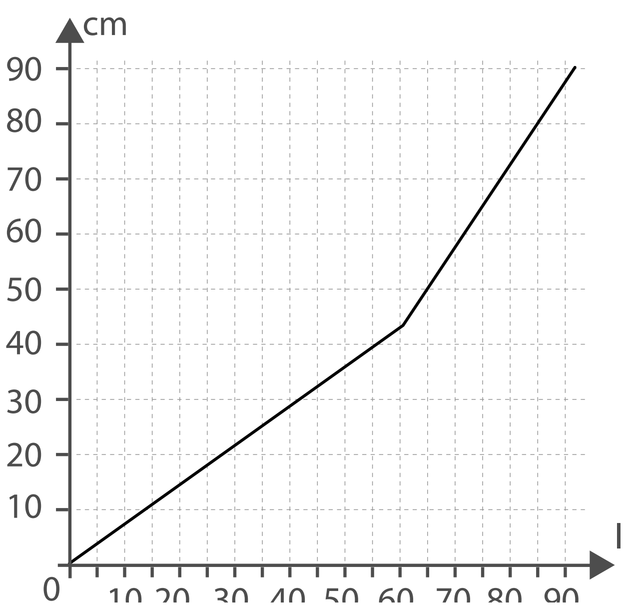


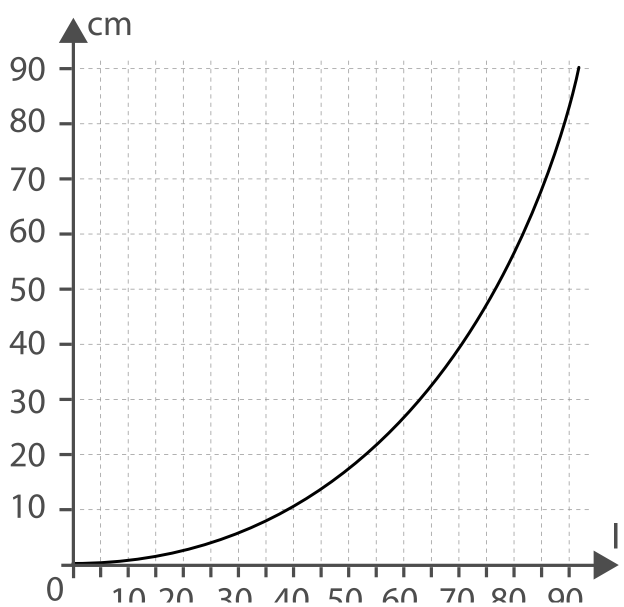

cm
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90
l

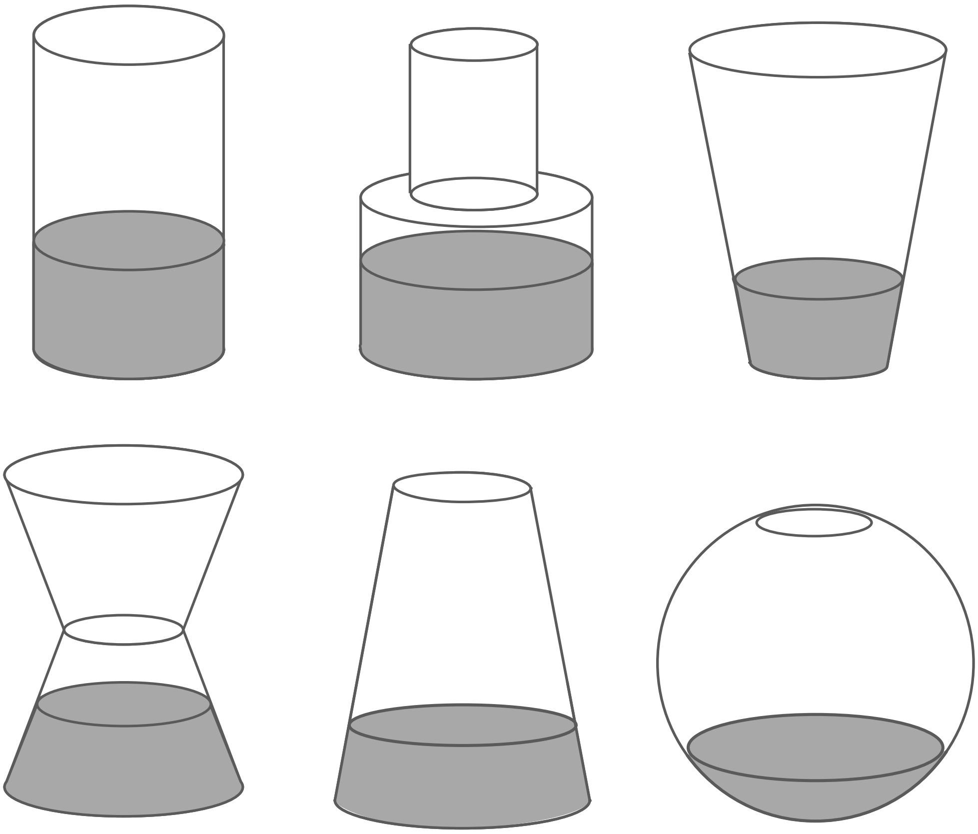

cm
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90
l

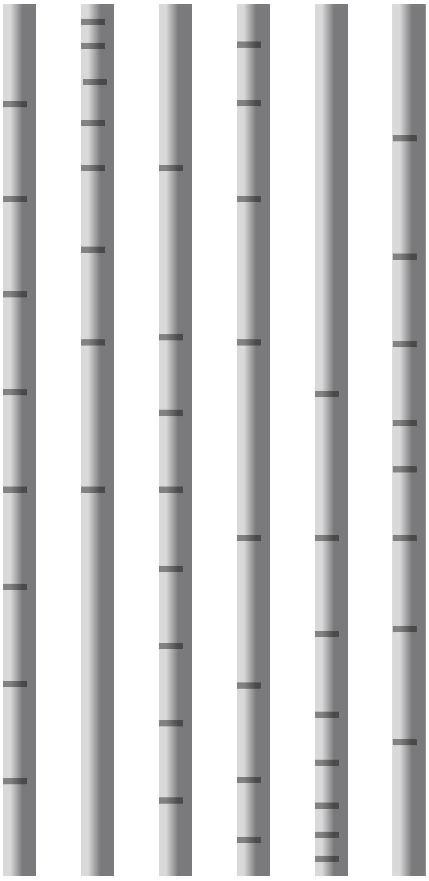

cm
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90
l

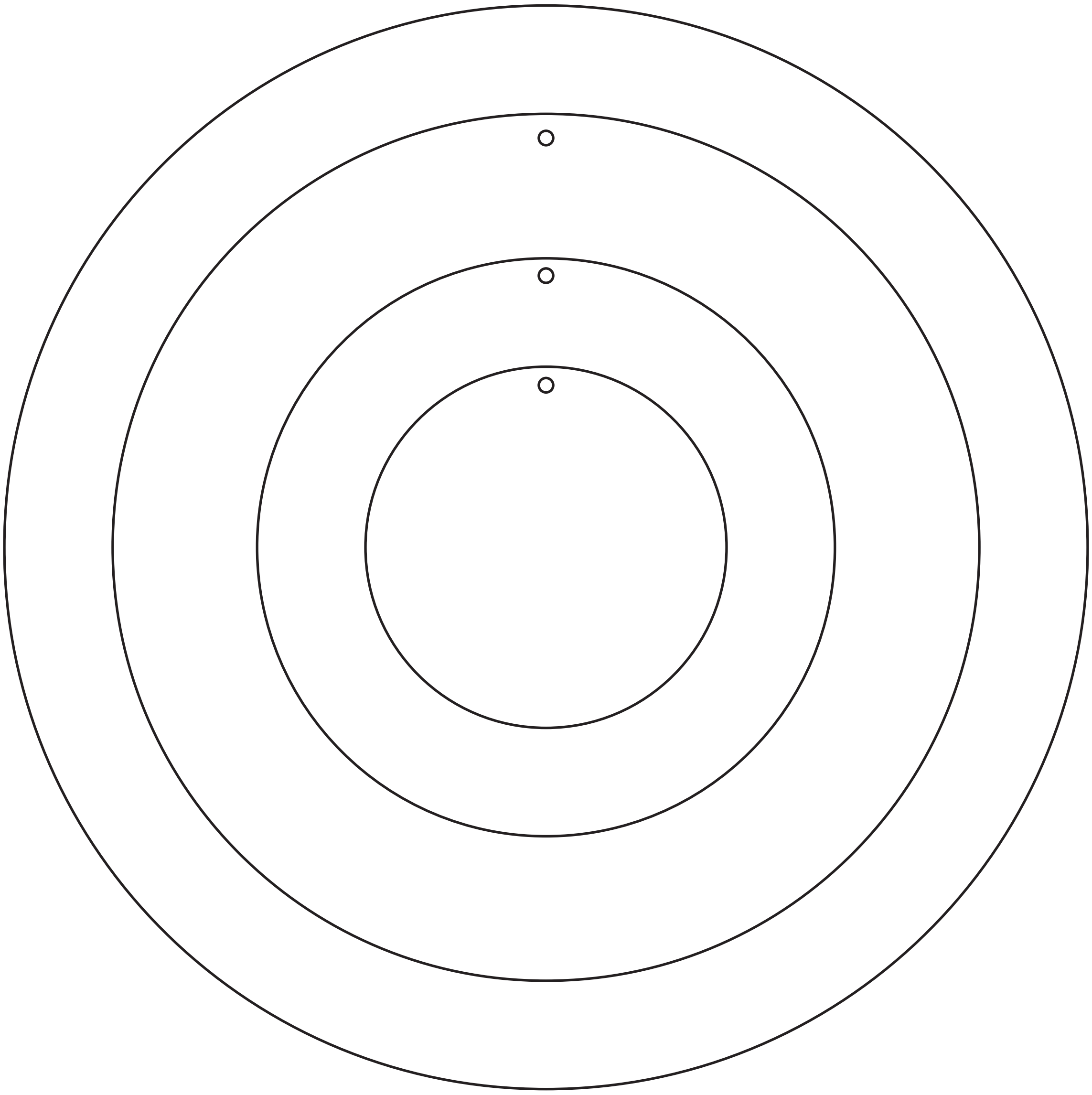

cm
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90
l

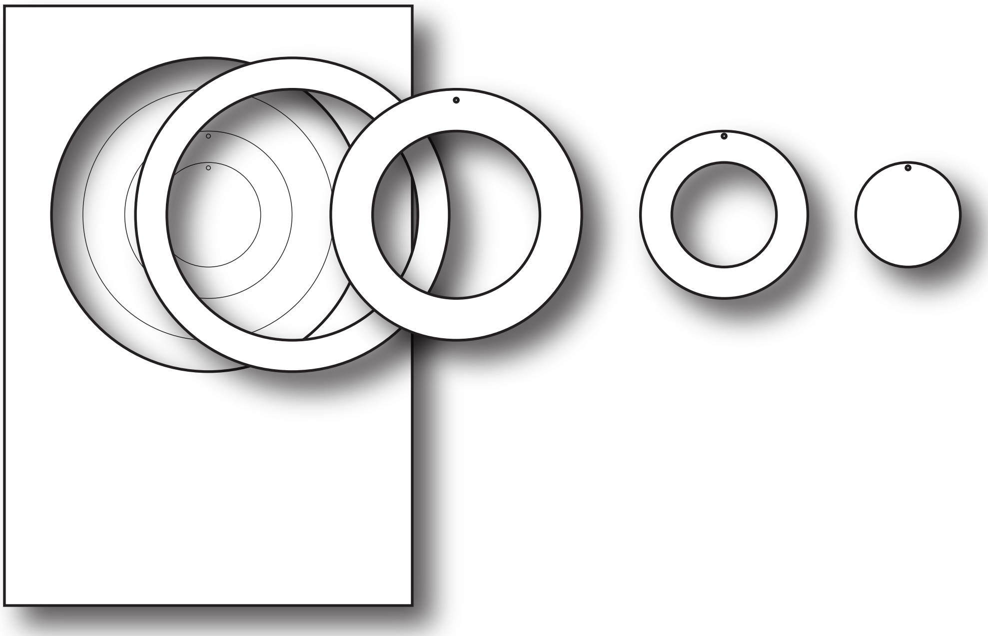

cm
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
l

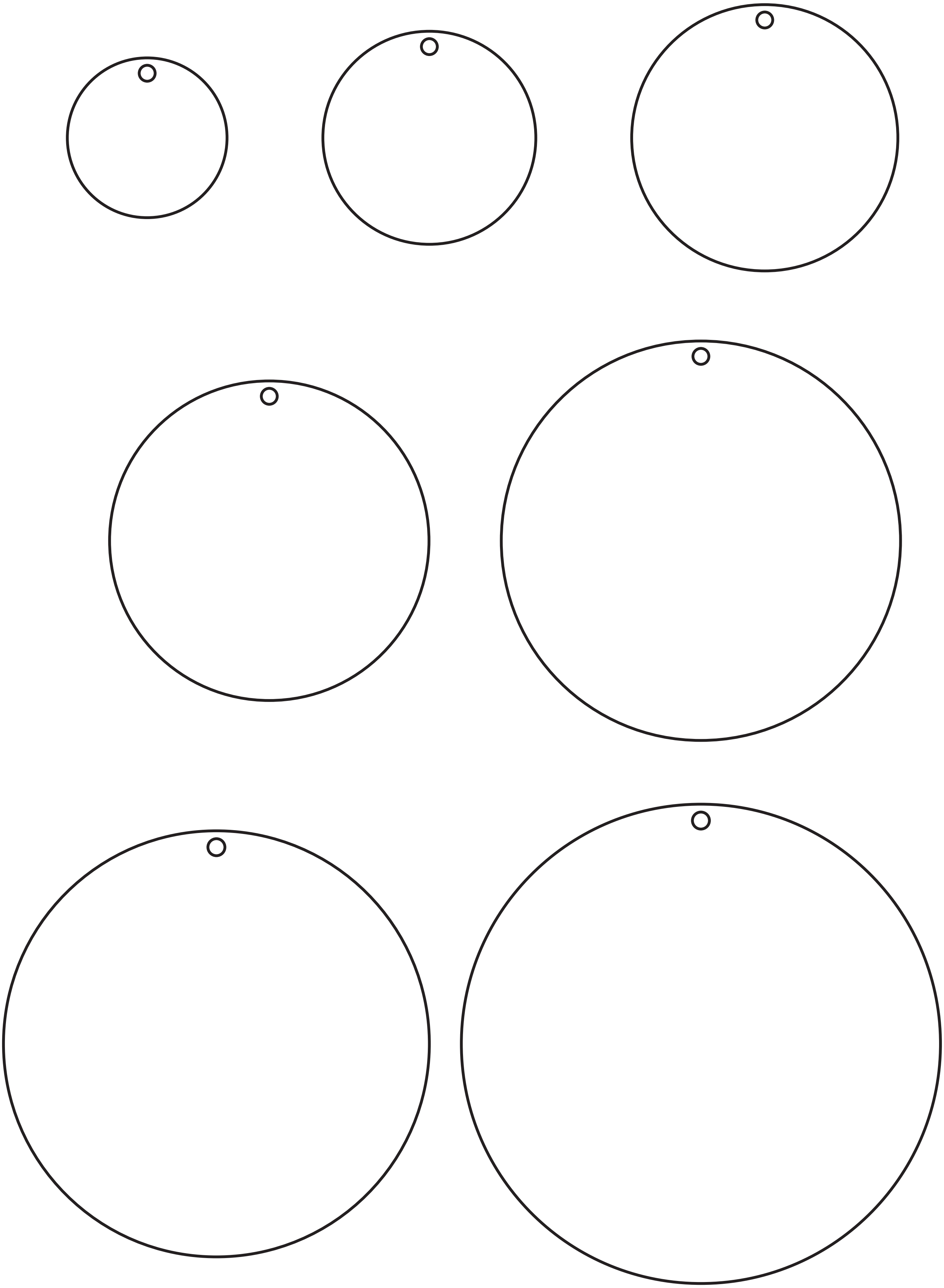

cm
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
l



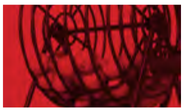




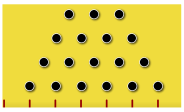




7.Estimar - Prever



2 bolas vermelhas?

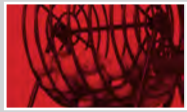


Bingo!

O vencedor é?

7.Estimar - Prever

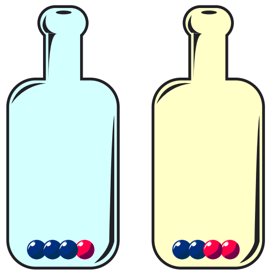
2 bolas vermelhas?



