



Mathématiques

EXPERIMENTALES
expérimentales



Mathématiques

EXPÉRIMENTALES

expérimentales

Cette exposition virtuelle s'adresse aux enseignants de mathématiques, à leurs élèves - en priorité ceux du secondaire - et à tous ceux qui sont curieux des mathématiques et des sciences en général.

Comme l'exposition internationale itinérante « **Pourquoi les mathématiques ?** », elle a été conçue et réalisée, à l'initiative et avec le concours de l'UNESCO, par Centre•Sciences* et l'Adecum*.

Cette exposition virtuelle présente **plus de 200 situations mathématiques** qui proposent aux élèves d'expérimenter, tâtonner, faire des hypothèses, les tester, essayer de les valider, chercher à prouver et débattre autour de propriétés mathématiques.

Comme l'exposition « **Pourquoi les mathématiques ?** », elle propose des "**expériences de coin de table**" faciles à réaliser avec du matériel très simple : la tête et les mains, papier et crayons, plaques de carton, de bois ou de plexiglas, fil de fer et clous... Par son approche numérique, elle propose aussi des "**expériences de coin d'écran**" où l'on peut expérimenter en un clic.

Pour chaque thème, vous trouverez :

- une introduction interactive (mise en bouche),
- des expériences à faire faire par les élèves,
- quelques explications et références historiques,
- quelques métiers où ces mathématiques sont utilisées,
- un renvoi par mots-clés vers le web,
- un dossier pdf à imprimer avec quelques aides.

S'adressant d'abord aux enseignants des pays du sud, cette exposition, bien que virtuelle, ne veut en aucun cas accentuer la **fracture numérique**. C'est pourquoi elle propose à tous ceux qui n'ont ni liaison internet ni ordinateur, d'imprimer ou de faire imprimer ces pages écran - en noir et blanc ou en couleur - à partir de **pages pdf** mises en page à cet effet.

* Centre•Sciences : Centre de culture scientifique, technique de la région Centre – Orléans.

* Adecum : Association pour le développement de la culture mathématiques – Orléans.

SOMMAIRE

1.Lire la nature	4
Spirales dans la nature	5
Un monde fractal	6
Coniques de l'espace	8
2.Paver un sol	12
L'art des pavages	13
Kaléidoscopes	16
Où suis-je ?	18
3.Remplir l'espace	34
Empilez des oranges	35
Polyèdres	37
Problèmes complexes	38
4.Se connecter	52
D'un seul trait	53
4 couleurs suffisent	54
Allo, c'est toi ?	55
5.Calculer	69
Avec la tête et les mains	70
Nombres premiers	75
Images numériques	77
6.Construire	82
Courbes et Vitesses	83
Courbes et Volumes	84
Courbes douces	86
7.Estimer - Prévoir	95
2 boules rouges ?	96
Bingo !	97
Et le gagnant est ?	98
8.Optimiser	102
Bulles de savon	103
Le plus court chemin	104
La meilleure forme	105
9.Prouver	106
Pythagore	107
Nombres et Figures	109
Est-ce bien vrai ?	111
10.Conclure	117
Expérimentez	118
Faites des hypothèses	119
Prouvez !	120
Crédits	128

1. Lire la nature



Spirales dans la nature



Un monde fractal



Coniques de l'espace

Spirales dans la nature



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 crayon feutre & au choix : 1 ananas, 1 pomme de pin, 1 fraise, 1 fleur de tournesol ...

Combien y a-t-il de spirales dans chaque sens ?



1, 1, 2, 3, 5, 8...

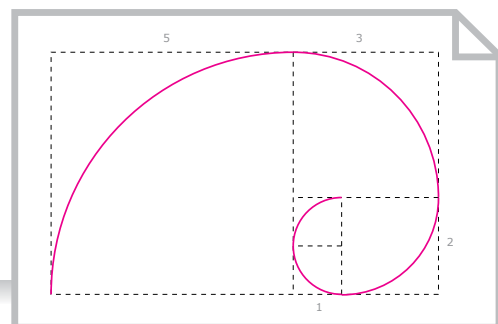
- Trouvez les éléments suivants de cette suite de nombres.
- Observez l'un de ces objets, des spirales apparaissent, dans un sens et dans l'autre.
- Comptez-les.
- Trouvez d'autres fruits, fleurs, feuilles...qui ont la même propriété.

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 feuille de papier, 1 règle, 1 compas, 1 crayon, 1 paire de ciseaux

Dessinez une spirale de Fibonacci

- Prenez une feuille de papier.
- Dessinez des carrés de côté 1, 1, 2, 3, 5, 8 ...
- Tracez un quart de cercle sur chaque carré comme indiqué ici.
- Découpez les carrés et placez-les en spirale comme indiqué.



Que retenir ?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., 233, ...

Les graines de certains fruits, les pétales de certaines fleurs, les feuilles de certains arbres, se répartissent toujours suivant cette suite de nombres : chaque nombre de la suite est la somme des deux précédents. Ainsi, dans la pomme de pin, l'ananas, la fleur de tournesol, mais aussi les troncs de palmier, les figues de barbarie (et les feuilles), les pommes cannelles... les nombres de spirales dans chaque sens sont des termes consécutifs de cette suite appelée suite de **Fibonacci**.

Pour aller plus loin

Suites de Fibonacci :

Ce sont des suites de nombres entiers où chaque terme est égal à la somme des deux précédents. Ces suites ont été découvertes par un Italien, Léonard de Pise, appelé aussi **Fibonacci**, il y a 8 siècles.

Notons F_n le terme de rang n de cette suite. Elle possède de nombreuses propriétés.

F_{n+1} / F_n tend vers une limite : $(1 + \sqrt{5})/2$ qui est le nombre d'or,

F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux

et la somme de leurs carrés se retrouve dans la suite :

$$(F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2n+1}$$

...

Métiers des maths

Depuis **Fibonacci**, beaucoup se sont intéressés à ces propriétés des plantes. Tout récemment deux chercheurs français, **Stéphane Douady** et **Yves Couder**, ont montré expérimentalement que la croissance de ces plantes correspondait à des propriétés des systèmes dynamiques de la physique. L'étude de la forme et des propriétés physiques des plantes s'appelle la phyllotaxie. Elle intéresse les botanistes et les biologistes.

LIENS WEB :

<http://www.lps.ens.fr/~douady/>

<http://maven.smith.edu/~phyllo/>

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Fibonacci - Suites - Phyllotaxie - Nombre d'or - Spirale d'or

Un monde fractal



Faites-le vous-même

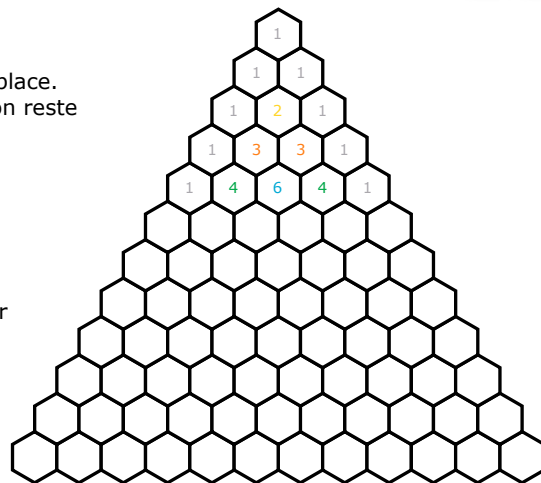
MATÉRIEL : 1 grille carrée ou hexagonale, 4 ou 5 crayons ou feutres de couleur

10

11

Triangle de Pascal modulo p

- Complétez la grille suivant la règle mise en place.
- Remplacez le nombre de chaque case par son reste dans la division euclidienne par 3.
- Associez 3 couleurs différentes à 0, 1 et 2.
- Puis coloriez chaque case avec la couleur correspondant à son reste (0, 1 ou 2).



Un monde fractal



Faites-le vous-même

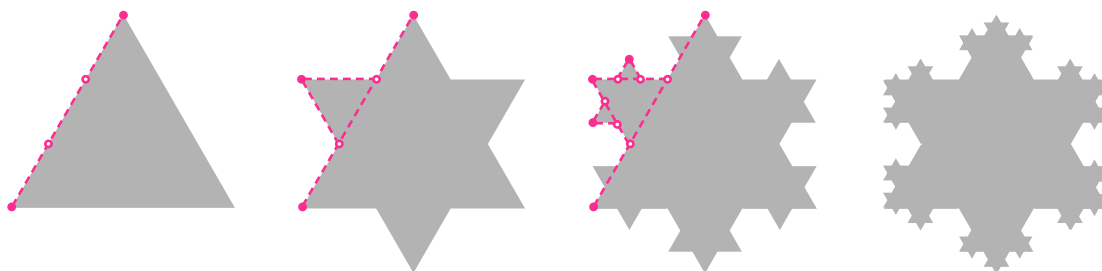
MATÉRIEL : 1 feuille de papier, 1 crayon, 1 règle

Dessinez d'autres suites de figures fractales

- Tracez un triangle équilatéral.
- Coupez chaque côté en 3 segments égaux.
- Remplacez le segment du milieu par deux autres de même longueur.
- Puis recommencez sur chaque nouveau segment obtenu.
- • •

Autre activité autour de ces figures fractales :

à chaque étape, calculez le périmètre et l'aire de la surface puis calculez leurs limites.



Et dans la nature



Métiers des maths

Les objets fractals apparaissent ou sont utilisés dans de nombreux domaines : météorologie, économie, compression d'images, médecine et même art... fractal.

LIENS WEB :

<http://commons.wikimedia.org/wiki/Fractal>

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Fractale - Suite de figures fractales - Dimension fractale - Mendelbrot

Coniques de l'espace

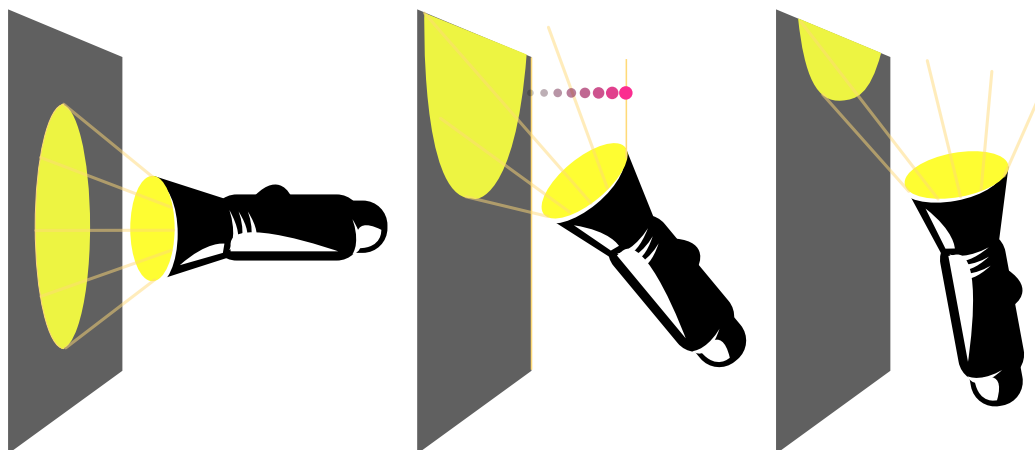


Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 lampe électrique ou 1 lampe de poche, 1 mur blanc ou 1 écran blanc

Lumières et coniques

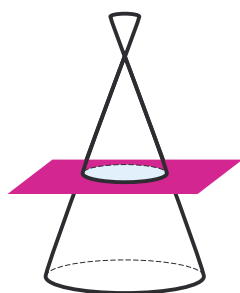
- Eclairez le mur ou l'écran avec la lampe.
- Une tâche de lumière de lumière apparaît.
Quelle forme a-t-elle ? Pouvez-vous la changer ? Comment ?



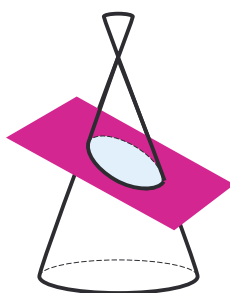
Que retenir ?

Les coniques sont les courbes obtenues par l'intersection d'un cône et d'un plan. Selon l'orientation du plan par rapport au cône, on obtient les différents types de coniques.

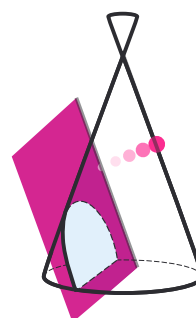
Quand l'écran est perpendiculaire à l'axe du cône, on obtient un cercle.
Quand l'angle change, on obtient successivement une ellipse, une parabole (quand un côté du cône de lumière est parallèle à l'écran) et, en dernier, une ou deux branches d'hyperbole.
Peut-on obtenir un point, une droite, ou deux droites ?



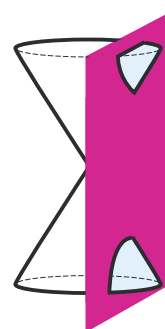
CERCLE



ELLIPSE



PARABOLE



HYPERBOLE

Coniques de l'espace



Faites-le vous-même

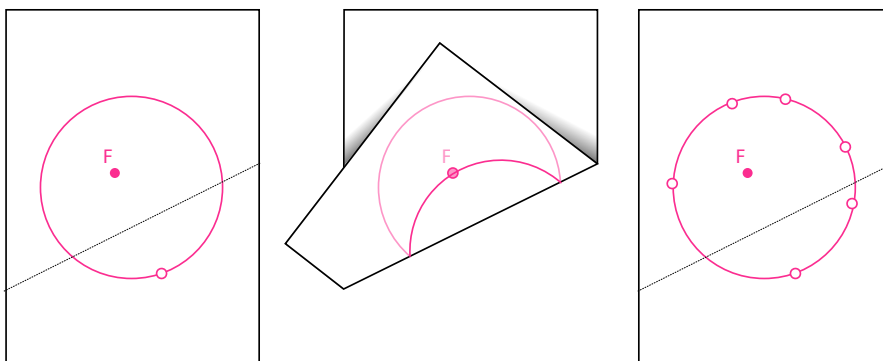
MATÉRIEL : 1 feuille de papier, 1 règle, 1 compas, 1 crayon

Construisez des coniques par pliage

- Tracez un cercle.
- Marquez un point F à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle.
- Pliez la feuille de sorte qu'un point du cercle coïncide avec F et marquez le pli.
- Recommencez l'opération une vingtaine de fois au moins.
- Que voyez-vous apparaître ?

Que retenir ?

- Si le point F est à l'intérieur du cercle, les plis marqués enveloppent une courbe qui est une ellipse.
- Si F est à l'extérieur, l'enveloppe est une hyperbole. Qu'obtient-on si on remplace le cercle par une droite ?



Pour aller plus loin

Les coniques se retrouvent dans de nombreux phénomènes naturels.

La parabole : du jet d'eau à la trajectoire d'un objet lancé devant soi. On la trouve aussi dans les phares de voiture et certains fours solaires.

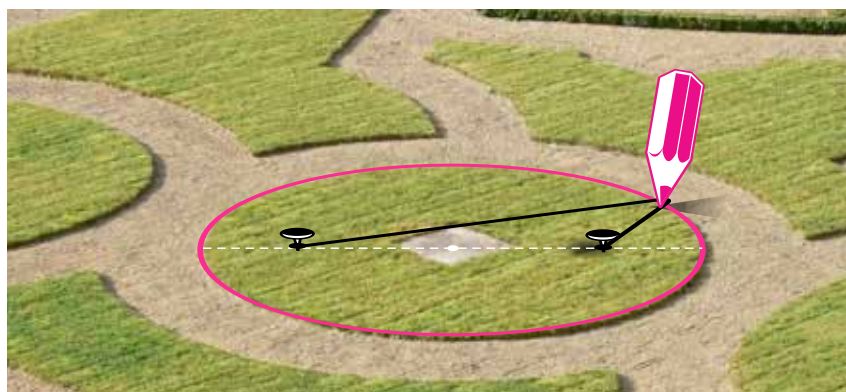
L'ellipse se retrouve en architecture et dans les dessins perspectifs de cercles.

Les lois de **Kepler** (1619) puis la loi de la gravitation de **Newton** (1687), ont montré que les orbites des corps célestes, naturels ou artificiels, sont des coniques (en l'absence de perturbations).

Métiers des maths

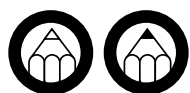
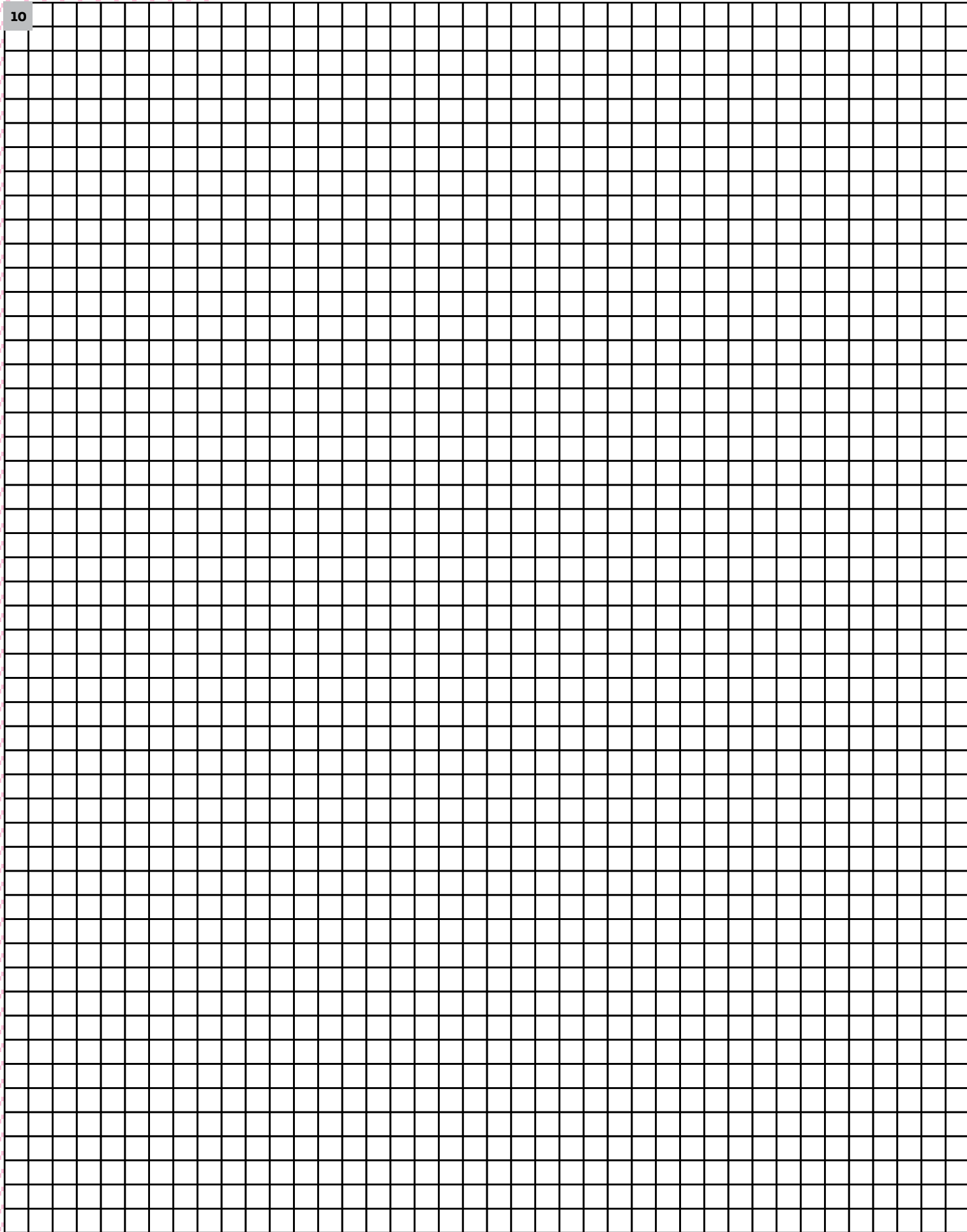
Qui utilise les coniques ?