Faça você mesmo

MATERIAL: 2 garrafas pequenas com 4 bolas

2 bolas da mesma cor ou 2 bolas de cores diferentes?



Pegue num recipiente, volte-o e faça aparecer duas bolas no gargalo.
Tem mais hipóteses de obter duas bolas da mesma cor ou duas bolas de cores diferentes?
Como verificar a sua resposta?
E se cada garrafa contivesse 1000 vezes mais bolas de cada cor?

Que reter?

Prever ou estimar
Num dos recipientes, há tantas bolas duma cor como da outra. Poder-se-ia pensar que há tantas hipóteses de obter a mesma cor como cores diferentes. Mas não!

Para o verificar, pode:
- voltar a fazer a experiência um grande número de vezes. É o método estatístico.
- calcular o número de maneiras de reunir 2 bolas de entre 4. É o método probabilístico.

No primeiro caso, tem uma estimativa estatística do resultado. Quantas mais experiências fizer, tanto mais se aproximará do resultado exacto.
No segundo caso, tem uma modelação do problema e um resultado teórico.

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 urna com 750 bolas azuis e 250 vermelhas (100 bolas aparecem) ou
1 saco com 750 azuis e 250 vermelhas, 1 recipiente: 100 bolas

Sondagens - Sondagens

- Extraia 100 bolas. Quantas bolas obteve de cada cor?
- Recomece a experiência várias vezes. Em quanto estima o número de bolas de cada cor na urna?

Que reter?

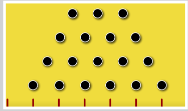
Si interrogarmos uma amostra de 100 pessoas, escolhidas ao acaso num grupo de 1000, obteremos informações aproximadas. Do mesmo modo aqui, uma amostra de 100 bolas dá informações sobre o número de bolas de cada cor dentro da urna com uma certa precisão, um certo «intervalo de variação» (entre 21 e 29 bolas vermelhas). É o domínio das sondagens.

Onde se emprega a matemática

Hoje em dia, as probabilidades e a estatística são utilizadas na gestão de sistemas complexos: controlo de foguetões, filas de espera, margens de erro... mas também nos jogos a dinheiro, na economia, nos seguros, no cálculo das reformas e dos planos de reforma, nos testes de qualidade, nos estudos de opinião...
O cálculo estatístico permite extrapolar informações para uma população inteira a partir duma amostra representativa. As sondagens, bem conduzidas, devem também informar sobre os limites das técnicas utilizadas..

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Acaso - Jogos - Sondagem - Sorte

Bingo!

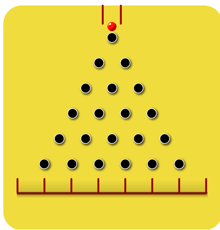


Faça você mesmo

100

MATERIAL: 1 prancha de Galton (cf plano), Esfera, pregos, tábua

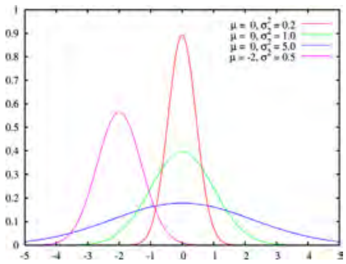
O acaso é calculável?



Escolha uma bola e faça-a descer suavemente.

- Pode prever onde ela vai chegar?
- Onde ela tem mais hipóteses de cair? Porquê?

Prever como se comporta cada bola é impossível. Pelo contrário, o cálculo das probabilidades permite prever como se distribui o conjunto das bolas à chegada.



Que reter?

A curva de Gauss

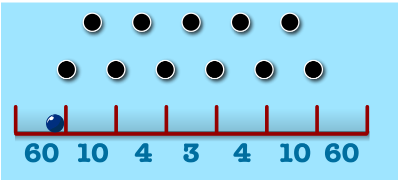
Porque é que a forma desta curva é tão conhecida? Porque é que ela é fundamental em estatística?
Se classificarmos os habitantes duma cidade, ou dum país, de acordo com uma característica (altura, peso, QI, nível de competência...), quanto mais nos aproximarmos da média relativamente ao critério considerado, mais indivíduos encontramos. Quanto mais nos afastarmos, menos existem. Nas extremidades, não há quase ninguém.
A representação gráfica desta realidade é uma curva em forma de sino, chamada curva de Gauss (1777-1855). O carácter universal dessa curva foi evidenciado por **Euler** (1707-1783) e **Laplace** (1749-1827) que disse que a distribuição de **Gauss** é a acumulação de numerosas pequenas contribuições independentes.

Faça você mesmo

100

MATERIAL: 1 prancha de Galton (cf plano), 7 valores sob as casas

Escolha a boa casa



- Aposte 1 €uro, 1 dollar, 1... numa das casas.
- Se a bola cair na casa que escolheu, ganha 60, 15, 4, 3 vezes a sua aposta!
- Em algumas casas, o jogador tem mais hipóteses de ganhar. Quais?
- Calcule o número de caminhos que conduzem a cada casa.
- Que hipóteses existem de a bola cair em cada casa?

Para conhecer a probabilidade de a bola cair numa casa, basta contar o número de caminhos que conduzem a ela! Reencontram-se os números do triângulo de Pascal. Nem todas as casas lhe dão as mesmas hipóteses de ganhar! O proprietário deste tipo de jogo é quem ganha mais frequentemente?

Onde se emprega a matemática

As probabilidades e a estatística são ferramentas que permitem a análise de dados e da informação. Encontramo-las não somente no domínio das tecnologias da informação (tratamento estatístico do sinal e das imagens), mas também na gestão de riscos (seguros), no controlo de qualidade, na economia, na saúde, na engenharia financeira (finanças quantitativas), no aconselhamento estratégico (análises de mercados, estudos de exequibilidade)...
Pode-se também utilizar uma curva de **Gauss** para modelar a gestão das vendas e dos stocks numa empresa ou num estabelecimento comercial.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Curva de Gauss - Estatística - Probabilidade - Distribuição - Esperança de ganho

O vencedor é?

Faça você mesmo

MATERIAL: 2 jogadores

Folha, pedra, tesoura...

Ao mesmo tempo, os dois jogadores mostram a sua escolha com uma mão.
A folha envolve a pedra que embota a tesoura que corta a folha!
• Como ganhar mais frequentemente neste jogo, também chamado de Chifoumi?
Resposta: jogando ao acaso em todas as jogadas.
• Mas pode-se jogar ao acaso?

Variante : Junta-se um poço!

Faça você mesmo

MATERIAL: 2 jogadores depois 2 grupos de jogadores, 1 quadro, 1 giz

A corrida a 20

O primeiro jogador diz 1 ou 2. Cada um, à vez, acrescenta 1 ou 2 ao número do outro jogador.
Os números sucessivos são escritos no quadro.Ganha quem chegar primeiro a 20.

• Primeira fase: Fazer jogar os alunos, um contra um.
• Segunda fase: Fazer jogar 2 grupos de alunos, dando um tempo de concertação entre cada jogada. Cada aluno do grupo joga à vez.
• Terceira fase: Cada grupo enuncia os elementos da estratégia ganhadora. O outro grupo aceita ou refuta o enunciado. Ganha a equipa que tiver mais enunciados aceites.

Prolongamento:
- Fazer a corrida a 30.
- Fazer a corrida a 2010.
- Fazer a corrida a 20 ou 30, mas acrescentando 1, 2 ou 3.

Faça você mesmo

MATERIAL: 2 jogadores depois 2 grupos de jogadores, 1 quadro, 1 giz, 1 grelha

101

A barra de chocolate

Cada um, à vez, designa uma casa e risca todas as casas, ainda não riscadas, que se situam imediatamente à esquerda e abaixo da casa escolhida.
• Perde quem riscar a última casa em cima, à direita.
• Podem-se fazer jogar os alunos como na corrida a 20.

Prolongamento:
• Mandar jogar com grelhas maiores ou menores.

Faça você mesmo

MATERIAL: 2 jogadores depois 2 grupos de jogadores, 1 quadro, 1 giz, 3 dados

Jogos, acaso e estratégias

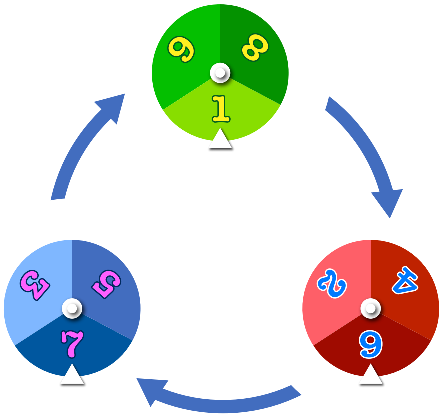
Cada um, à vez, lança os dois dados.
• Ganha o que obtivera soma maior.
• Quais são os números que têm mais hipóteses de sair?

Prolongamento:
• Jogar com 3 dados.

O vencedor é?

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 jogador, 3 roletas ou 3 dados marcados



Feitos os vossos jogos!

• Escolha uma roleta, eu escolho a seguinte e sou eu que ganho mais vezes!

• Porquê?
Com efeito, cada roleta "ganha" mais frequentemente que a precedente..

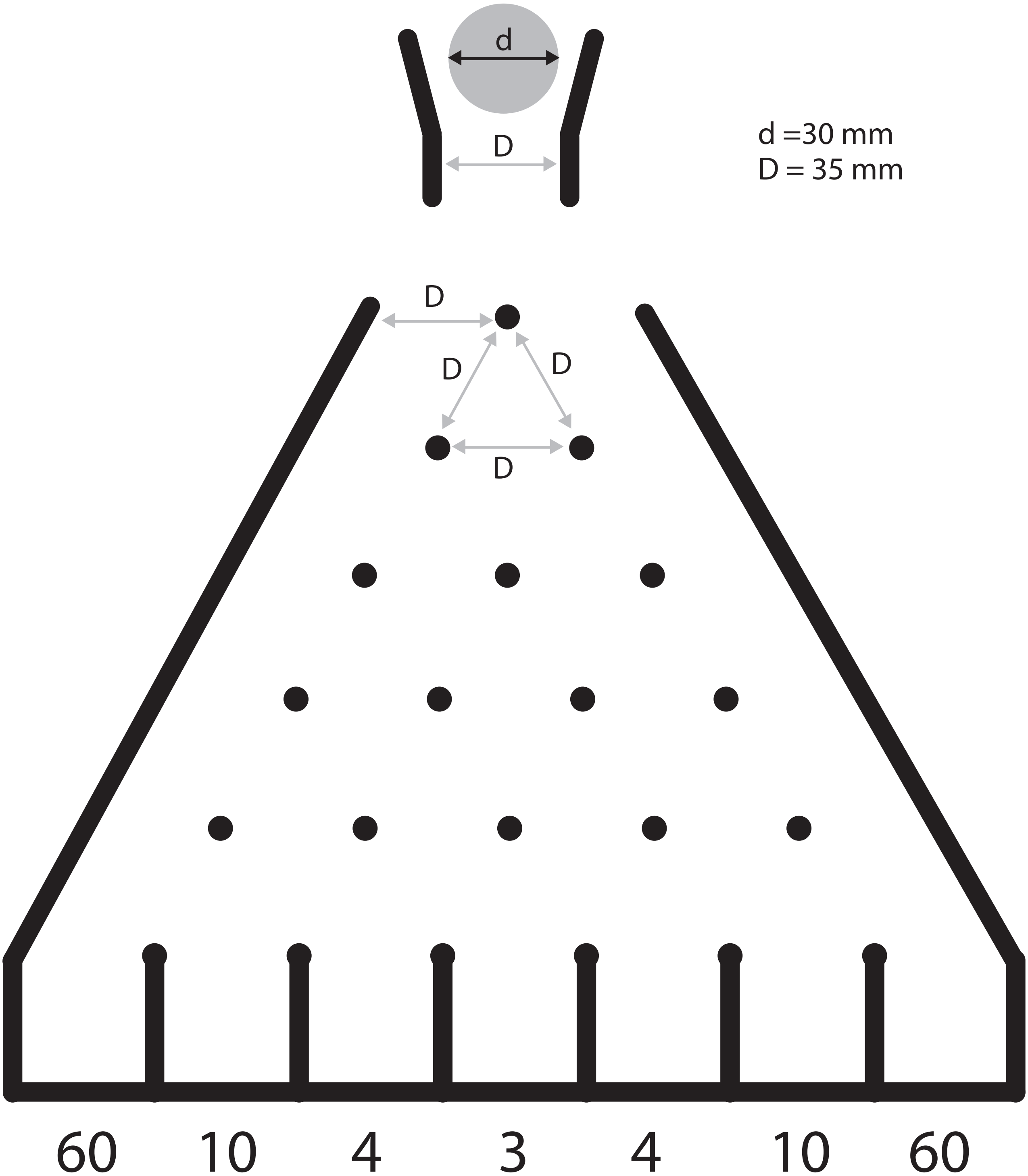
Que reter?

Estes jogos são exemplos simples da teoria dos jogos.
Nos dois primeiros casos, o jogo é de informação completa e tem fim. Há sempre um vencedor e um perdedor e, portanto, uma estratégia ganhadora. Aqui, ganha quem jogar primeiro (e jogar bem!). Mas no segundo jogo, a estratégia ganhadora não é fácil de encontrar!
O terceiro jogo participou no nascimento da **teoria dos jogos** no século XVII graças aos trabalhos de **Blaise Pascal** e do **Cavaleiro de Méré**. A teoria dos jogos foi desenvolvida no século XX por **Von Neumann** e **Oskar Morgenstern**.
Os últimos jogos mostram que o acaso pode, por vezes, ser controlado.
Situações análogas ao jogo das roletas permitiram, em particular, a **Condorcet** (1743-1794) mostrar que em democracia, não há nenhum sistema de eleições "melhor" que os outros!

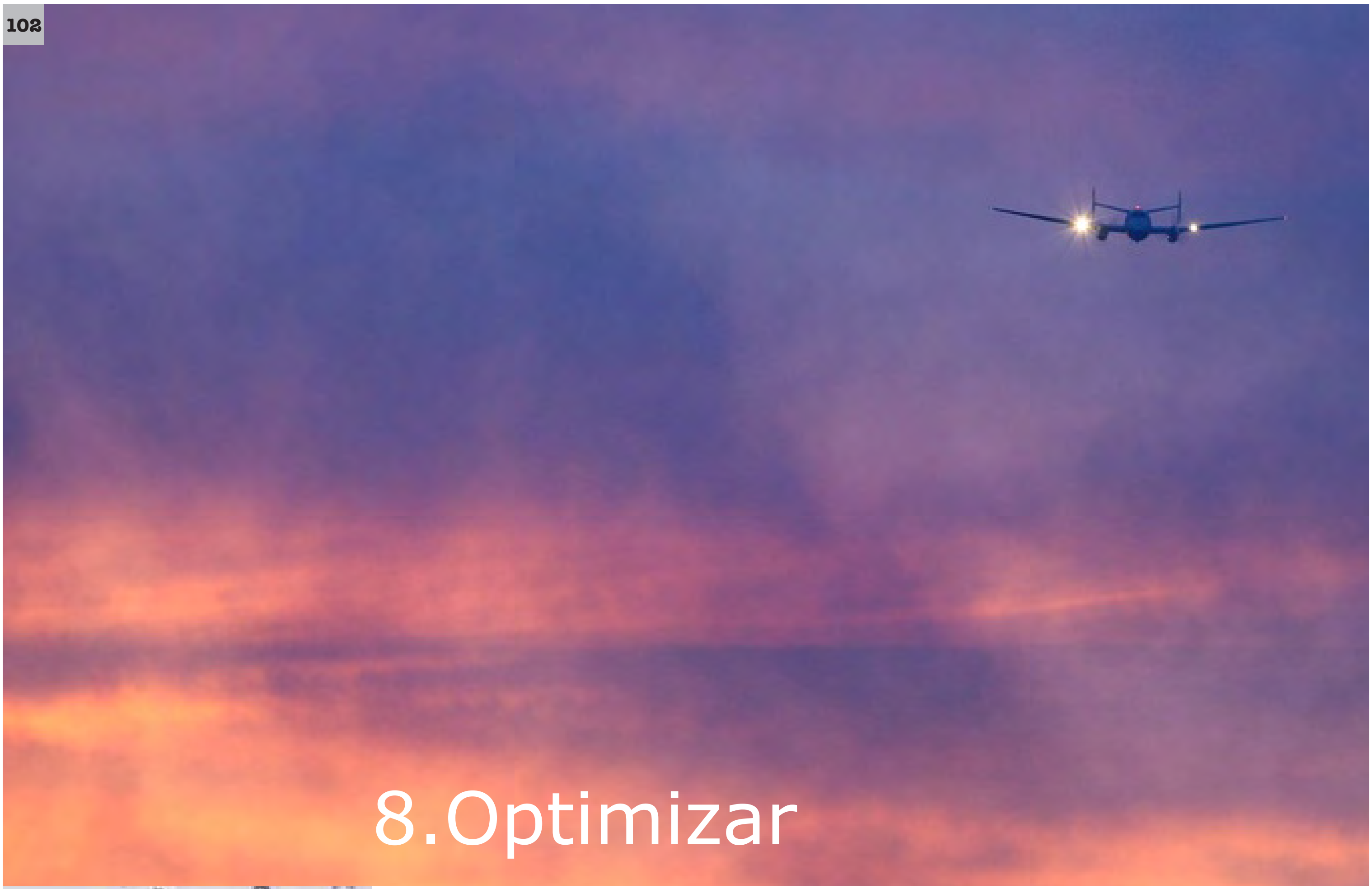
Onde se emprega a matemática

A teoria dos jogos, com o concurso das probabilidades e da estatística, está muito presente hoje em dia em todas as situações que fazem apelo à estratégia, à decisão, à competição e à cooperação.
A teoria dos jogos encontra-se, é claro, nos jogos, mas também nas lutas ou nos conflitos políticos (nas ciências políticas), nas estratégias militares e, sobretudo, na economia, no comércio e no marketing. É também utilizada em informática e em algoritmia.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Teoria dos jogos - Estratégia - Von Neumann - Nash - Teoria da Informação