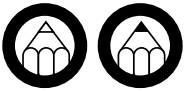
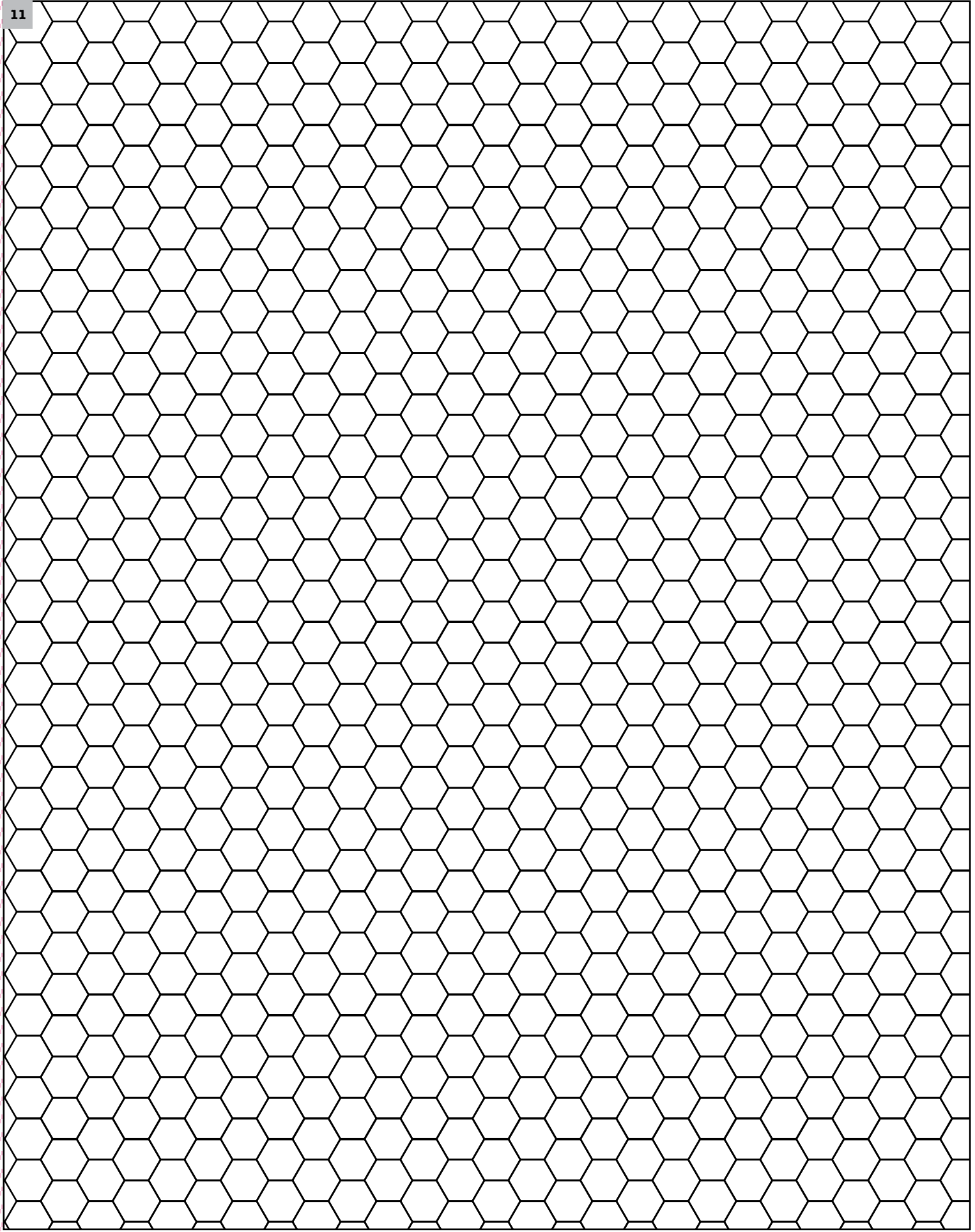
Les ingénieurs, surtout dans l'industrie spatiale, et bien sûr les astronomes. Les architectes qui construisent des ponts suspendus et des stades de sports. Les jardiniers, les éclairagistes au théâtre et au cinéma ou encore les infographistes.



MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Conique - Ellipse - Parabole - Hyperbole - Courbe enveloppe







L'art des pavages



Kaléidoscopes



Où suis-je ?



L'art des pavages



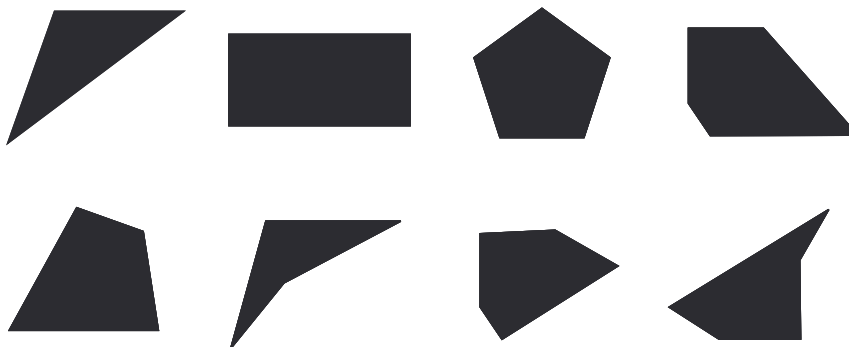
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 pochoir des formes à découper, 4 à 5 crayons ou feutres de couleur, 1 cutter

19

Créez le plus beau des pavages avec une forme

Choisissez une forme et essayez de créer un pavage du plan, sans trou ni chevauchement. Vous pouvez aussi le colorier. Pour chaque pavage créé, essayez de trouver à quel groupe de pavages réguliers il appartient. (parmi les 17 montrés page 15)



Que retenir ?

Peut-on recouvrir un sol avec n'importe quelle forme de pièces, sans trou ni chevauchement ?

Beaucoup de formes géométriques ou figuratives permettent de réaliser un pavage du plan, mais pas toutes comme, par exemple, le pentagone régulier.

Les pavages réguliers du plan se répètent périodiquement par translations, dans deux directions. Certains de ces pavages se conservent aussi par rotation ou symétries axiales.

Ces translations, rotations et symétries permettent d'en distinguer 17 groupes. Leur étude relève de la théorie des groupes, due à **Evariste Galois** (1811-1832). Les pavages trouvent des applications en mathématiques, en cristallographie, en théorie du codage, en physique des particules...

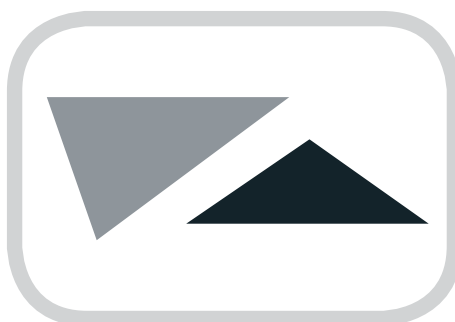
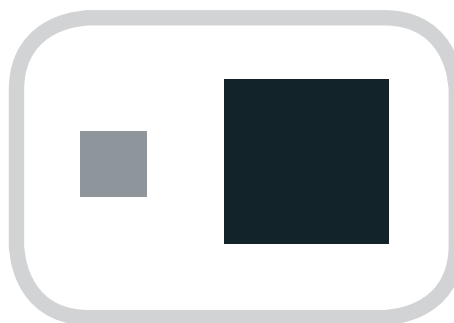
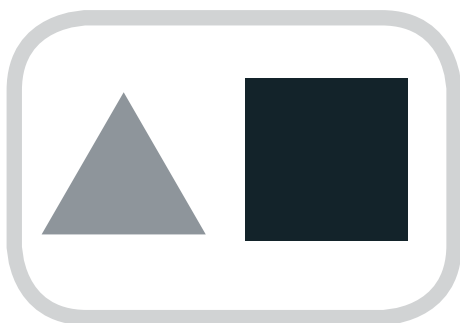
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 feuille de formes géométriques à découper, 4 à 5 crayons ou feutres de couleur, 1 cutter ou 1 paire de ciseaux

20 21 22 23

Créez des pavages avec deux formes

- Choisissez une de ces paires de formes.
 - Essayez de créer un pavage du plan, sans trou ni chevauchement.
 - Est-il régulier ? Sinon, pouvez-vous dire pourquoi ?
- * Respectez la coïncidence des arcs de cercle.



L'art des pavages



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 3 grilles géométriques, 4 à 5 crayons ou feutres de couleur

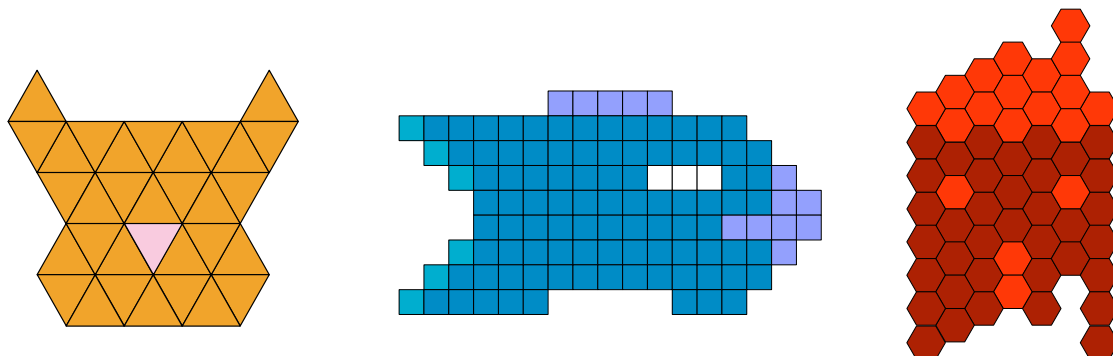
24

25

26

Chat, poisson, maison...

Transformez une forme simple (triangle, carré,...) en un modèle figuratif qui pave. Pour vous aider, partez des grilles mises à votre disposition.

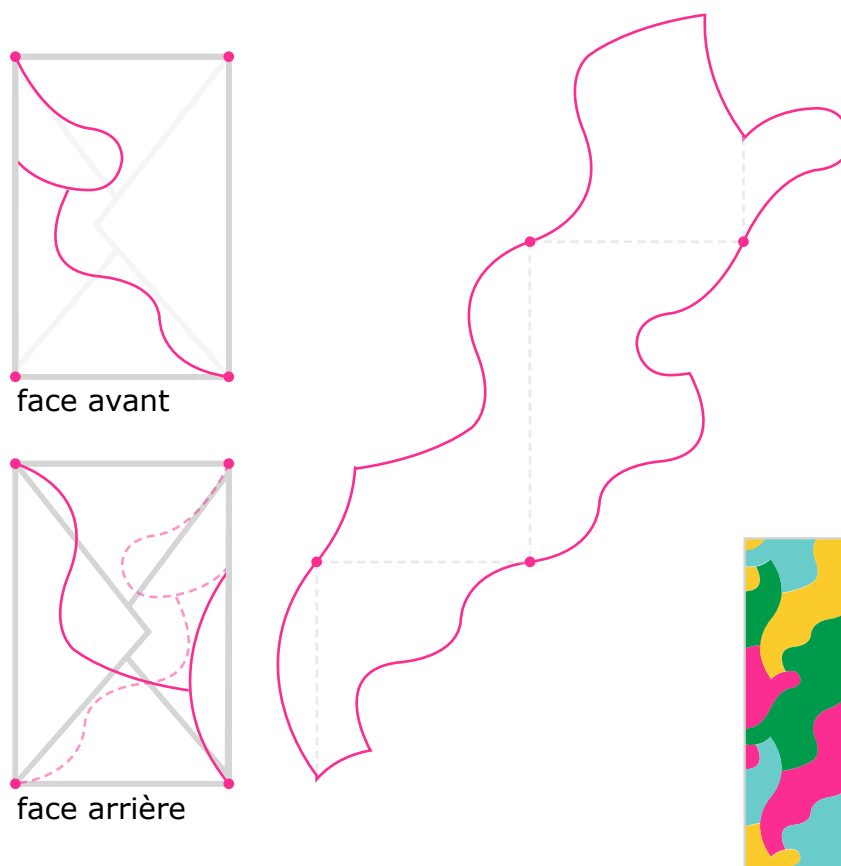


Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 enveloppe fermée, 1 crayon, 1 cutter ou 1 paire de ciseaux

La technique des enveloppes

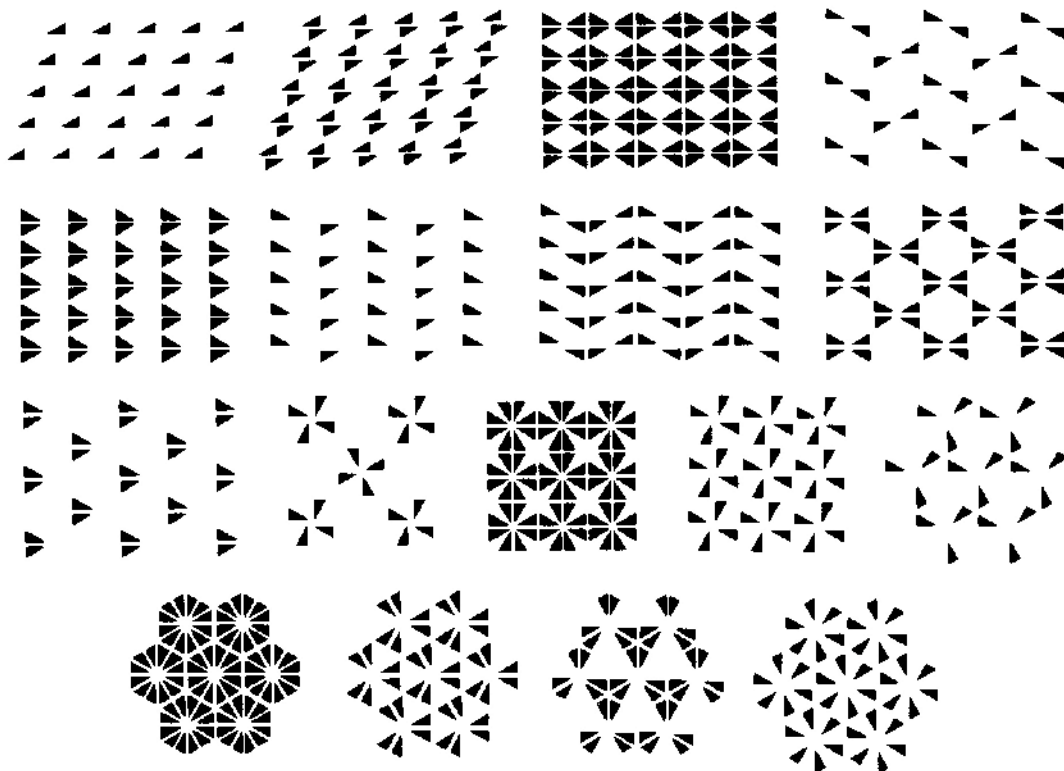
- Fabriquez une enveloppe fermée, carrée, rectangulaire, triangulaire...
- Tracez un chemin pour relier les coins de l'enveloppe. Vous pouvez faire passer votre tracé sur une face ou sur les deux.
- Découpez l'enveloppe en suivant le tracé.
- Dépliez et pavez.





Pour aller plus loin

Les 17 groupes de pavages réguliers



Métiers des maths

Les pavages se retrouvent dans des métiers qui vont du papier peint mural aux carrelages de sol (cuisine, salle de bain...), des tissus d'habillage aux tissages africains.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Pavage - Groupes de pavages - Evariste Galois - Escher

Kaléidoscopes



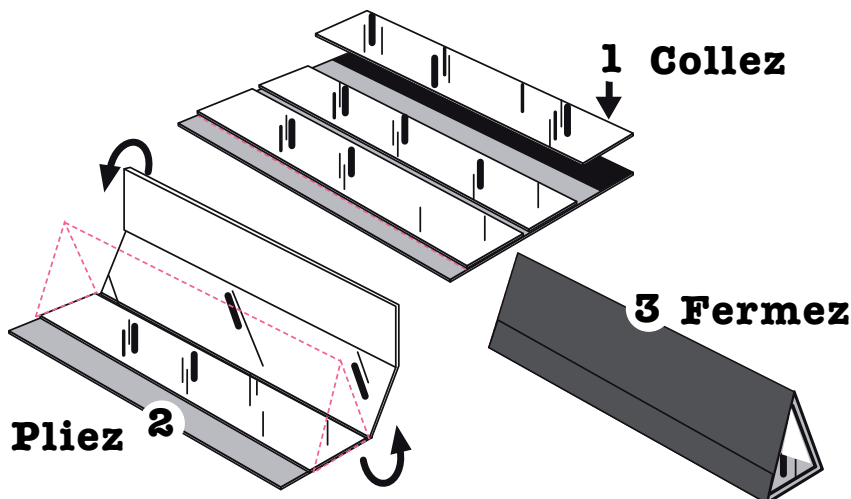
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 modèles de kaléidoscopes, 3 miroirs, 1 carton, 1 tube de colle, 1 ruban adhésif

27

Fabriquez deux kaléidoscopes

Construisez deux modèles, un sur la base d'un triangle équilatéral, le second sur la base d'un triangle rectangle isocèle.



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Exemples de mosaïques à observer, 2 kaléidoscopes

28

29

Observez les symétries dans le kaléidoscope

- Choisissez une mosaïque et placez le bon kaléidoscope à la bonne place. Vous retrouvez, en plus grand, la mosaïque.
- Placez l'un des miroirs sur les lignes rouges. Vous allez retrouver un pavage des sols de maison.

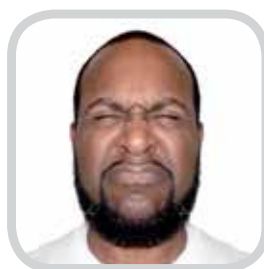


Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 appareil photo, 1 paire de ciseau ou 1 cutter

Qui est derrière le miroir ?

- Prenez la photo d'un visage
 - Coupez-la en 2 par symétrie et réalisez ces effets miroirs !
- Quel est le bon visage ?**



Que retenir ?

Les pavages réguliers sont des répétitions à l'infini d'un même motif. Ici, par symétries-miroirs, le motif va se reproduire et générer un pavage de carrés, d'hexagones ou de tout autre ensemble de polygones ayant un nombre pair de côtés. La même technique a été utilisée par des artistes comme **Escher** avec des motifs plus figuratifs.

Kaléidoscopes



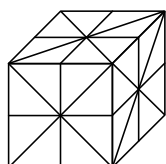
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 3 patrons de pyramides, 1 cutter ou 1 paire de ciseaux,
3 triangles miroirs, 1 tube de colle



Pyramides-miroirs

- Réalisez une pyramide-miroir à l'aide des modèles fournis.
- Placez des objets ou un liquide de votre choix au fond du kaléidoscope.
- Qu'observez-vous ?



Pour aller plus loin

Si l'on coupe un polyèdre régulier (cube, tétraèdre...) suivant tous ses plans de symétrie, on obtient des pyramides qui, transformées en kaléidoscopes, permettent de retrouver le polyèdre de départ mais aussi toute une famille de volumes qui ont les mêmes symétries de base.

Métiers des maths

- Artisans créant une mosaïque à partir de zéliges (Fez - Maroc)
- Technicienne créant un nouveau pavage sur ordinateur (Super Céram, Kenitra - Maroc)



MOTS CLÉS POUR SITES WEB:

Kaléidoscope - Mosaïque - Pavage - Symétries - Escher

Où suis-je ?



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 sphère de polystyrène ou 1 ballon, 1 crayon feutre

Pavez la sphère

Observez ces pavages de la sphère. Pouvez-vous en imaginer d'autres ? Essayez de les dessiner sur le ballon.

Pour chaque pavage, calculez les angles du (ou des) polygone paveur.



Que retenir ?

Comme sur le plan, les pavages de la sphère sont des recouvrements sans trou ni superposition à l'aide d'un ou plusieurs polygones sphériques (c'est-à-dire qui s'appliquent sur la sphère).

Le pavage est régulier s'il utilise une seule forme (triangle équilatéral, carré...) qui se répartit de la même façon autour de chaque sommet. Les pavages réguliers de la sphère sont des déformations sphériques des polyèdres réguliers. Paver la sphère permet de définir, par exemple, le nombre optimal de satellites qui sont nécessaires pour couvrir tout point de la Terre.

L'histoire du chasseur d'ours

C'est l'histoire d'un chasseur qui part sur les traces d'un ours. Il marche tout droit vers le sud pendant une heure puis voit que l'ours a tourné vers l'est. Il fait la même chose et marche pendant une heure pour arriver à un point où l'ours a encore tourné vers le nord. Rebelote ! Il fait de même et suit les traces pendant encore une heure. Et là ? Il s'aperçoit qu'il est revenu à son point... de départ !

Question 1 : quelle peut être la couleur de l'ours ?

Question 2 : combien peut-il y avoir de solutions ?

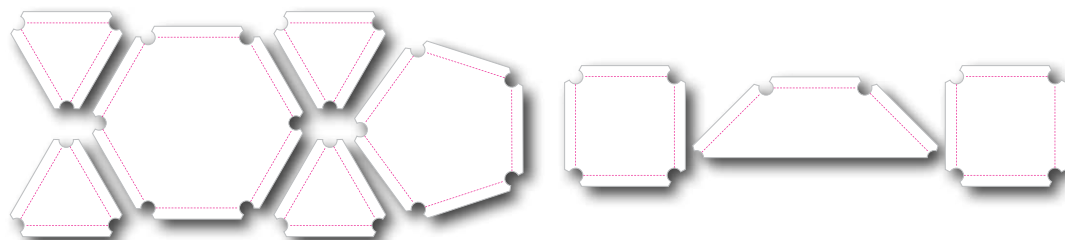
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 feuille de patrons de polygones réguliers, 2 à 3 cartons souples, des élastiques

33

Réalisez un ballon en carton

Avec ces polygones réguliers, réalisez un ballon qui se rapproche le plus de la sphère.