d =30 mm
D = 35 mm



8.Optimizar

Bolas de sabão

O caminho mais curto

A melhor forma

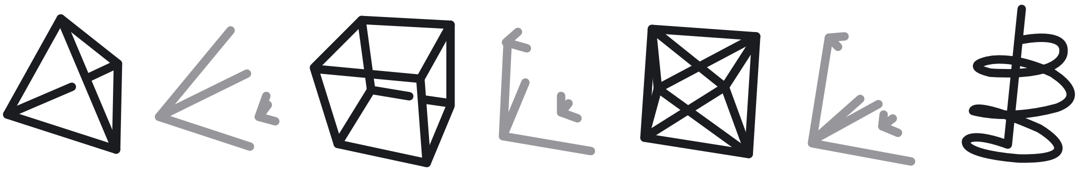
Bolas de sabão

Faça você mesmo

MATERIAL: Arame ou palhinhas, 1 bacia de água com sabão

A natureza é preguiçosa

- Construa um tetraedro, um cubo, um octaedro, uma hélice...
- Antes de os mergulhar na água, imagine como se vão comportar as superfícies das películas de sabão.
- Mergulhe-os e observe as superfícies das películas de sabão.
- Quantas faces existem à volta das arestas? E arestas à volta dos vértices?



Faça você mesmo

MATERIAL: Arame, palhinhas, uma placa, de água com sabão

Bola a bola

- Faça uma bola de sabão no ar. Que forma tem?
- Ponha uma bola de sabão na placa. Como é que a bola se apoia na placa?
- Ponha uma bola grande e uma bola pequena na placa sem que se toquem. Introduza uma palhinha entre as duas. O que é que se passa?
- Sobre um arame em U, coloque um fio não esticado e mergulhe tudo na água com sabão. Puxe um pouco o fio. Que forma toma?
- No interior duma moldura quadrada de arame, de 15 cm de lado (aproximadamente), coloque um fio fechado, com de 25 cm (aproximadamente), ligado aos 4 cantos do quadrado por outro fio. Mergulhe tudo na águae volte a tirar. Que forma vai tomar o fio interior se o esburacar com um dedo seco?

Onde se emprega a matemática

Estas formas encontram-se na natureza e na arquitectura.
Os problemas de superfícies minimais interessam a matemáticos e físicos há mais de três séculos e também, há meio século, químicos, biólogos, arquitectos...
Favos de abelha, esqueletos, teias de aranha... a evolução da natureza optimizou numerosas formas. Do mesmo modo, na indústria automóvel, na aeronáutica, na construção civil, na arquitectura das pontes... os engenheiros procuram soluções óptimas para diminuir o peso, o congestionamento, o consumo de energia, o custo ambiental dos objectos que concebem.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Bolas de sabão - Superfícies minimais - Tensão superficial

Que reter?

Matemática das películas de sabão
Uma bola de sabão é esférica, porquê?
A área constante, a circunferência delimita a superfície de perímetro menor.
A volume constante, a esfera tem a superfície menor.
Na natureza, os esforços tendem a ser os menores possíveis.
Estas formas correspondem a valores mínimos da energia potencial, que é proporcional à superfície dos corpos.
As moléculas de sabão criam uma tensão superficial que minimiza as superfícies das películas de sabão.

O belga **Ferdinand Plateau** foi o primeiro a estudar estas formas na década de 1860.

Notou que:

- Se uma bola de sabão se apoia numa superfície, então é-lhe perpendicular.
- Quando películas de sabão se encontram, elas fazem-no: 3 a 3 ao longo duma linha com ângulos iguais, de 120°, 4 a 4 à volta de um ponto, com ângulos constantes (109°28’...)

8.Optimizar

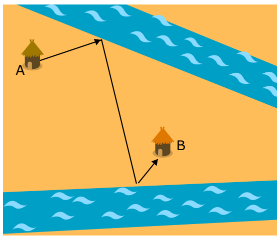
O caminho mais curto

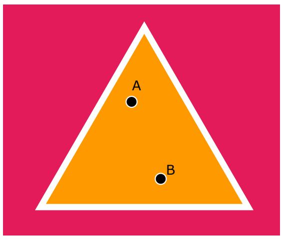
Faça você mesmo

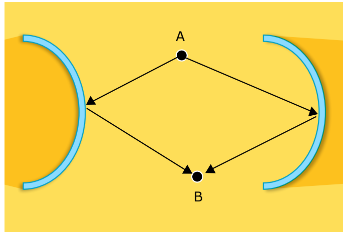
MATERIAL: Papel, lápis

O caminho mais curto

Qual é o caminho mais curto entre A e B?







- passando pelo rio?
- passando pelos dois rios?

- passando pelos 3 lados de um triângulo?

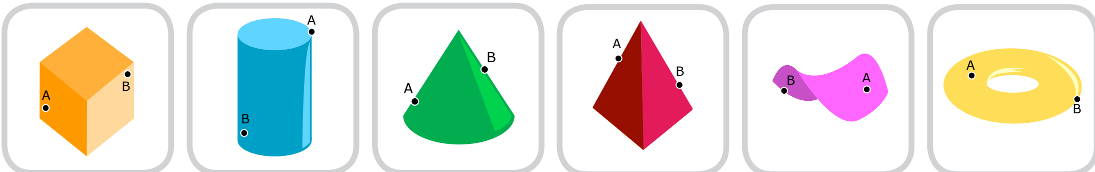
- por um espelho convexo?
- por um espelho côncavo?

Faça você mesmo

MATERIAL: Papel, lápis, 1 cubo - 1 cilindro - 1 cone - 1 pirâmide - 1 "sela de cavalo" - 1 toro

O caminho mais curto sobre uma superfície

Qual é o caminho mais curto entre A e B?



Faça você mesmo

MATERIAL: 1 globo terrestre, 1 fio ou 1 elástico

E sobre a Terra?

- Escolha dois pontos próximos do paralelo 30 ou 40: Paris e Montréal ou Luanda e São Paulo....
- Qual é o caminho mais curto para ir de uma cidade à outra?
- Verifique com o fio.
- A que corresponde esta linha sobre o globo?

Que reter?

A linha recta não é o caminho mais curto... em geral!
O caminho mais curto sobre uma superfície chama-se uma **geodésica**.

- Numa **superfície plana**, em geometria euclidiana, é a linha recta.

- Numa **superfície planificável**, um cilindro, um cone, um poliedro...
é também o segmento de recta que une os dois pontos se considerarmos a superfície planificada.

- Já não é uma linha recta se a superfície não tiver curvatura nula em todos os pontos. É o caso da **«sela de cavalo»**, com curvatura negativa, e da esfera, com curvatura positiva.

- Na **esfera**, é um arco de circunferência máxima, circunferência centrada no centro da Terra.
Estes problemas foram desenvolvidos por **Gauss** no século XIX.

Onde se emprega a matemática

Na Terra, os problemas de caminho mais curto interessam a todos os gestores de redes de fluidos, electricidade, gás, petróleo, água e também comunicações terrestres. Podem ser resolvidos através da matemática ou da algoritmia.
À superfície da Terra, são usados, desde há muito, pelos marinheiros. Também o são, na actualidade, pelos aviadores, mesmo para os voos a longa distância. No que respeita aos voos espaciais, estes problemas tornam-se mais complexos e fazem apelo à atracção gravitacional dos planetas.

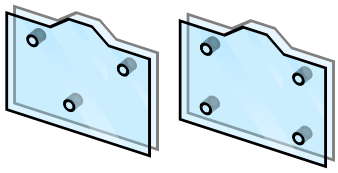
PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Caminho mais curto - Mínimo - Curvatura - Gauss - Superfície planificável

A melhor forma

Faça você mesmo

MATERIAL: 2 placas de acrílico ligadas por 3, 4 ou 5 barras, 1 bacia de água com sabão

O caminho mais curto entre 3 pontos



• Coloque 3 barras entre as 2 placas*.
- Mergulhe tudo. Volte a tirar e observe.
- Quantos vértices existem? E arestas? Que ângulo fazem?

• Coloque 3 barras entre as 2 placas.
- Antes de mergulhar tudo, imagine como se vão configurar as ligações das películas de sabão: em X? em U? Z? H?
- Mergulhe e observe: quantos vértices existem? E arestas?

**Que se passa se um dos ângulos do triângulo for superior a 120°?*

Faça você mesmo

MATERIAL: 2 placas de acrílico, 1 palhinha

Os favos de abelha

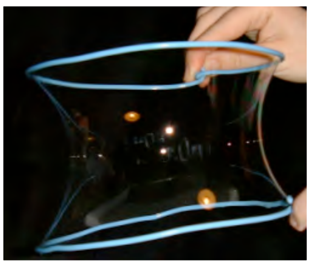
• Faça uma bola de sabão entre as duas placas. Forma-se um cilindro.
• Coloque uma sucessão de pequenas bolas, umas ao lado das outras. Como se juntam umas às outras?
• Introduza uma lâmina perpendicular às 2 placas e observe.
• Si as bolas forem do mesmo tamanho, que forma tomam? Como se juntam?

Para saber mais

Um empilhamento de discos deixa espaços vazios. É o hexágono regular que ocupa a maior superfície sem deixar orifícios. Encontramo-lo nos favos das abelhas. Terão as abelhas encontrado a solução óptima?
A célula do favo não é contudo a forma mais económica para ocupar um determinado volume. Actualmente, já se encontrou melhor sem contudo se ter descoberto ainda a melhor forma possível.

Faça você mesmo

MATERIAL: Em arame: 2 circunferências, 4 barras



Superfícies minimais entre duas circunferências,2 rectas , 4 rectas...

• Tire as duas circunferências da bacia e afaste-as um pouco uma da outra. Onde se encontra esta superfície?
• Tire duas barras da bacia, afaste-as um pouco uma da outra e rode-as um pouco uma em relação à outra. Onde se encontra esta superfície?
• Volte a fazer a experiência com 4 barras ligadas.

Onde se emprega a matemática

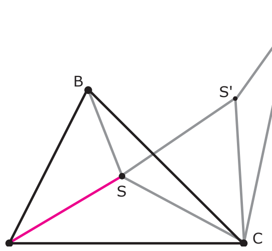
Encontram-se superfícies minimais na físico-química dos materiais, em biologia e em arquitectura (estruturas em vela ou mesmo em betão).
As formas em favo de abelha têm vantagens por serem ligeiras, resistentes e rígidas. Tais formas, feitas em alumínio, são utilizadas nas estruturas dos Airbus A380 e dos TGV, nas paredes dos satélites...
Em cartão ou em plástico, o favo de abelha é vulgarmente utilizado em portas, em paletes de transporte...

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Optimização - Superfícies minimais - Favo de abelha - Estrutura sob tensão

Que retenir

Solução das películas de sabão e matemática

A solução das películas de sabão mostra o caminho mais curto ligando 3 pontos, 4 pontos e mais. O problema, com 3 pontos, foi resolvido pelo suíço **Joseph Steiner** no século XIX.



Eis uma solução simples:
Constrói-se o triângulo CS'B', obtido por uma rotação de 60° a partir do triângulo CSB.

Tem-se:
SA + SB + SC = SA + SS' +S'B'.

Esta quantidade é mínima quando os 4 pontos A-S-S'-B' estão alinhados.Neste caso, os ângulos BSC e CS'B' valem 120°. E o problema está resolvido

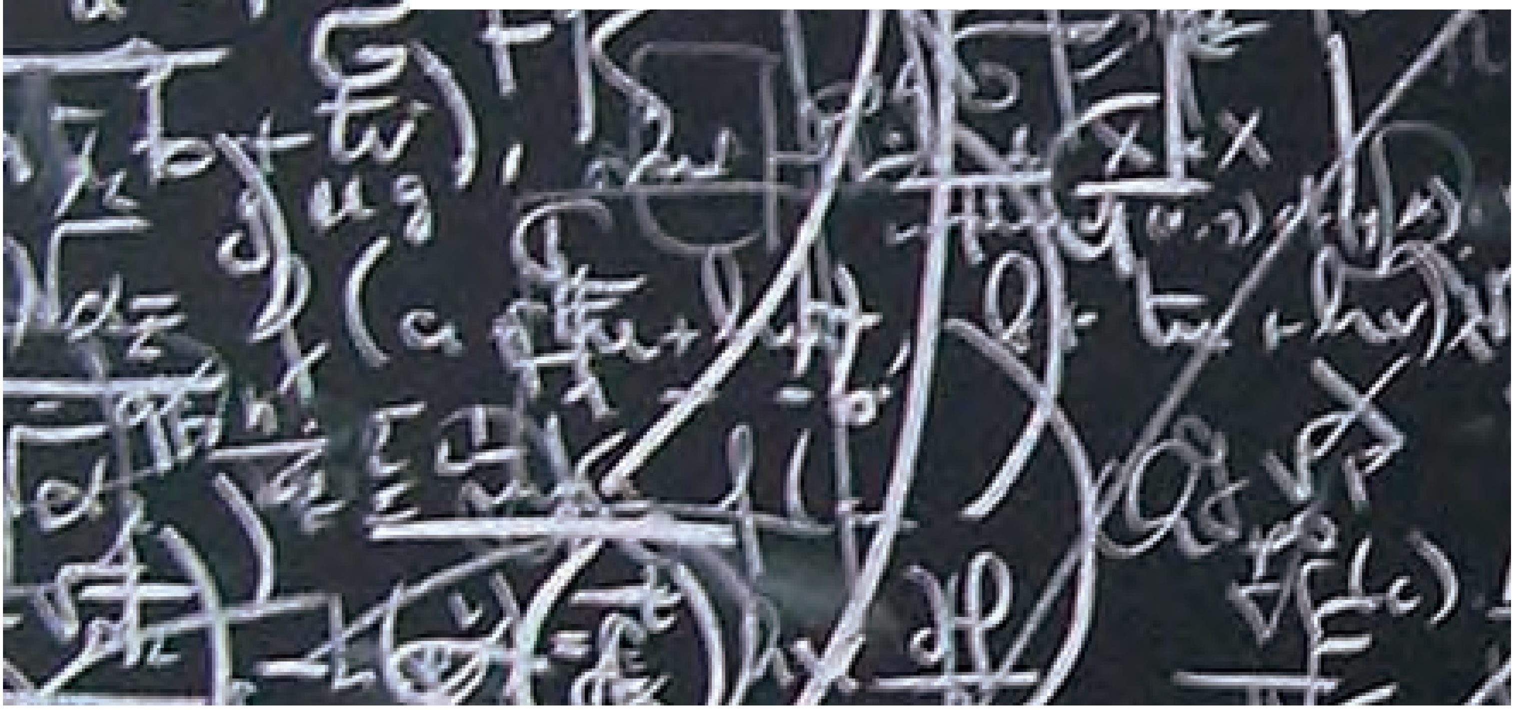
Um escola para 3 aldeias
Os 3, 4 ou 5 pontos podem ser substituídos por aldeias, quintas..., o ponto de Steiner por uma escola, um hospital...
A resposta é dada pela película de sabão.
Como resolver este problema se os números de habitantes forem diferentes?