Métiers des maths

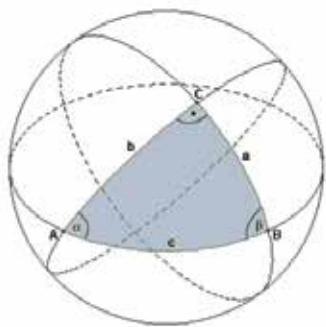
Les architectes s'inspirent parfois des structures sphériques.

Les métiers de la communication par satellites et les systèmes de positionnement par satellites (GPS ou Galileo) qui cherchent à recouvrir la Terre en utilisant le moins de satellites possibles.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

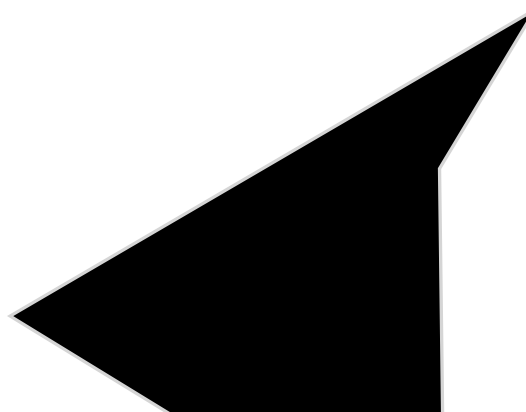
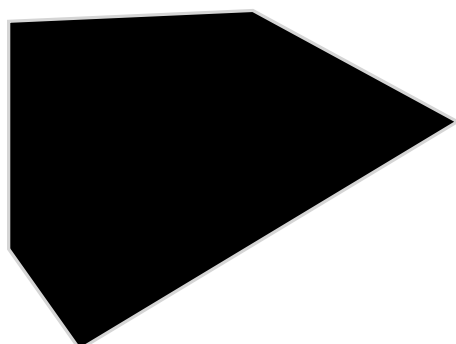
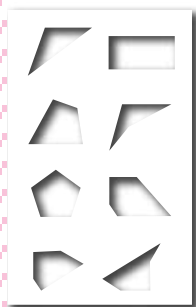
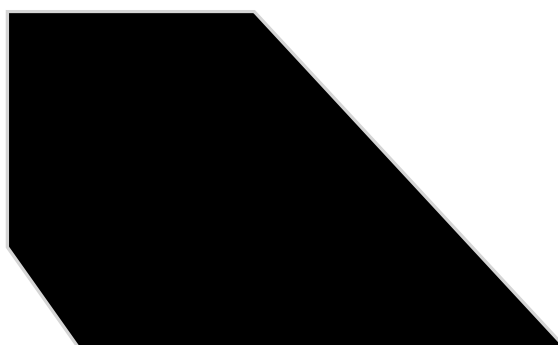
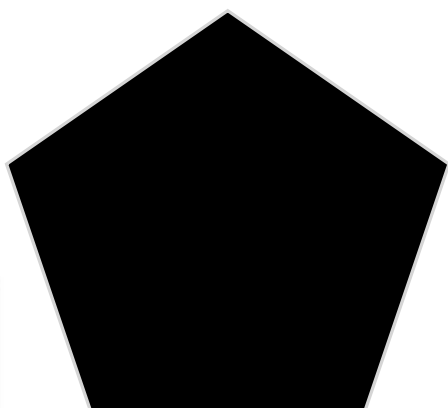
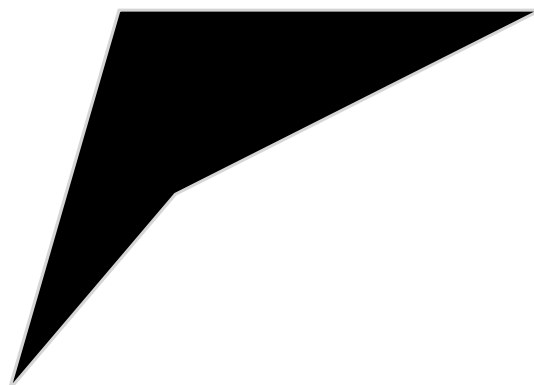
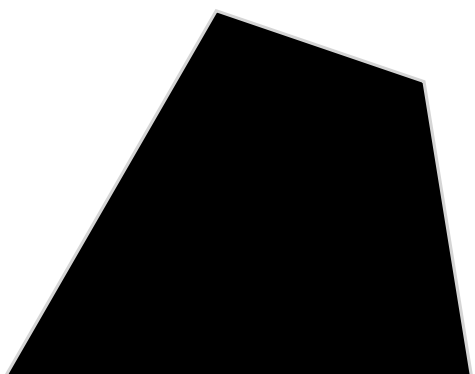
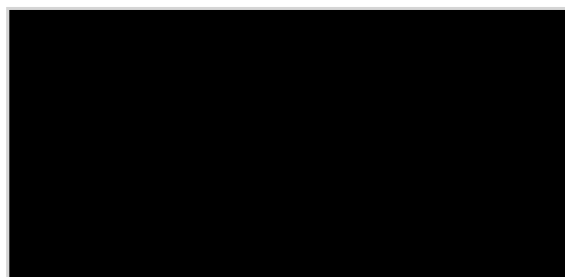
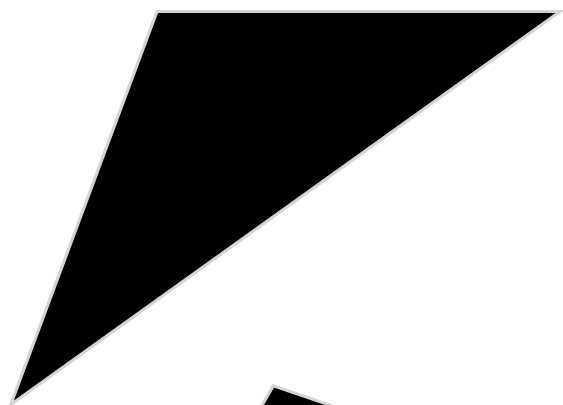
Géométrie sphérique - Pavages de la sphère - Escher

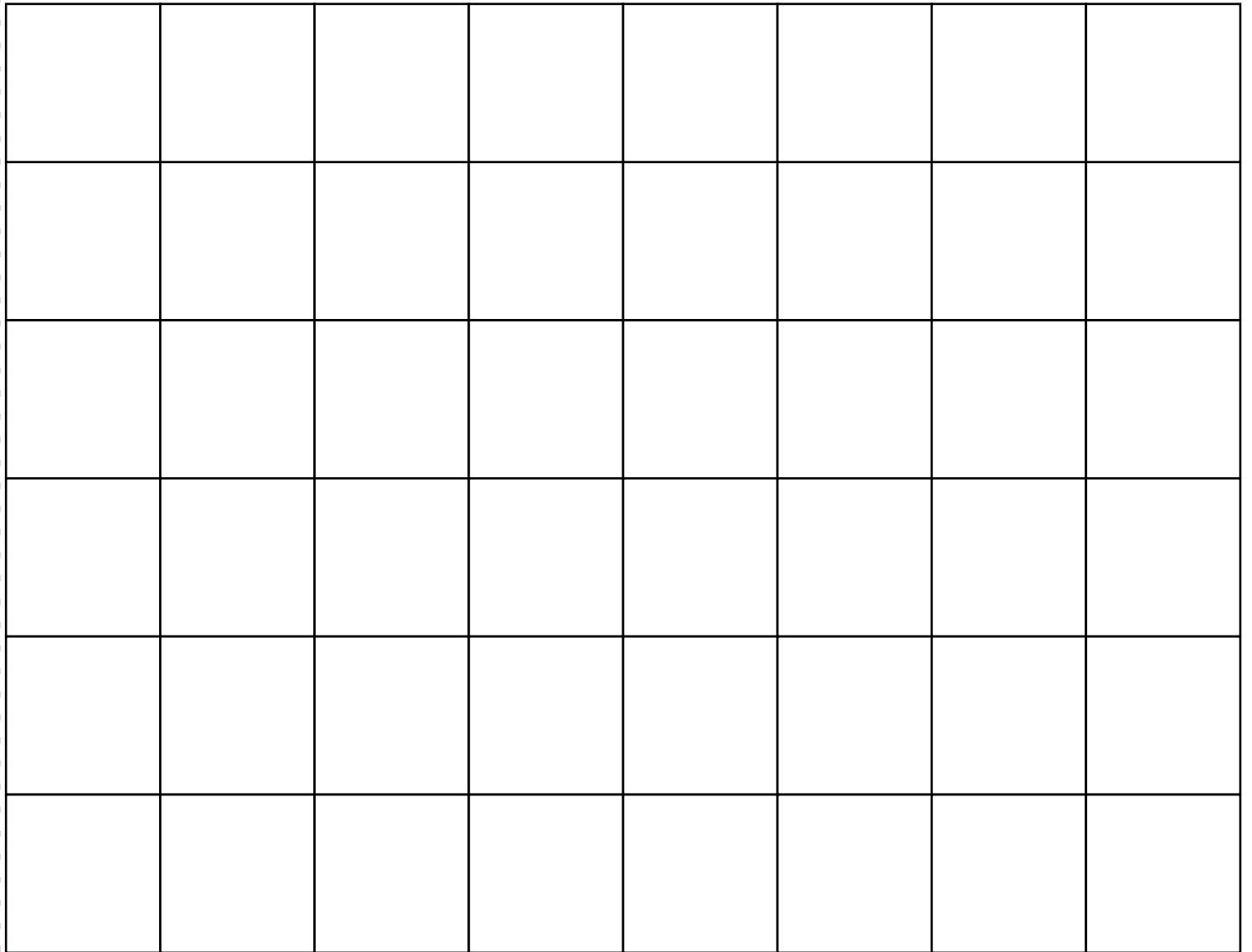
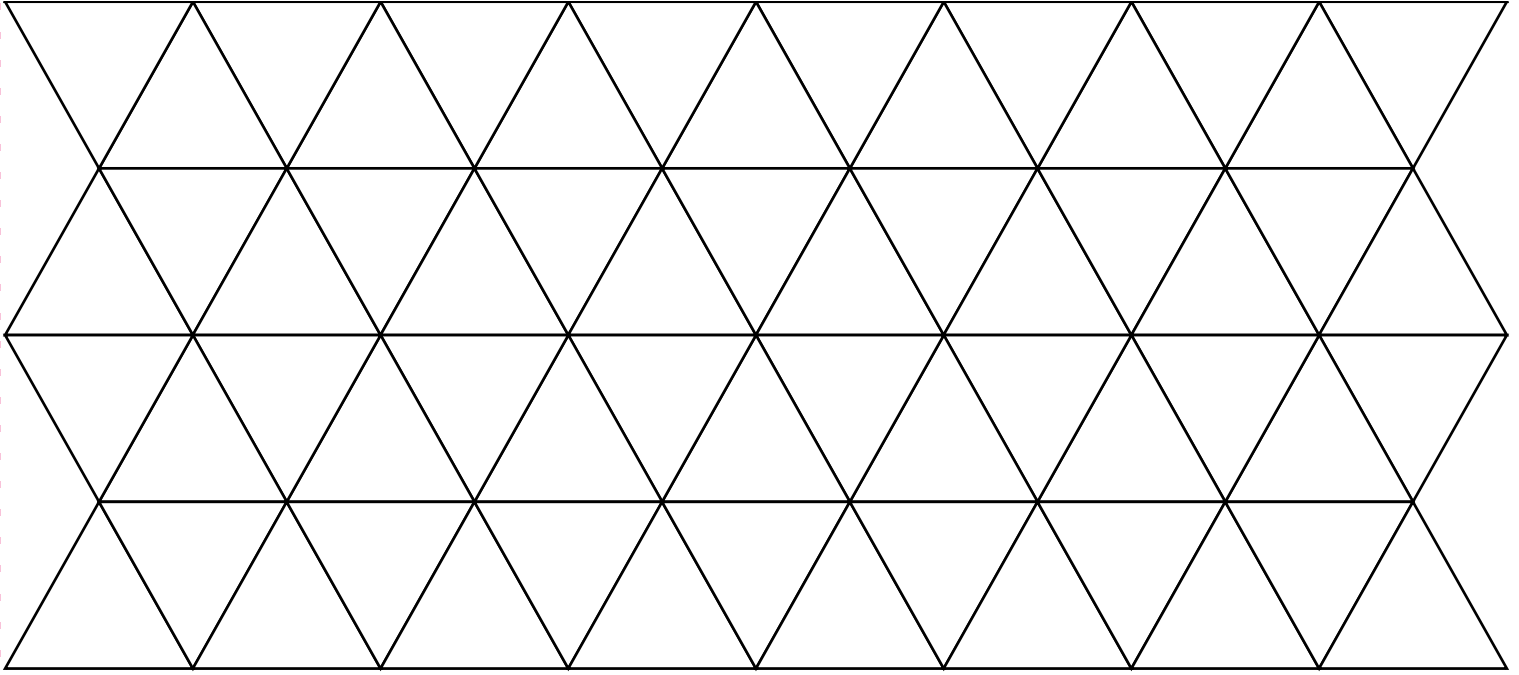
Pour aller plus loin