9.Provar

Pitágoras

Números e Figuras

Est-ce bien vrai ?



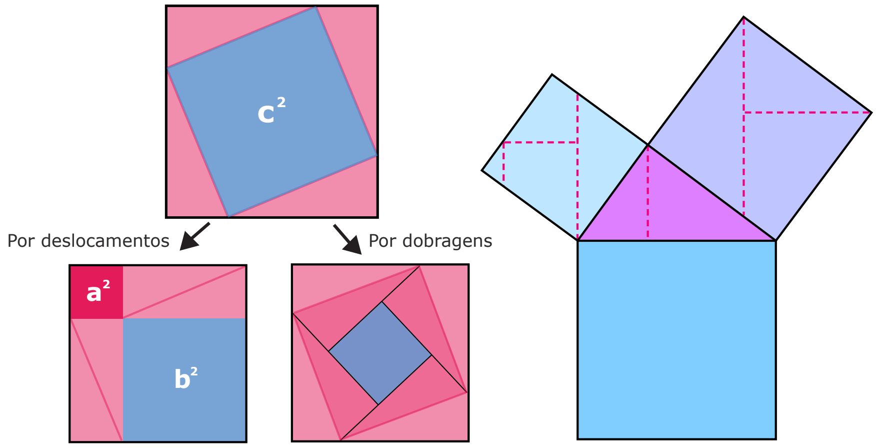
Faça você mesmo

MATERIAL: 2 puzzles para recortar

113 114

O Teorema de Pitágoras

Deslocando as peças de cada puzzle, faça surgir uma demonstração do Teorema de Pitágoras.



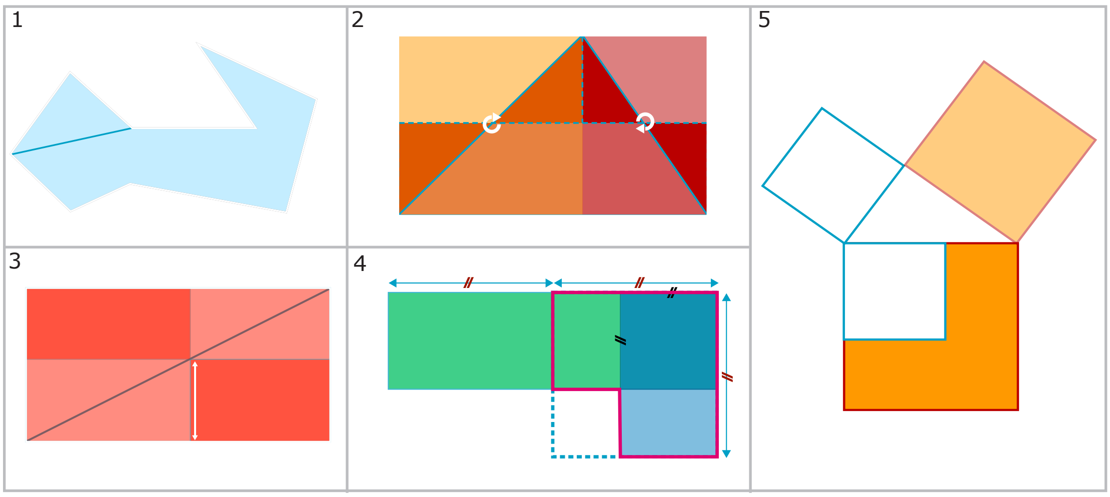
Faça você mesmo

MATERIAL: Papel, lápis, 1 tesoura, compasso

Dum polígono ao quadrado com a mesma área

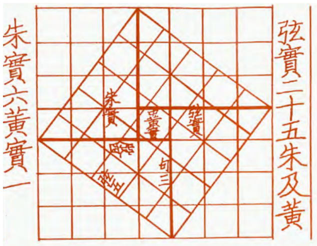
Por recorte, verifique as demonstrações de Euclides:

- 1. Todo o polígono pode ser decomposto numa soma de triângulos.
- 2. Todo o triângulo pode ser decomposto de modo a reconstruir um rectângulo com a mesma área.
- 3. Todo o rectângulo pode ser decomposto noutro rectângulo com a mesma área e com a largura fixada.
- 4. Todo o rectângulo pode ser considerado como a diferença de2 quadrados.
- 5. Graças ao teorema de Pitágoras, pode-se construir um quadrado igual à diferença de 2 quadrados!



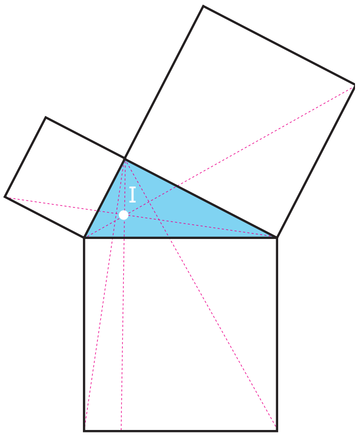
Conclusão
Todo o polígono pode ser decomposto de modo a reconstituir um quadrado com a mesma área. Desde os Gregos, o cálculo de áreas reduz-se a comparar a superfície à dum quadrado. Diz-se que a superfície é **quadrável**. Note que é medida em « **cm², m², km²**...».

Que retenir



Chou-pei Suan-King
(1105 A.C.) - China

3000 anos de investigação
Os antigos, sábios do Egipto ou da China, já conheciam muitos resultados formulados com números inteiros (como $3^2 + 4^2 = 5^2$).
Os Gregos foram os primeiros a tentar demonstrar estes resultados de modo geral.
Assim, a mais antiga demonstração conhecida do teorema de **Pitágoras** (Século VI A.C.) sobre "O quadrado da hipotenusa..." foi dada por **Euclides** (Século III A.C.). Existem cerca de 400 demonstrações diferentes!
Estas demonstrações deram origem a novos problemas e a novos resultados, como a natureza não racional da diagonal dos quadrados de lado inteiro.



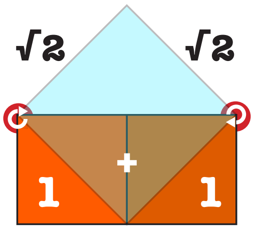
Faça você mesmo

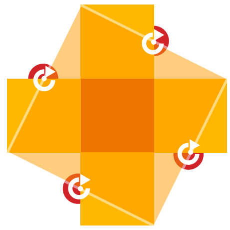
MATERIAL: Papel, lápis, 1 tesoura

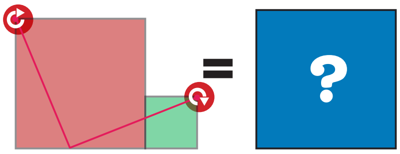
Duplique, triplique...

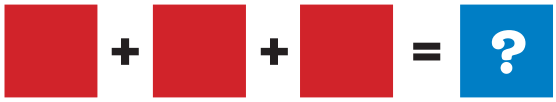
Construa, por recorte, um quadrado:
- igual à soma de dois quadrados,
- igual a duas vezes um quadrado dado,
- igual a 3 vezes, 5 vezes ... um quadrado dado.

Utilize, para o fazer, o mínimo de recortes possíveis.









Que reter?

Os **Chineses** consideravam os problemas matemáticos, tanto aritméticos como geométricos, como puzzles. Com os **Gregos**, estes problemas de quadratura e de duplicação originaram problemas célebres:
- A irracionalidade da diagonal do quadrado de lado 1,
- A duplicação do cubo,
- A quadratura do círculo.

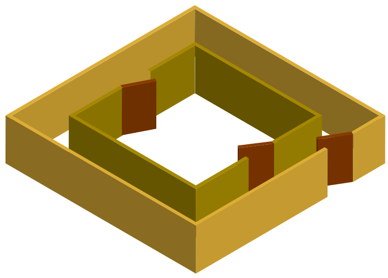
Faça você mesmo

MATERIAL: Papel, lápis

O sofá

- Quais são as dimensões máximas dum sofá, que deve passar por um corredor com um metro de largura e uma esquina em ângulo recto?
- Pode entrar na divisão central?
- E se fosse simplesmente uma prancha (ou uma escada)?

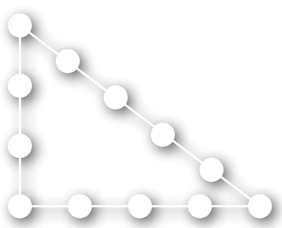
NB: as portas têm 80 x 210 cm!



Onde se emprega a matemática

A procura de provas, de demonstrações, utilizando resultados matemáticos já conhecidos, está na base da actividade do matemático e faz a sua originalidade.
O **Teorema de Pitágoras** tem utilidade prática na construção de comprimentos irracionais como √2, √3, √5... mas é também utilizado ainda hoje pelos pedreiros, pelos arquitectos e pelos transportadores de grandes objectos!

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Hipotenusa - Número irracional - Duplicação – Quadratura - Pitágoras - Euclides...



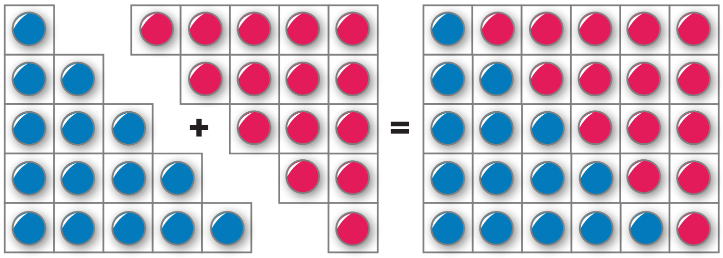
Números e Figuras

Faça você mesmo

MATERIAL: Fichas redondas ou quadradas

Os números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15...

São as somas dos primeiros números inteiros.
Dois métodos para calcular os números:



ou :

$$\begin{array}{ll} & 01 + 02 + 03 + 04 + 05 + 06 + 07 + 08 + 09 + 10 + 11 + 12 \\ & + 12 + 11 + 10 + 09 + 08 + 07 + 06 + 05 + 04 + 03 + 02 + 01 \\ = & 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 \\ = & \mathbf{12 \times 13} \end{array}$$

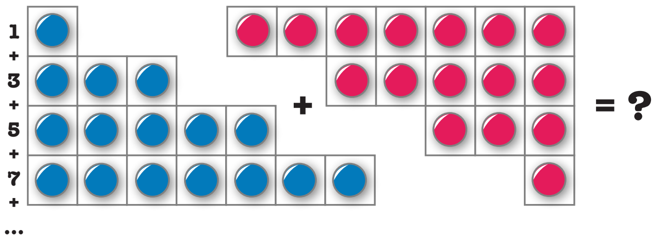
$$\text{donde } T = \frac{12\text{x}13}{2}$$

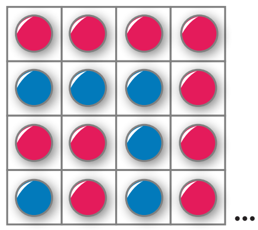
e mostre, mais geralmente, que: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \bullet (n + 1)}{2}$

Verifique, nos primeiros números inteiros, que cada um se escreve como soma de, no máximo, três números triangulares.

Os números quadrados: 1, 4, 9, 16...

São as somas dos primeiros números ímpares.
Dois métodos para calcular estas somas:



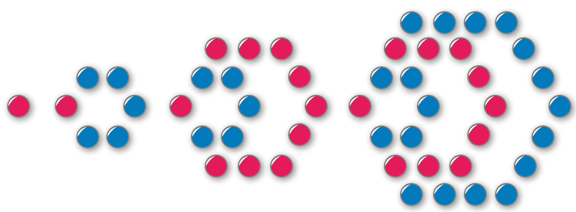


E mostre, mais geralmente, que: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$

Verifique, nos primeiros números inteiros, que cada um se escreve como soma de, no máximo, 4 números quadrados.

Os números pentagonais, hexagonais...

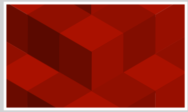
São as somas dos primeiros números representados sobre um pentágono, um hexágono... Encontre-os e encontre a sua fórmula geral.



Que reter?

Das primeiras provas simples, compreensíveis por um aluno do 3o ciclo do Ensino Básico e realizadas com figuras geométricas, passámos, na actualidade, a demonstrações que representam centenas de páginas, que necessitam da utilização de computadores e que só são verificáveis por um pequeno número de especialistas. Estas sucessões de números, representados por pontos - foram estudadas por **Pitágoras**, **Diofante** e também por **Pascal**.
Em dimensão 3, também se encontram os números piramidais, cúbicos...

Números e Figuras

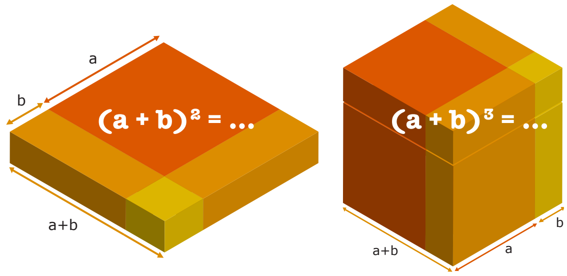


Faça você mesmo

MATERIAL: Blocos de madeira ou peças de cartão

Álgebra e Geometria

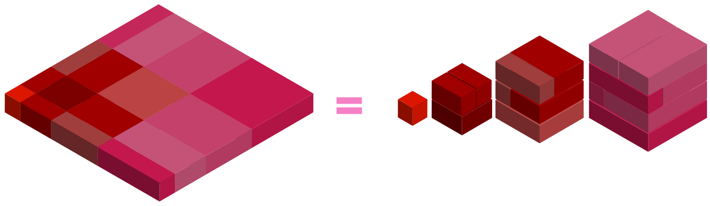
Com estes paralelepípedos, estabeleça as fórmulas:



E também as fórmulas:

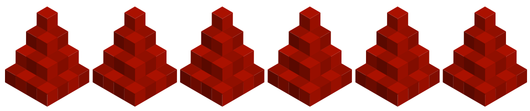
$(a - b)^2 = \dots \qquad a^2 - b^2 = \dots$

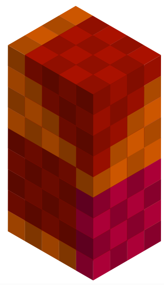
Com estes blocos, mostre que:



$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots$$

Com 6 blocos deste tipo, construa uma torre compacta.



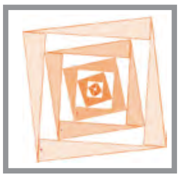


E mostre, mais geralmente, que, para todo o inteiro n, se tem:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Faça você mesmo

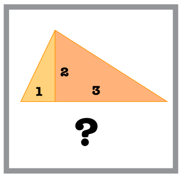
MATERIAL: Papel, lápis



De conjecturas a provas

Os triângulos de Pitágoras

Encontre os primeiros triângulos rectângulos cujos comprimentos dos lados são números inteiros, dos quais dois são consecutivos (como 3 – 4 – 5). Tente deduzir todos os trios que verificam esta



Os quadrados de Fermat

Encontre os primeiros números primos que se escrevem como soma de quadrados de dois inteiros (como $5 = 1^2 + 2^2$). Tente deduzir todos os números primos que se escrevem assim.

Onde se emprega a matemática

A actividade primordial dum cientista, dum matemático em particular, é encontrar e formular um "bom" problema.

O que é um bom problema?

É - como terá dito **David Hilbert** no Congresso Mundial de Matemática em Paris, em 1900 - um problema que pode ser compreendido por qualquer aluno de 3º ciclo do Ensino Básico.

Mas é também um problema que faz avançar o conhecimento, mesmo que não esteja resolvido. Foi o caso da última conjectura de **Fermat** que forneceu numerosos resultados antes de ser demonstrada por **Andrew Wiles** em 1994, 350 mais tarde.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Números representados - Sucessões de inteiros - Conjectura

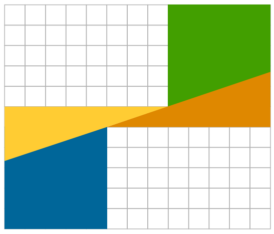
Est-ce bien vrai ?

Faça você mesmo

MATERIAL: 2 puzzles de 4 peças

115

63 = 64 = 65



Com estas 4 peças de puzzle fabrique um quadrado e depois um rectângulo.

- Qual é a área de cada um?
- E a área da superfície de partida?

Questão: porque é que os números da sucessão de Fibonacci intervêm?

Faça você mesmo

MATERIAL: 1 padrão a reconstruir

116

Ilusão ou Realidade?

Estes objectos existem? Pode construí-los? A resposta está numa frase do humorista francês Pierre Dac: «*Tudo depende do ponto de vista em que nos colocamos!*»

Faça você mesmo

MATERIAL: Papel, lápis

De Pitágoras a Wiles

- Verifique que: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ $1^3 + 6^3 + 83^3 = 9^3$ $7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$
- Encontre outros cubos decomponíveis em 3 cubos.

Que reter?

Era sabido, muito antes de **Pitágoras**, que existem números inteiros que verificam:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$$

Encontre outros além de (0, 0, 0) e de (3, 4, 5).
Pierre de Fermat publicou em 1641 a **conjectura** de que um cubo de lado inteiro não pode ser decomposto em 2 cubos de lados inteiros e, mais geralmente, para $n \geq 3$, que a equação:

$$\mathbf{x^n + y^n = z^n}$$

não tem solucões inteiras além soluções em 0 e 1.
Antes de ser demonstrada 350 anos mais tarde por **Andrew Wiles**, foi objecto de novas conjecturas: era verdadeira? não demonstrável? indecidível?

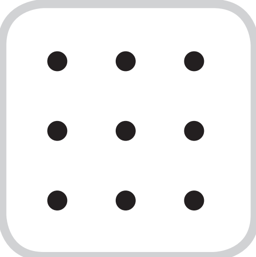
9.Provar

Est-ce bien vrai ?

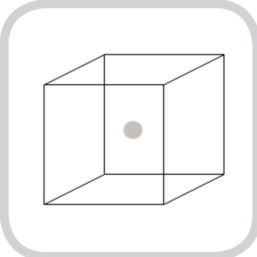
Faça você mesmo

MATERIAL: Papel, lápis, 6 fósforos

Mude de ponto de vista



• Com 4 segmentos, ligue estes 9 pontos sem levantar o lápis do papel.



• Neste cubo de faces transparentes, foi feito um orifício.
Em que face(s) pode estar?

• Faça um triângulo com 3 fósforos, 2 triângulos com 5 fósforos, 4 triângulos com 6 fósforos!

1
11
21
1211
111221
312211
...

• Encontre a sucessão...

Que reter?

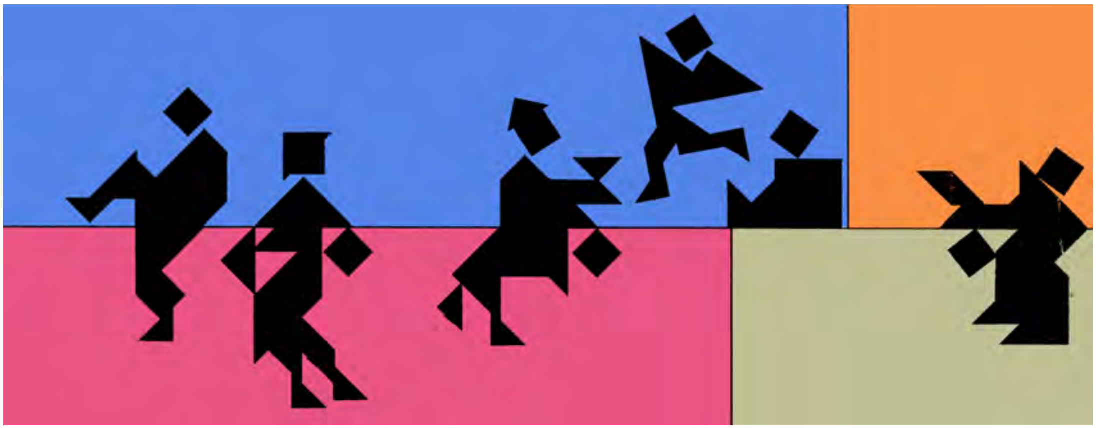
Utilizadas nos testes psicológicos, estas questões mostram que em matemática, como na vida, é necessário saber ser "flexível" e abordar os problemas sob todos os ângulos!

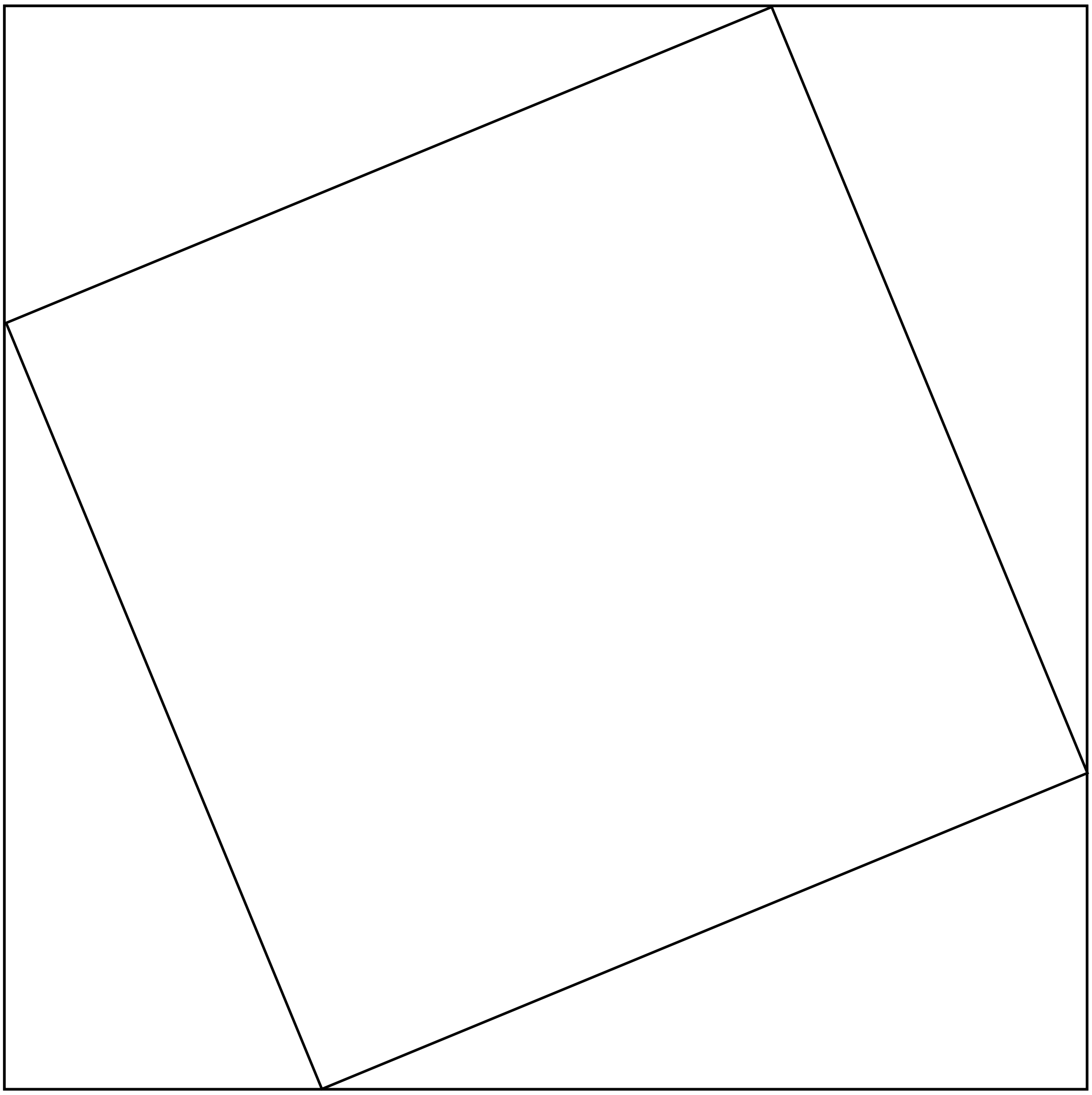
Onde se emprega a matemática

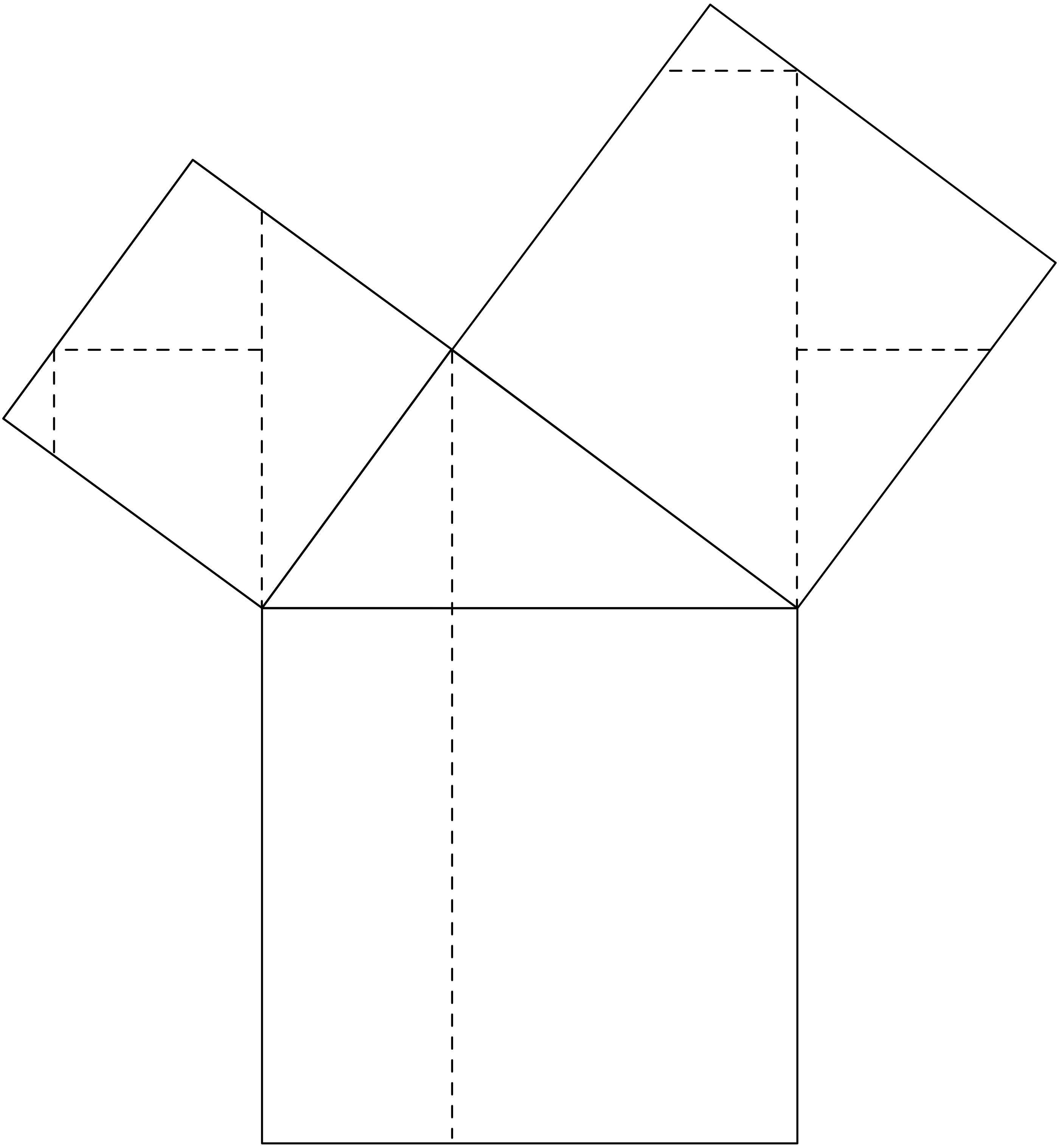
Podemos sempre demonstrar qualquer coisa que sabemos ser verdadeira?

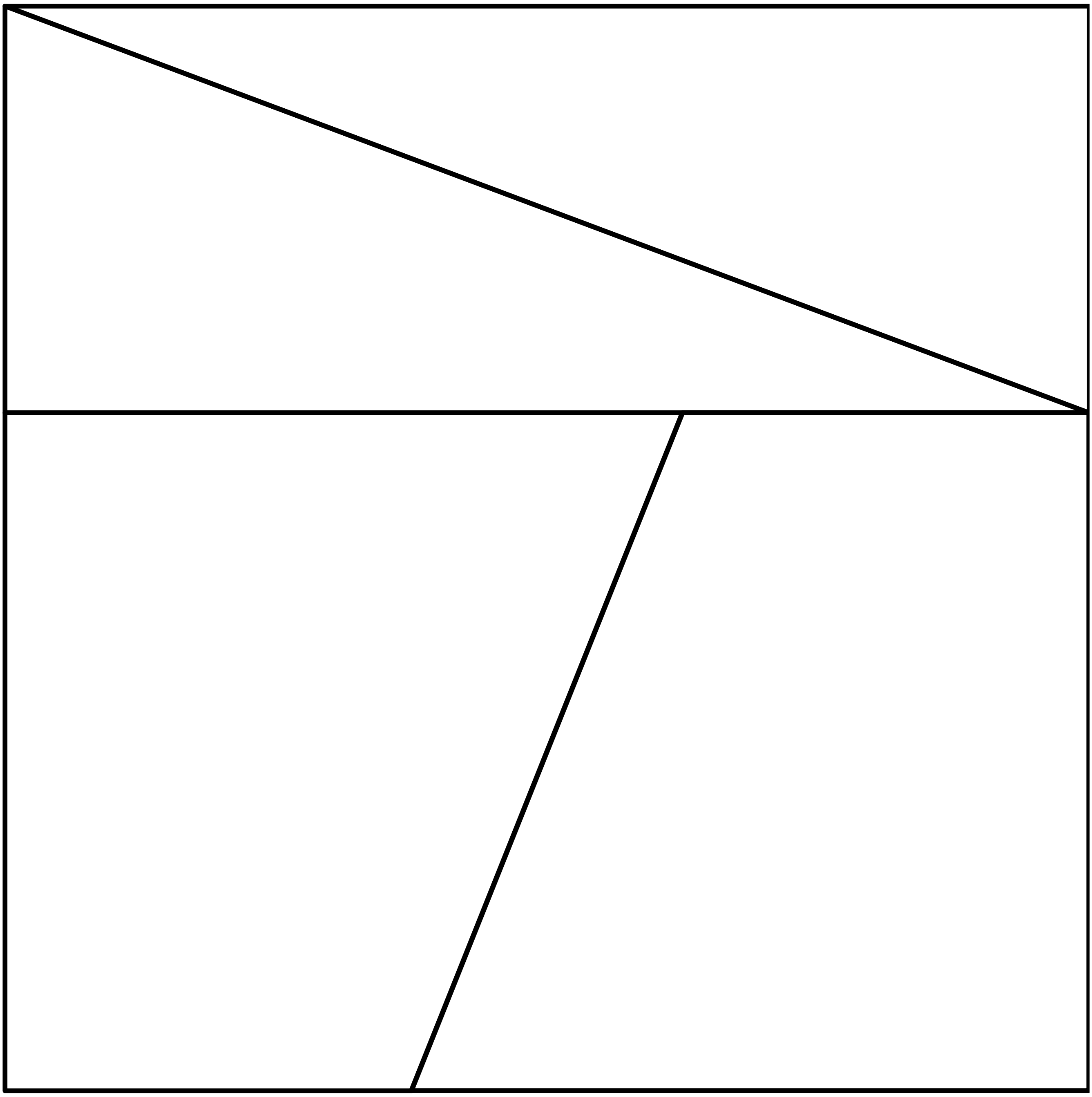
Em 1931, **Kurt Gödel** respondeu pela negativa com o seu famoso Teorema chamado da "incompletude". Provou que as noções de verdade e de demonstrabilidade não coincidem mostrando – num exemplo aritmético – que uma conjectura pode ser verdadeira mas indemonstrável. Desde então, tanto em matemática com em informática, os problemas julgados, até ao presente, indecidíveis são objecto de investigação constante..