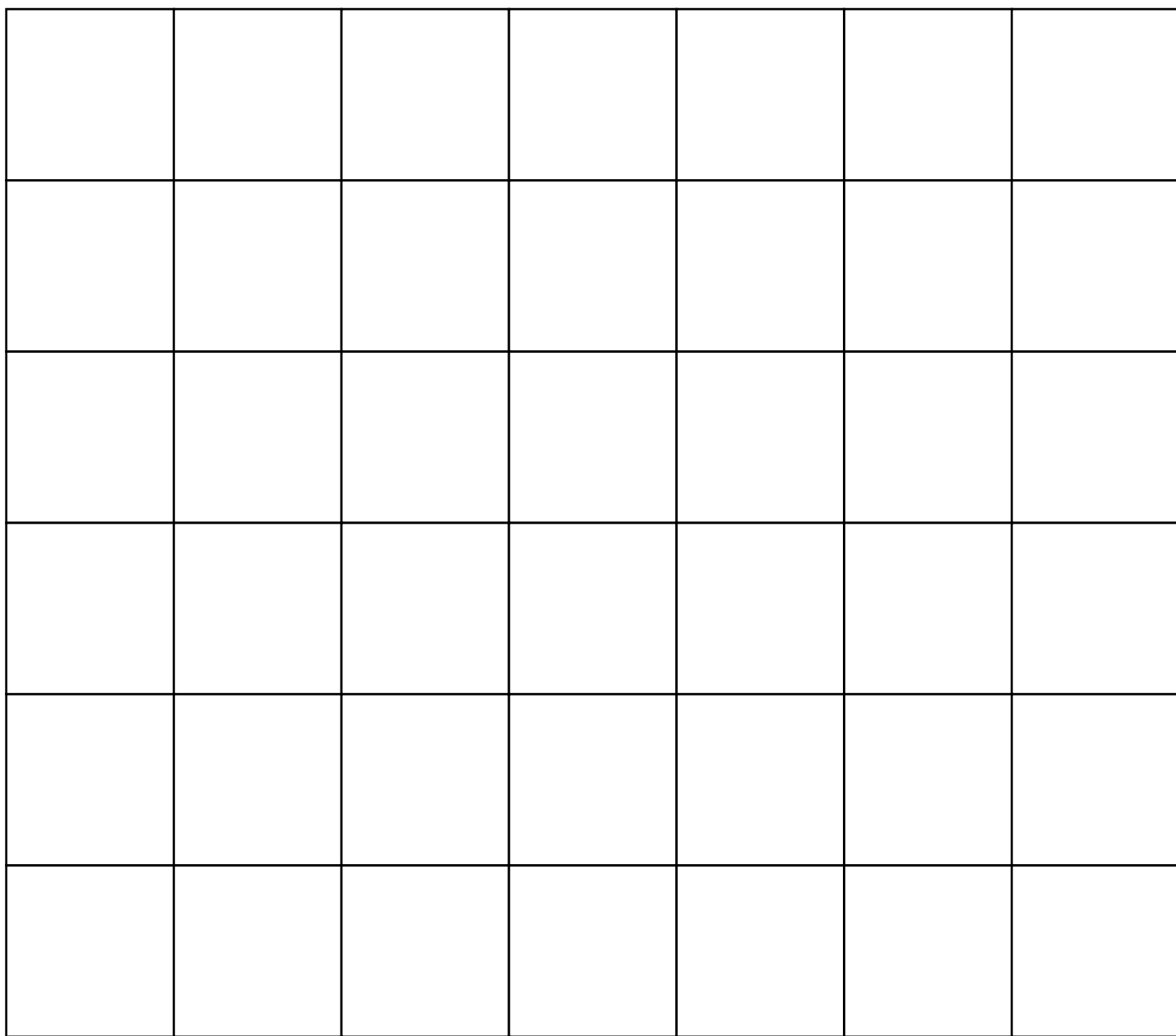
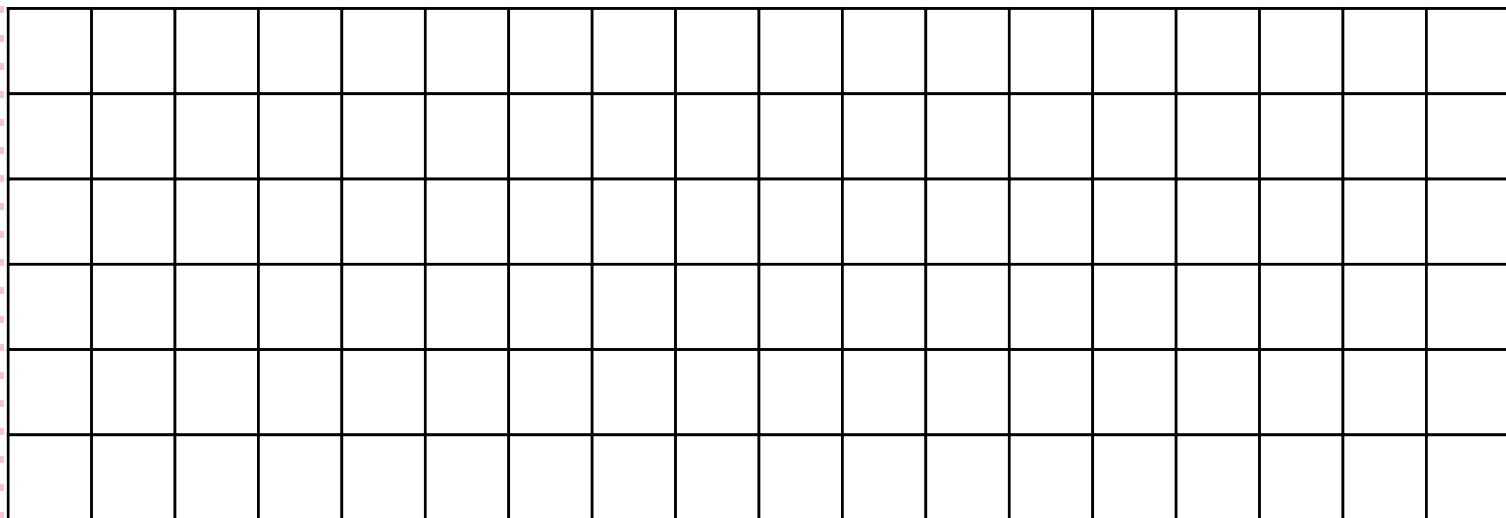


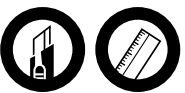
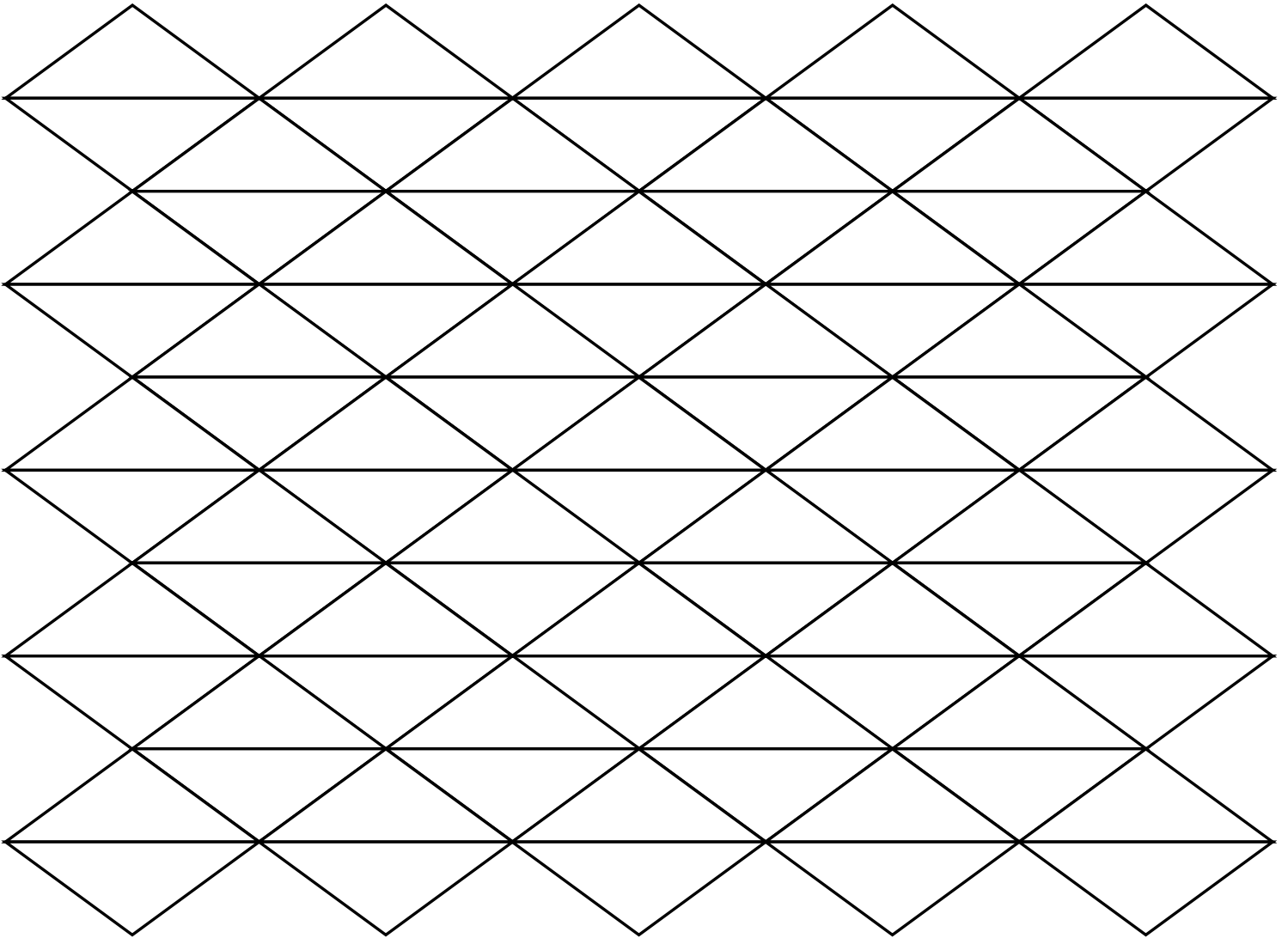
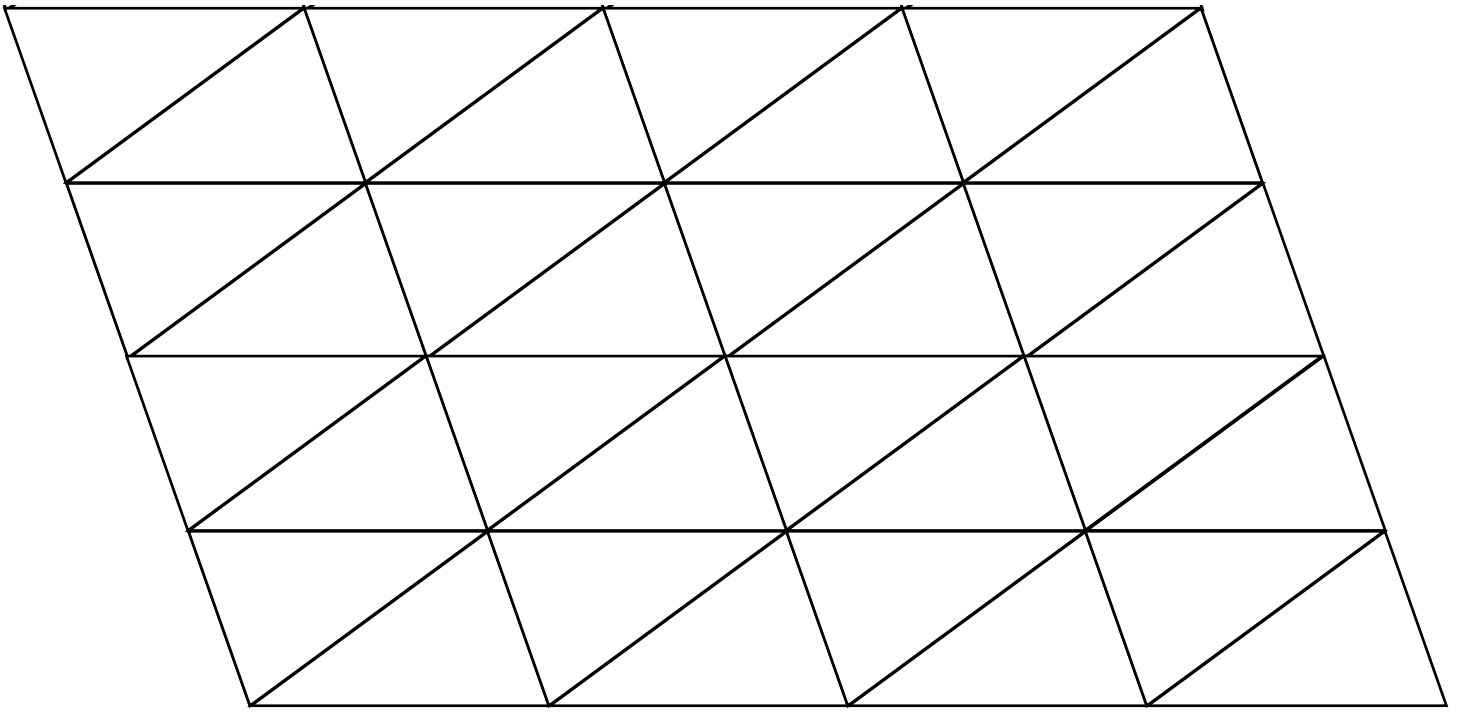
En calculant les angles des polygones dessinés sur la sphère, vous découvrirez des propriétés de la géométrie sphérique :

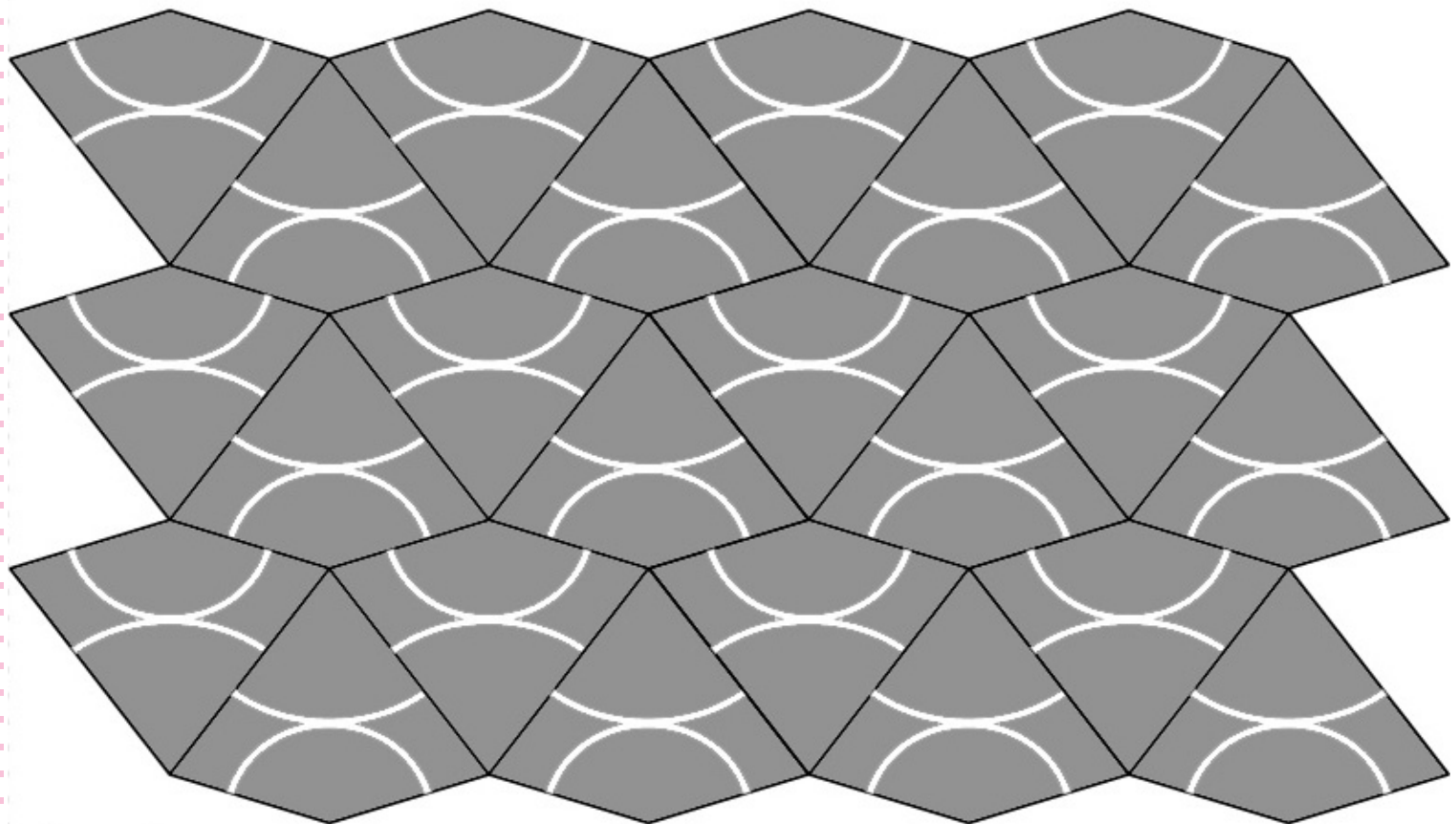
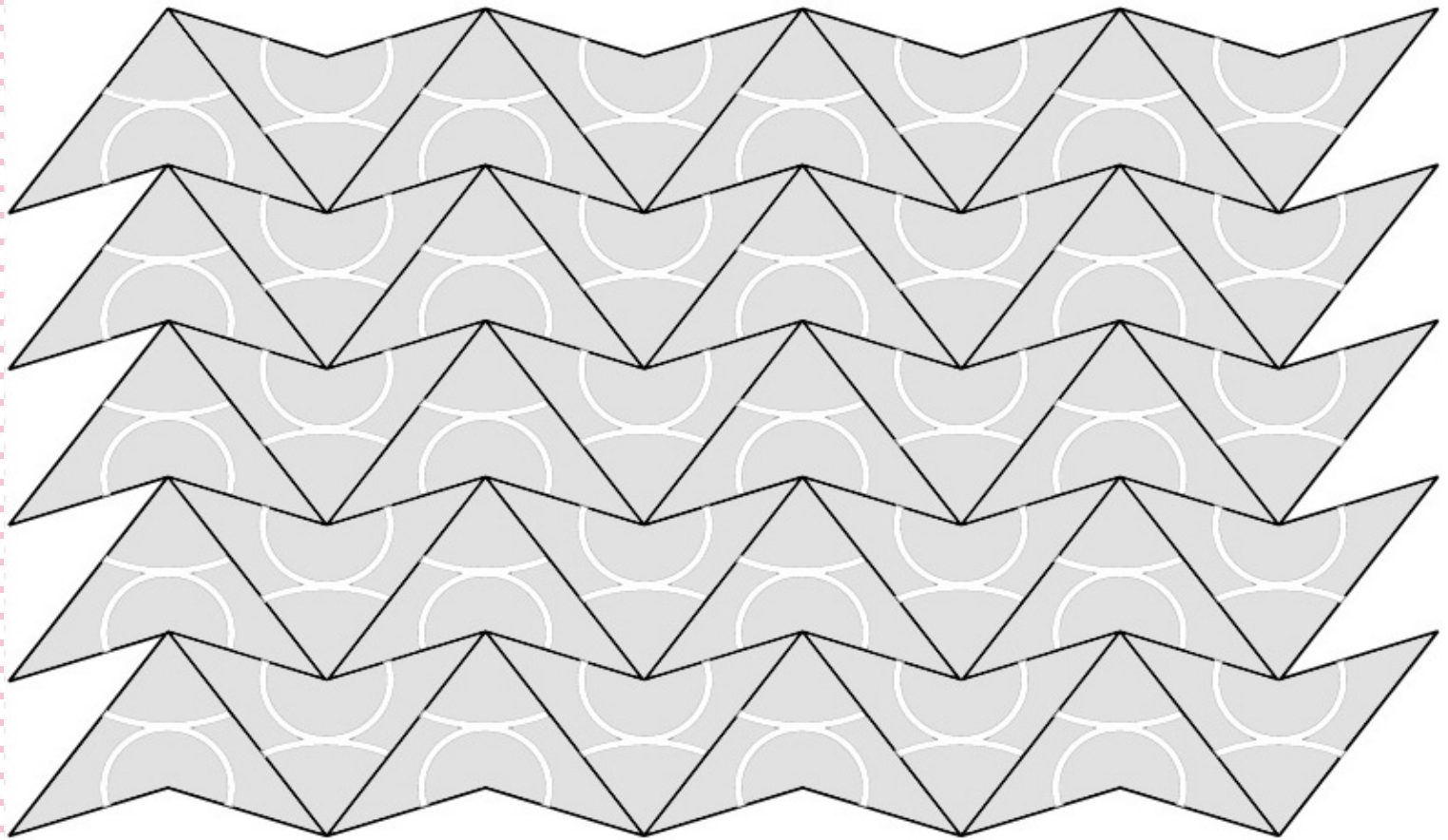
- Quelle est la somme des angles d'un triangle sphérique ?
- Peut-on construire un triangle ayant 3 angles droits ?
- Quelle relation y a-t-il entre la somme des angles d'un polygone sphérique et son aire ?