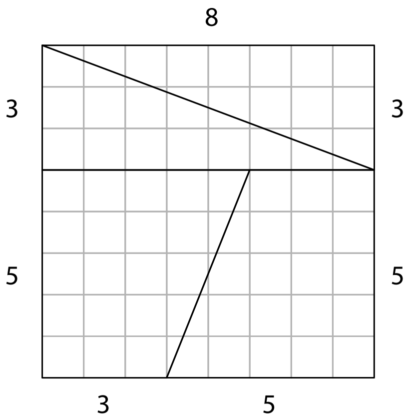
PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Indecidível - Calculável - Godel - Problemas P-NP

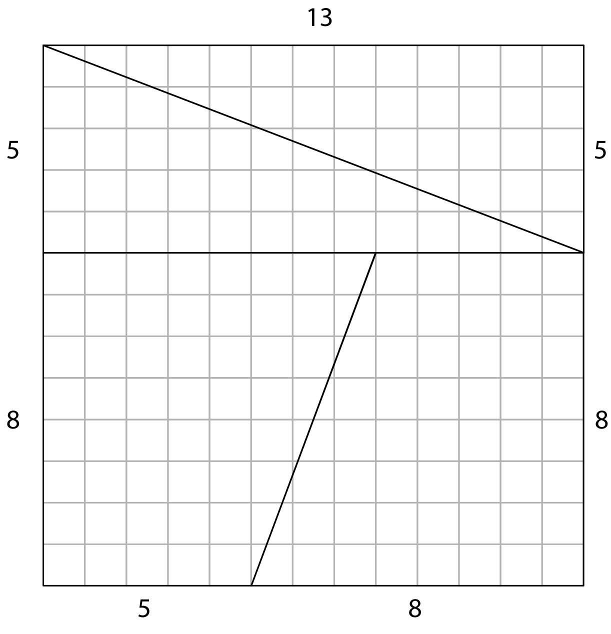


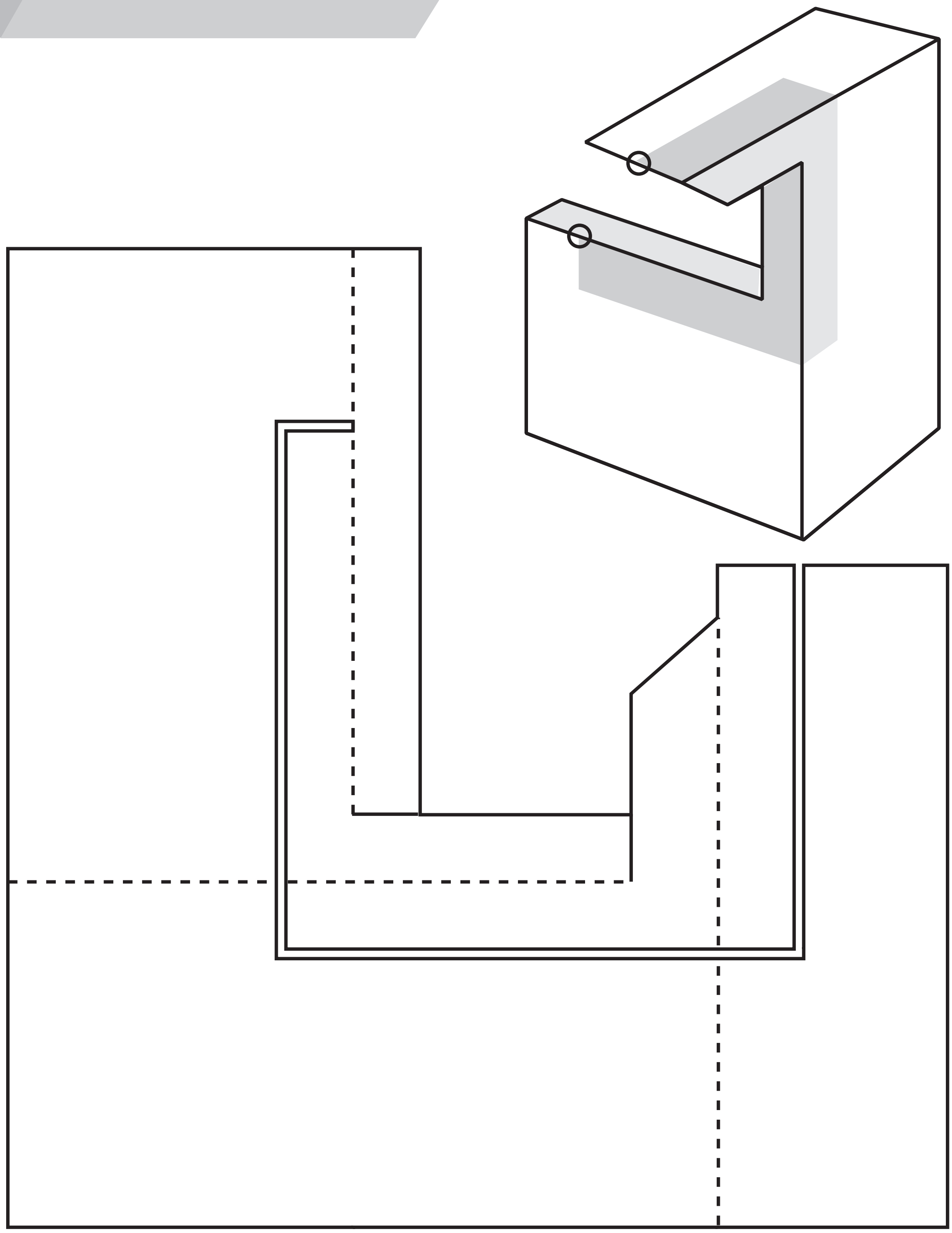


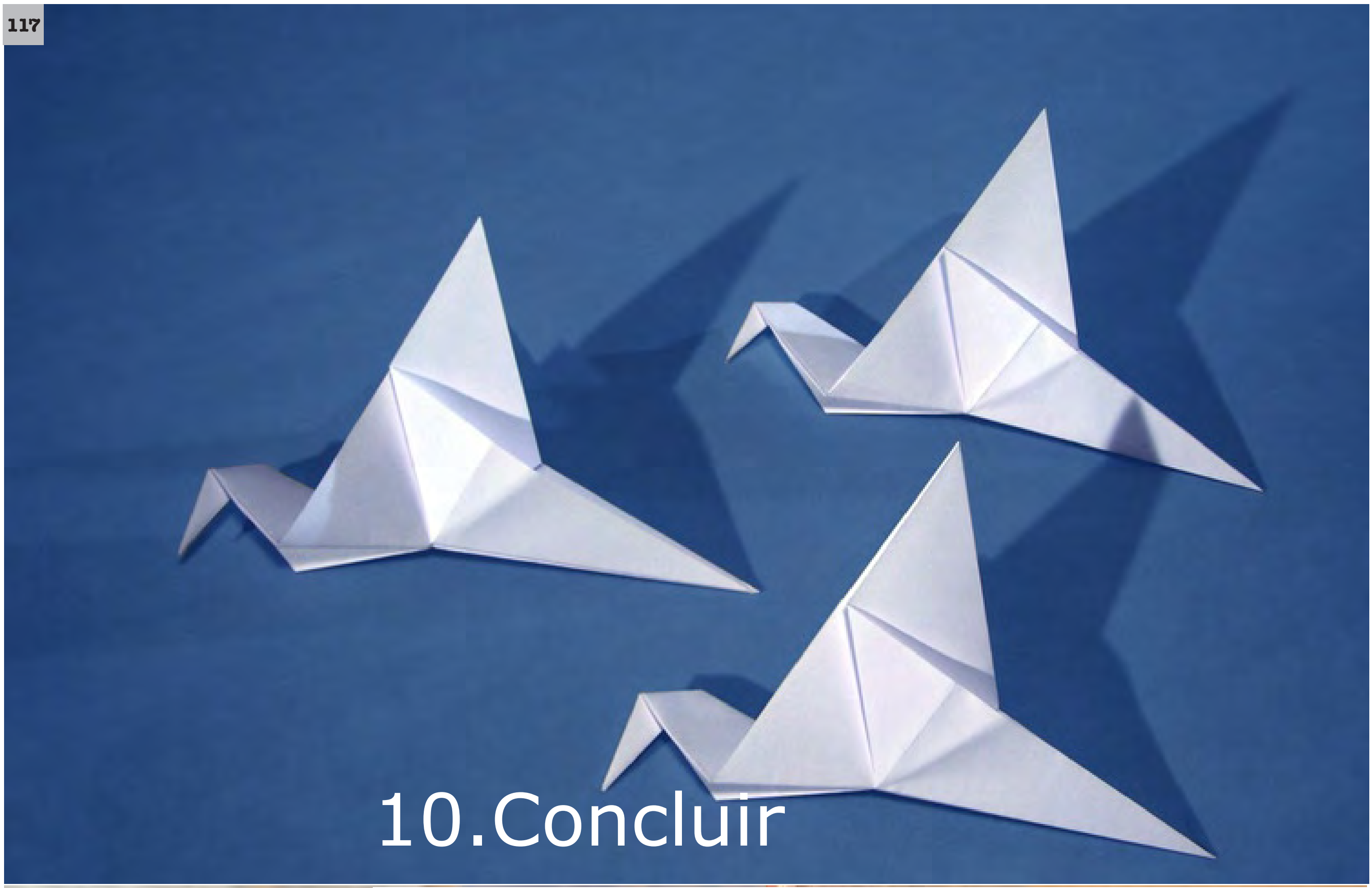





8
3
3
5
5
3
5


13
5
5
8
8
5
8





10.Concluir

 Experimente

 Ponha hipoteses

 Demonstre!

Experimente

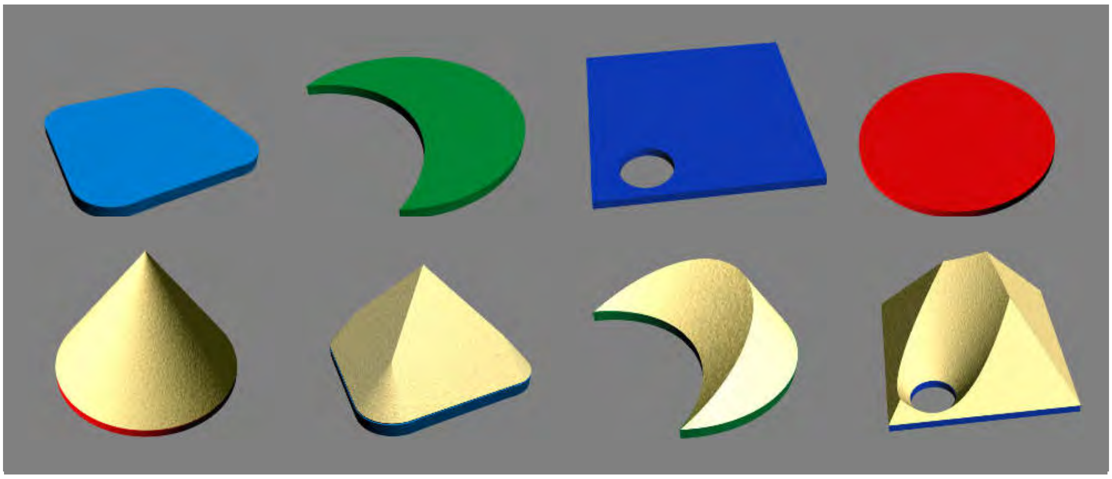
Faça você mesmo

MATERIAL: Polígonos de cartão, 1 caixa de areia seca e fina

A geometria dos montes de areia

Escolha uma placa. Verse areia por cima até que transborde.

- Quando obtém uma pirâmide? E um cone?
- Onde se situa o cume?
- Nos outros casos, qual é a forma das faces?
- Onde se situam as arestas? E as arestas horizontais superiores?
- O que se passa quando as placas têm um orifício?



www.tasdesable.com

Que reter?

Ao longo deste documento, propusemo-vos um conjunto de situações onde vós, e sobretudo os vossos alunos, são convidados a experimentar.
Estas situações são extraídas de trabalhos de matemáticos, de físicos, de professores de matemática, de pedagogos e de didácticos, a quem aqui agradecemos.

São também extraídas das experiências propostas na exposição «**Por qué los matématicos?**» (em inglês «**Experiencing Mathematics!**»)

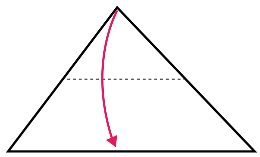
Todas podem ser feitas com material muito simples. Muitas das experiências podem ser prolongadas com a utilização do computador.

Faça você mesmo

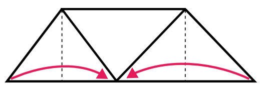
MATERIAL: Folhas de papel A4, desenhos de dobragens

Dobragens e Matemática

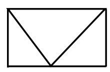
- Quais são as dimensões duma folha de papel? E a sua massa?
- Dobre uma folha em duas. Quais são as novas dimensões?
- Verifique que são proporcionais às precedentes.
- Verifique que $L4/\ell 4 = L5/\ell 5 = \ldots = \sqrt{2}$
- É esta relação verdadeira para todas as folhas de papel?
- Porque se diz que é papel de 80g (ou 120, 150,... 250g)?
- Com estas folhas, como fazer, por dobragem, um quadrado, um triângulo equilátero...?



Verifique, por dobragem, que a soma dos ângulos dum triângulo é igual à 180°



- Verifique que as bissectrizes dum triângulo se cortam no mesmo ponto.
- Faça o mesmo para as alturas, as mediatrizes...
- Como fazer um pentágono regular, um hexágono?



Onde se emprega a matemática

A **abordagem experimental** é uma das abordagens utilizadas pelo cientista.
Pode ser também a do matemático que, perante uma – boa – questão tenta encontrar respostas. Em certos domínios das ciências, em astronomia, em física das partículas, em biologia por exemplo, a experimentação pode ser impossível de realizar por motivos práticos, éticos...
A abordagem do professor de matemática: aprender a propor situações experimentais em que cada aluno pega numa questão, fá-la sua e procura encontrar-lhe respostas.
A abordagem do aluno de matemática: aprender a formular hipóteses, a testá-las e a provar que são verdadeiras... ou falsas.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Abordagem experimental – Métodos científicos

Ponha hipoteses

Para ir mais longe

Pequenas questões, grandes problemas?

Água no vinho!
Dois copos contêm o mesmo volume, um de água, o outro de vinho (ou de café...) Pegue numa colher de água, deite-a no vinho e misture. Pegue numa colher desta mistura e deite-a na água.
• Há mais água no vinho que vinho na água?
• Como provar a sua hipótese?

A faixa de Möbius
Faça uma pulseira com uma tira de papel. Com dois cortes, pode transformá-la em 3. Faça uma faixa de "Möbius" dando meia volta à fita.
• Quantos cortes são necessários para fazer 3?

Os primeiros nós
Faça cada um destes nós.
• Qual o mínimo de passagens possível para cada um?
• Tente encontrar os primeiros nós com 3, 4... passagens.

Um quilo de café?
1 kg de berlindes com um cm de diâmetro.
1 kg de berlindes com um mm de diâmetro.
• Qual é o que ocupa o volume menor?
• E se substituirmos os berlindes por 1 kg de café?

Um quilo de arroz!
• Quantos grãos há neste quilo de arroz!?
• Descubra, pelo menos, 2 métodos para encontrar uma resposta.

Uma hora!
2 paus (ou 2 cordas), mesmo sendo diferentes, ardem cada um numa hora.
• Como medir 1/4h? 1/2h? 3/4h?
• Descubra, pelo menos,um método.

Que reter?

Pequenas questões, grandes problemas

A matemática sempre apresentou enunciados de problemas divertidos ou surpreendentes. Entre todos estes problemas recreativos, alguns colocam boas questões, isto é, questões tais que a procura de respostas, ou mesmo as próprias respostas, permitem de trazer à luz um resultado matemático ou científico, ou uma linha de raciocínio importante.
Uma boa questão pode ser também a que permita elevar os **modelos implícitos** dos alunos e fazê-los constatar o seu aspecto não operatório.
É o que propõem aqui estas questões: conservação das quantidades para a água e o vinho, topologia para a faixa, modelação para o café, amostragens para o arroz, lógica para os paus...

Onde se emprega a matemática

Saber, é apenas tomar consciência da sua ignorância?
(in O Menão – Platão)

Em matemática, os alunos, sobretudo no secundário – mas também depois – mostram fraca aptidão para **debater** e para convencer com argumentos matemáticos e lógicos.
Devem, para isso, aprender a exprimir os diferentes pontos da sua argumentação, a explicar as relações lógicas que conduzem às suas conclusões.
Saber provar, é aprender a debater, enunciando os argumentos matematicamente, cientificamente verdadeiros. Saber provar, é também saber o que é uma demonstração, apropriar-se dela e reutilizá-la.

PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Debater - Método - Lógica - Aristóteles - Platão - Descartes

Demonstre!

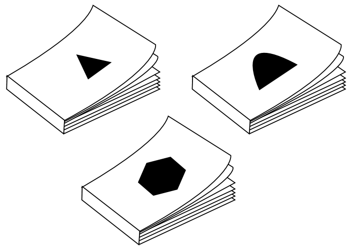
Faça você mesmo

MATERIAL: Cartões para recortar, Flip-books a realizar

124 125 126

Flatland: um mundo plano

Quem sou eu?



Com cada família de desenhos, realize um livro animado (flip book). Cada flip book mostra os traços deixados por um objecto que atravessa um ecrã plano.

• Para cada flip book, qual poderá ser esse objecto?

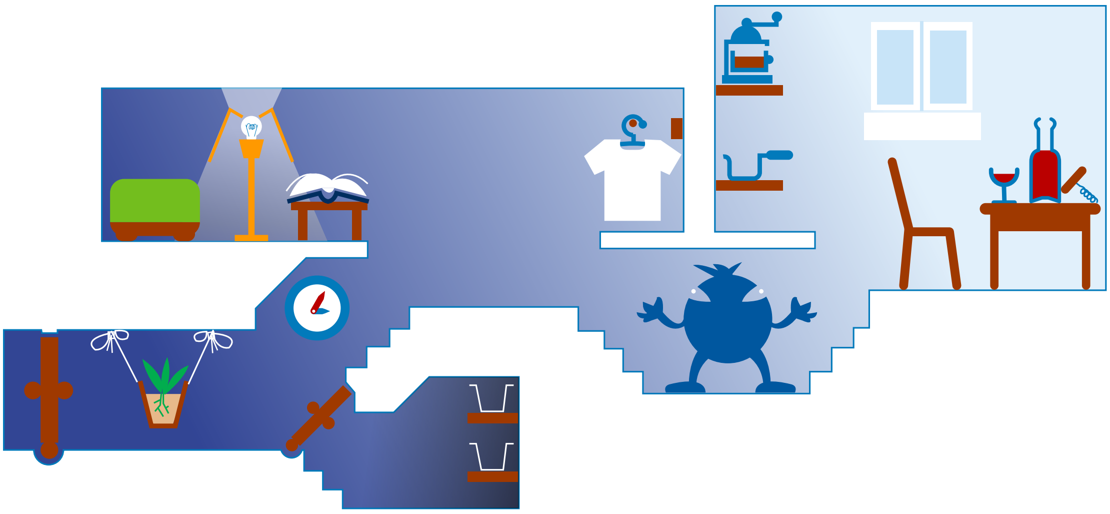
Para ir mais longe

A vida em Flatland

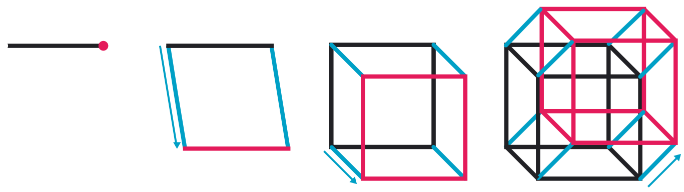
Este desenho representa a casa dum habitante dum planeta imaginário que só teria duas dimensões, onde tudo seria plano!

• Tente descobrir os 7 erros.

• Imagine outros objectos que poderiam existir – ou não existir – neste mundo plano.



Até à 4ª dimensão



Onde se emprega a matemática

Como o matemático, o físico e todo o cientista, o professor de matemática deve aprender a provar e, sobretudo, ensinar os alunos a provar, ensinar-lhes a debater e a usar, para o fazer, argumentação apoiada em utensílios matemáticos: os resultados matemáticos e a lógica matemática.

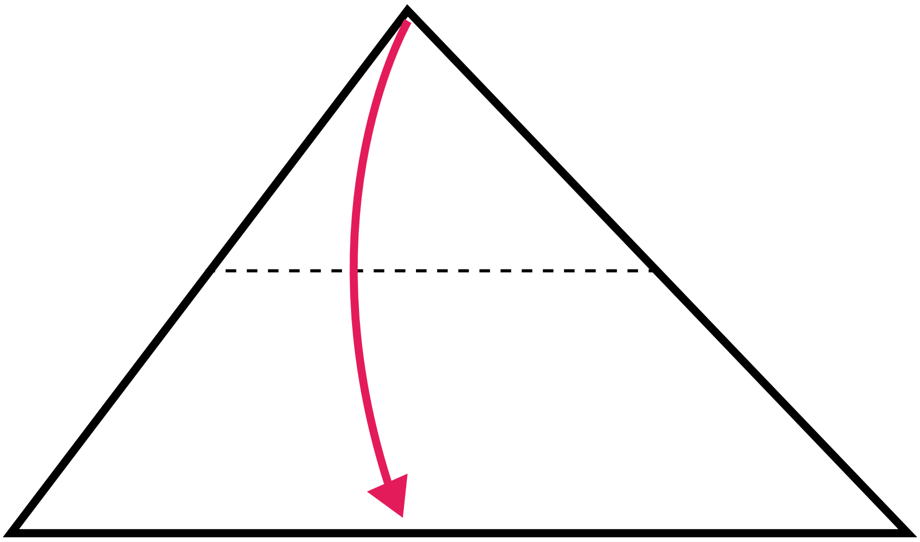
Aprender a provar que uma solução existe ou não existe, que um enunciado é verdadeiro ou falso ou – mais difícil – que não é possível prová-lo, em todo o caso com os conhecimentos do aluno nesse momento.

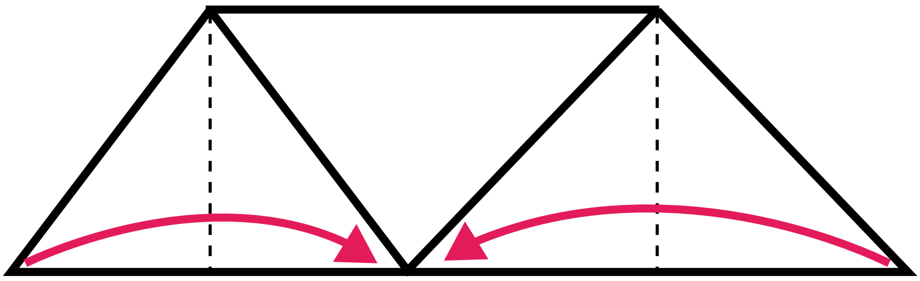
PALAVRAS-CHAVE PARA PÁGINAS WEB:
Matemática - Professor de matemática – Matemático

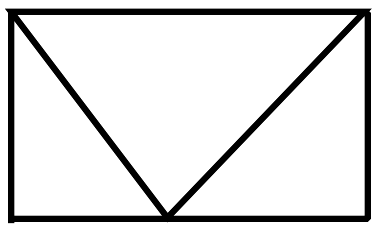
Que reter?

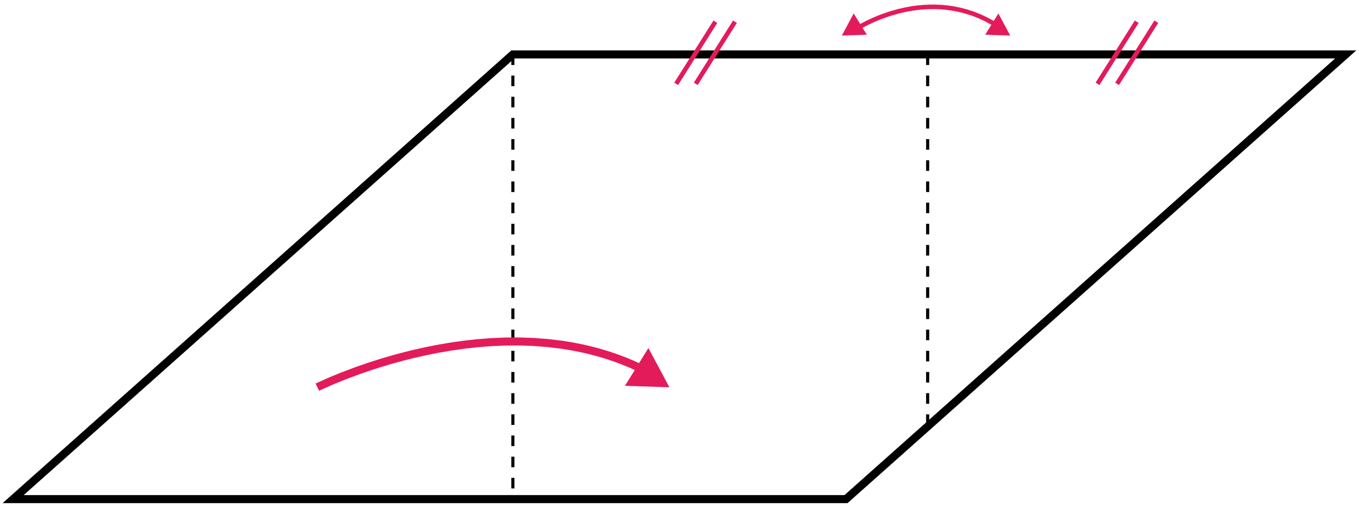
Propor aos alunos uma abordagem experimental em matemática não consiste somente em pô-los a manipular objectos geométricos, números, letras. Estas experiências devem permitir-lhes apropriar-se da situação (é a **fase de experimentação**), exprimir oralmente ou por escrito hipóteses (**fase de formulação**) e, por fim, validar essas hipóteses (**fase de validação**).

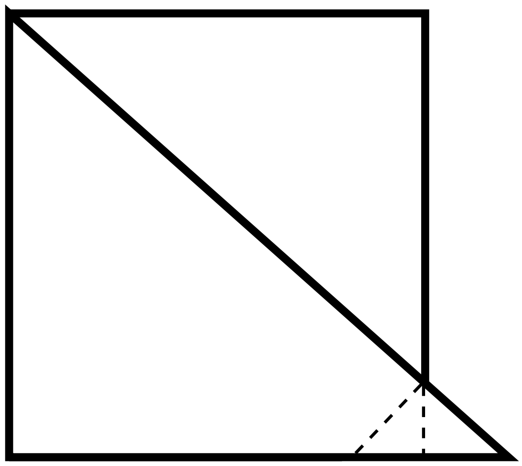
Nesta abordagem experimental, restará uma última fase para o docente: por em evidência as **aquisições matemáticas efectuadas pelos alunos**, aquisições de conteúdos ou aquisições de raciocínios.

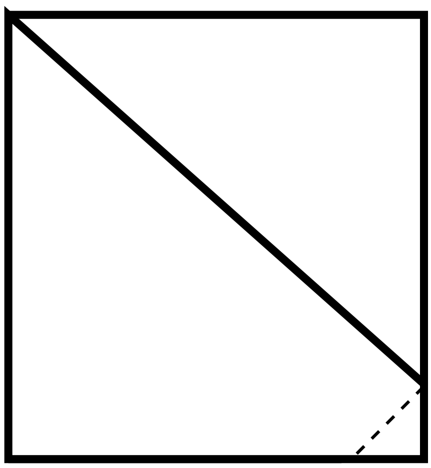


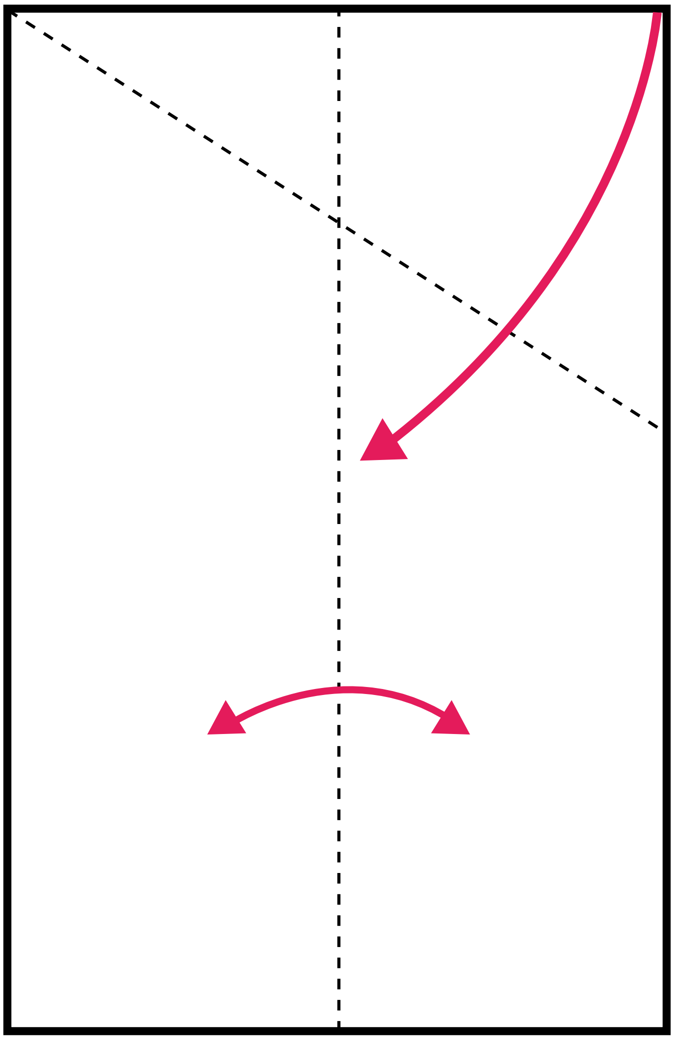


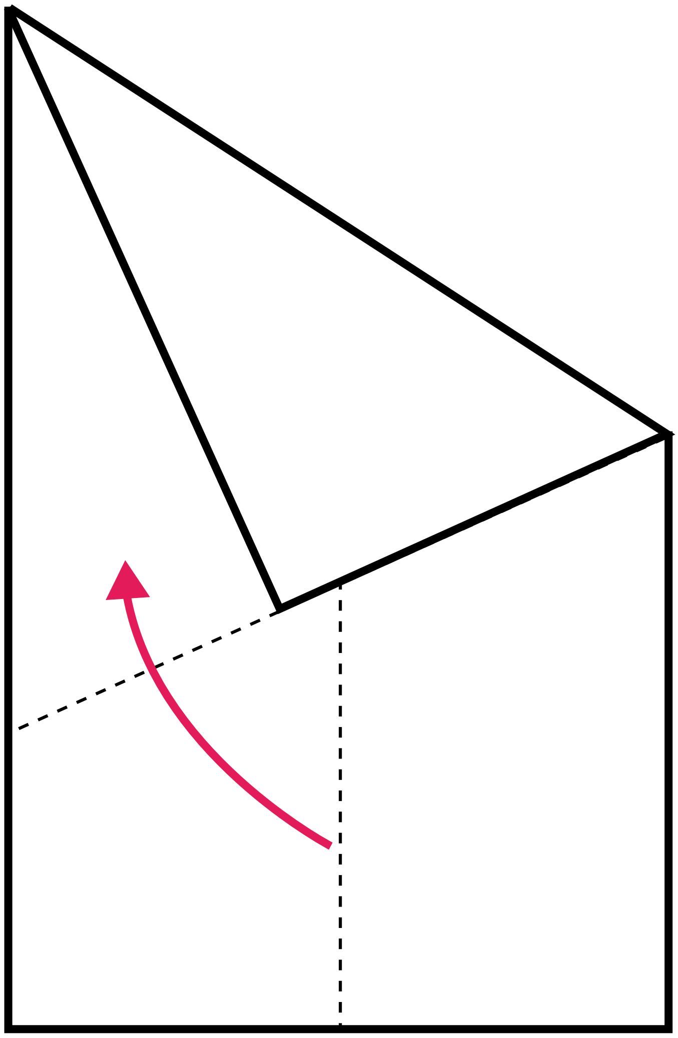


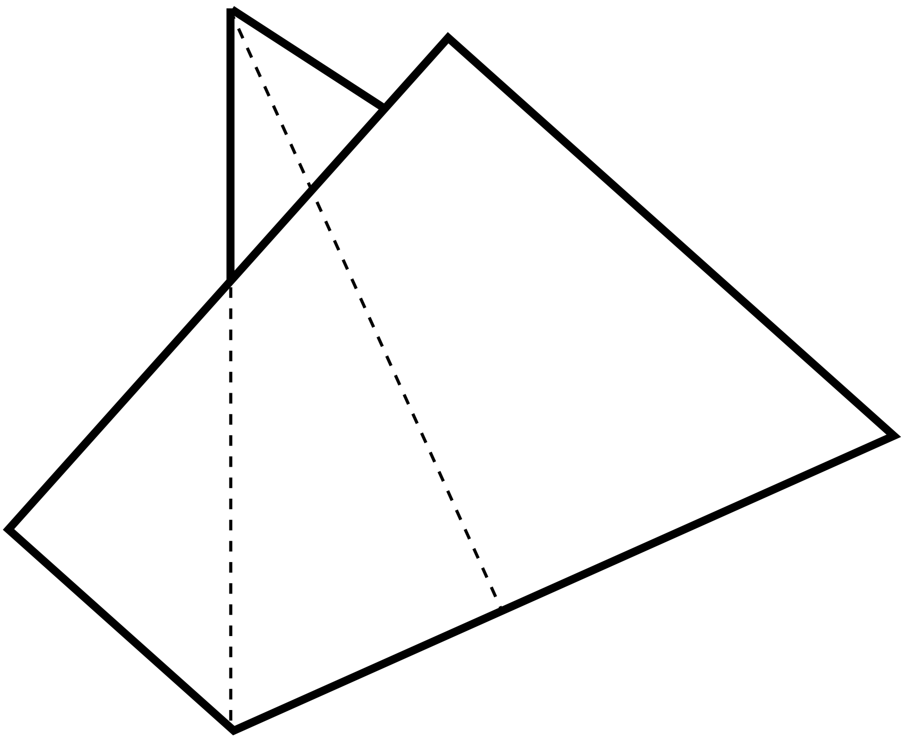


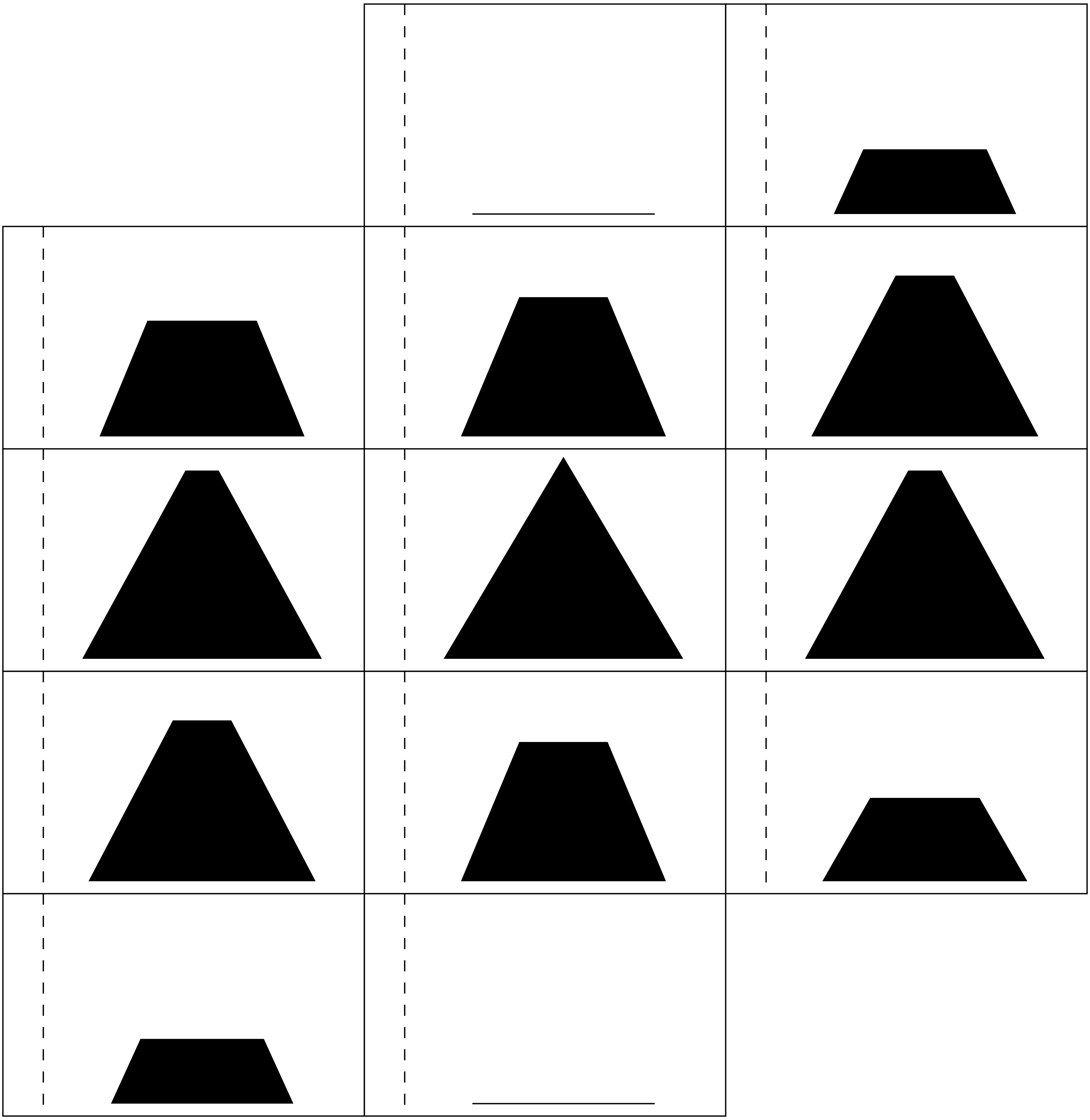


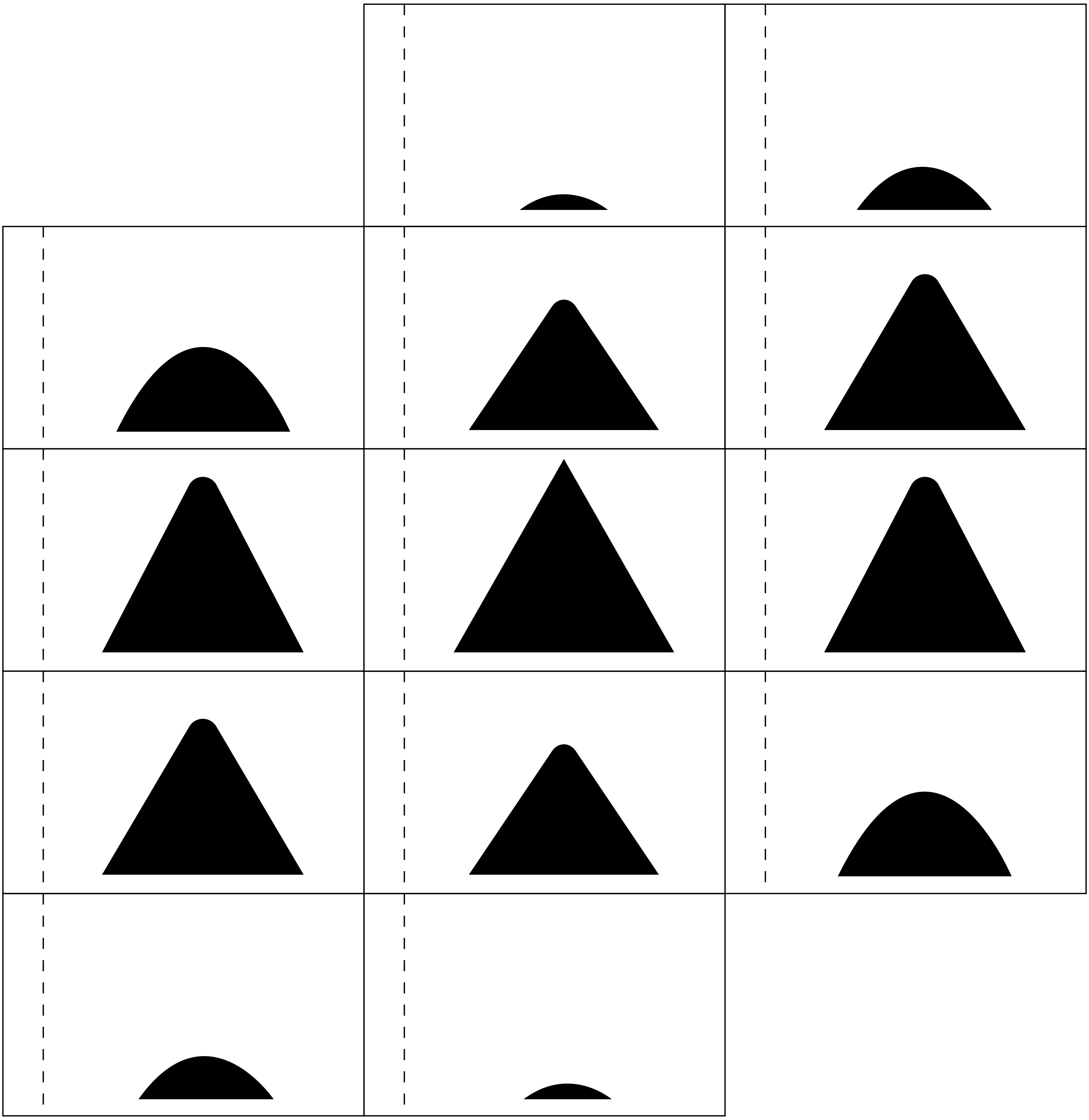


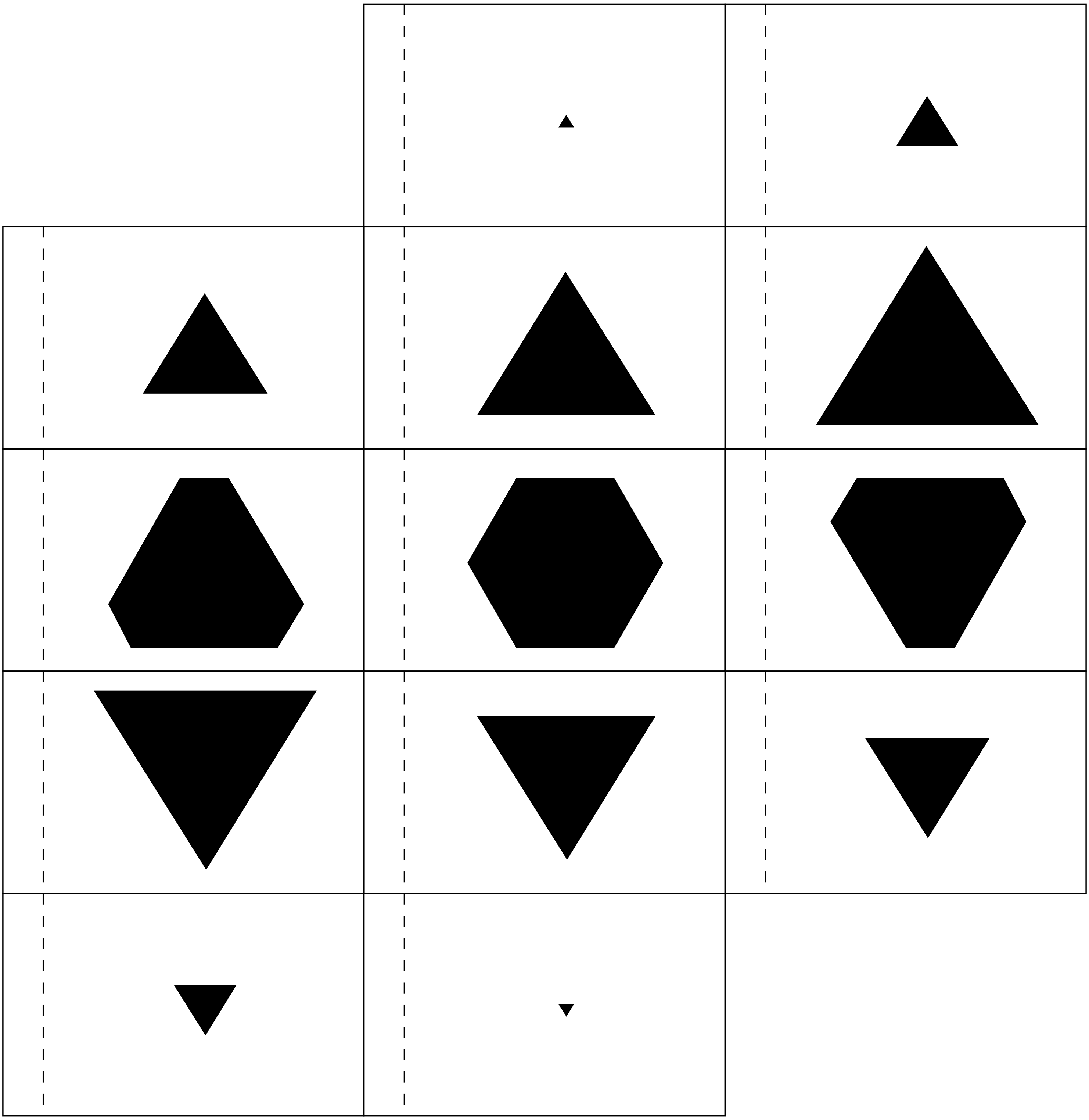












United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization

Centre Sciences
CCSTI de la région Centre

ADECUM

créditos

Esta exposição virtual foi concebida e realizada, sob iniciativa de Alexandros K. Makarigakis (Unesco – Windhoeck), pelo Michel Darche, Centre•Sciences* e Adecum*.

Beneficiou de observações, críticas e contribuições de todos os que participaram directamente: Sophie Auger-Léger (Orléans), Jean Brette (Paris), Marie-Laure Darche-Giorgi (Orléans), Bento Louro (Lisboa), Marta Macho-Stadler (Bilbau), Boubaker-Khaled Sadallah (Argélia), Benoît Matrion (Orléans), Antony Templier (Orléans), mas também dos trabalhos em didáctica ou vulgarização das ciências de Guy Brousseau (Bordeaux), Etienne Guyon (Paris), Claude Janvier (Montréal), Richard Pallascio (Montréal), Antonio Pérez Sans (Madrid), André Rouchier (Bordeaux), Gérard Vergnaud (Paris), a quem aqui muito agradecemos.

Foi concebida a partir da exposição interactiva «Experimentar a Matemática!» realizada sob a direcção científica de:
Minella Alarcon, responsável pela ciência de base na Unesco e
Mireille Chaleyat-Maurel, vice-presidente do Comité RPAMaths de l'EMS

com a colaboração de:
Jin Akiyama, Tokai University, Japão
Michèle Artigue, Presidente do ICMI
Jean Brette, Palais de la Découverte, Paris
Michel Darche, Centre•Sciences, Orléans
Mari-Jo Ruiz, Ateneo de Manila University, Philippines
Gérard Tronel, Année mondiale des mathématiques, Paris

Concepção e coordenação: Michel Darche – Adecum & Centre•Sciences
Programação e desenvolvimento interactivos:
Antony Templier – www.sotodesign.org (Orléans)
Grafismo: Benoît Matrion – www.tvwar.org (Orléans)
Traduções: En : Sophie Auger-Léger (Orléans) • Sp : Marta Macho-Stadler – Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea - Bilbao
• Pt : Bento Louro – Universidade Nova de Lisboa
• Ar: Boubaker-Khaled Sadallah - Ecole Normale Supérieure - Kouba-Argélia
• Ct: A. Gasull e G. Guasp – Universitat Autònoma de Barcelona

© Créditos fotográficos & ilustrações
• centre sciences • adecum • 99.9 sarcone • wikipedia • Dbenbenn GNU • nasa • antony templier • benoit matrion • **Fotolia.com :** • Remo Liechti • Sandra Carmona • Federico Romano • goce risteski • Julien Eichinger • Udo Kroener • Isabelle Barthe • arnowssr • photo-dave • Denis Pepin • Eric Isselée • VisualField • philippe Devanne • Creativeye99 • Roman Sakhno • Vieloryb • Rich Johnson • Andrzej Tokarski • Marko Plevnjak • Alexey Klementiev • Olga Shelego • Allein • Christophe Villedieu • Jose Gil • FranckBoston • choucashoot • Marvin Gerste • Tjall • Guillermo lobo • Elena Elisseeva • Forgiss • Francois Doisnel • Mariano Ruiz • Zoran Karapancev • LVI • claudio • Tad Denson • Alx • tdoes • piccaya • Monika Lassaud • Paco Ayala • Emilia Kun • Peterfactors • thierry burot • martine wagner • Philip Lange • Sascha Burkard • Terry Morris • Detlef Gwinner • Kenneth Groms • Paul Bodea • Guy Pracros • Eric Gevaert • Emin Ozkan • imagine • Khayel • Michael Drager • Gabriel Moisa • Tatiana • sébastien lagrée • Caroline Duhamel • sam richter • Pawel Bielecki • Alexandre Quillet • Stanisa Martinovic • Yurok Aleksandrovich • Martina Misar • Steven Pepple • Edouard Hardy • Danielle Bonardelle • Mauro Rodrigues • sébastien russier • Orlando Florin Rosu • Francois Doisnel • Leonid Karchevsky • Rob Byron • Natalia Pavlova • mrkeenan0 • danimages • Gérard. Kremmer • Petr Gnuskin • Udo Kroener • trialart.info • Joel Bramley • Steve Thompson • Stephen Sweet • shocky • Nikontofeur • Eric Isselée • auris • David G • Jordi Soro • Jason Stitt • Indigo • milosluz • AndreasG • Bruce Shippee • Zimon • jimmythecure • claudio calcagno • Stephen Coburn • cmapuk_0nline • Martine Lefebvre • ordus

Contacto: centre.sciences@wanadoo.fr

Matemáticas
EXPERIMENTAIS
experimentais

Unesco – Centre•Sciences - Adecum - www.experiencingmaths.org