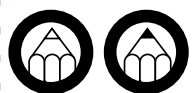


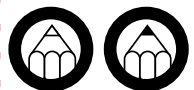


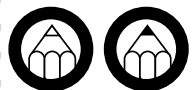


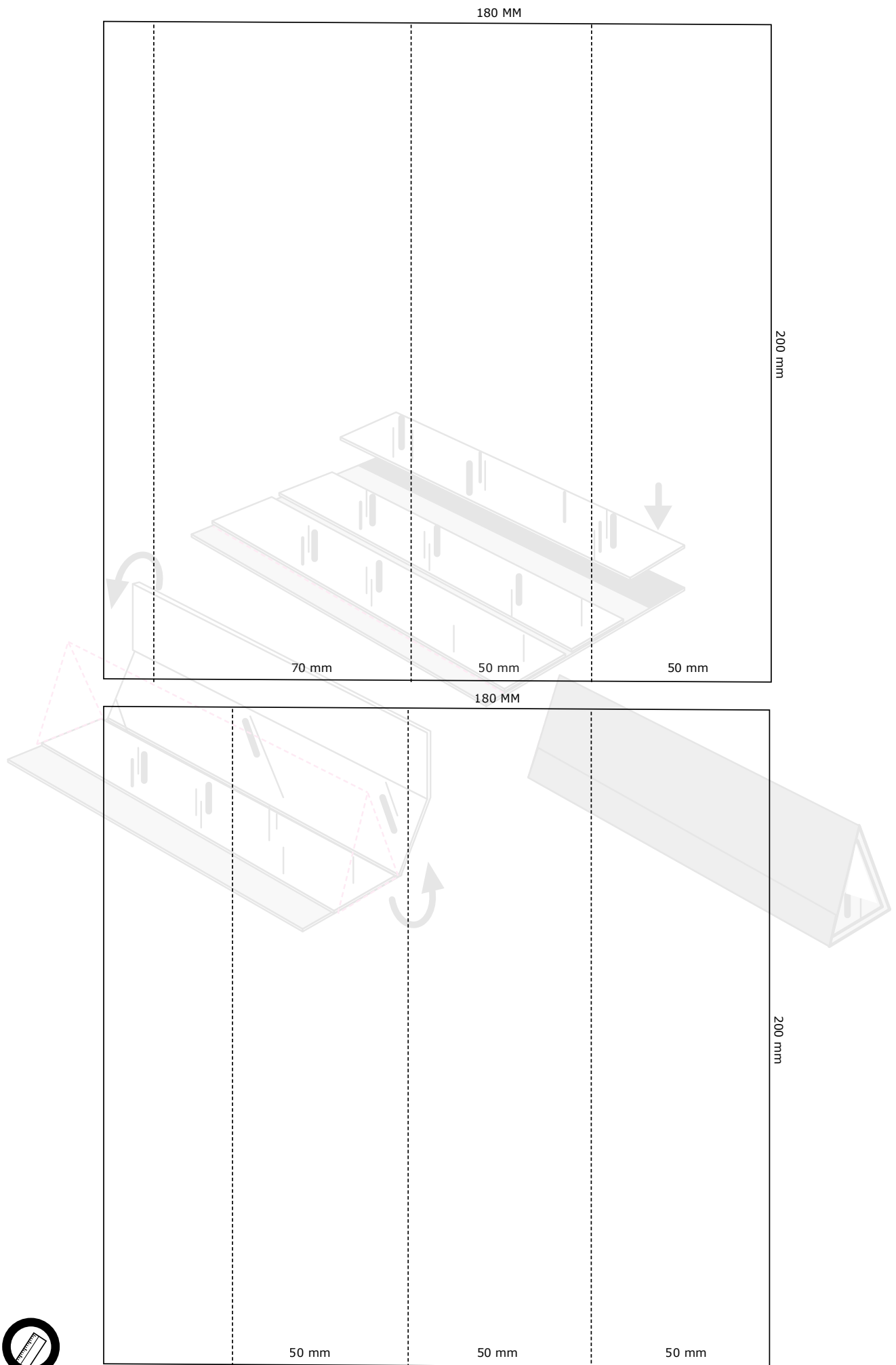


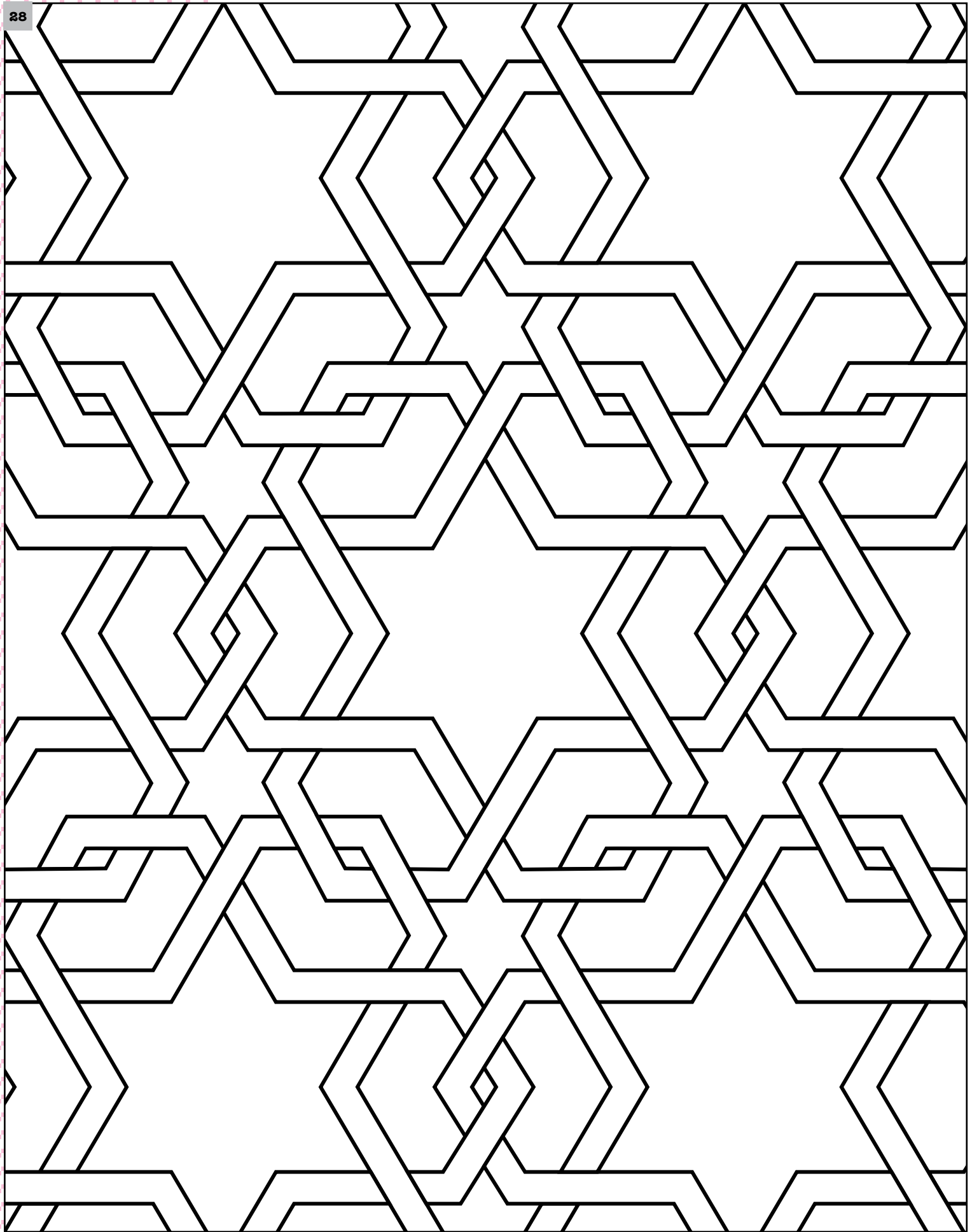


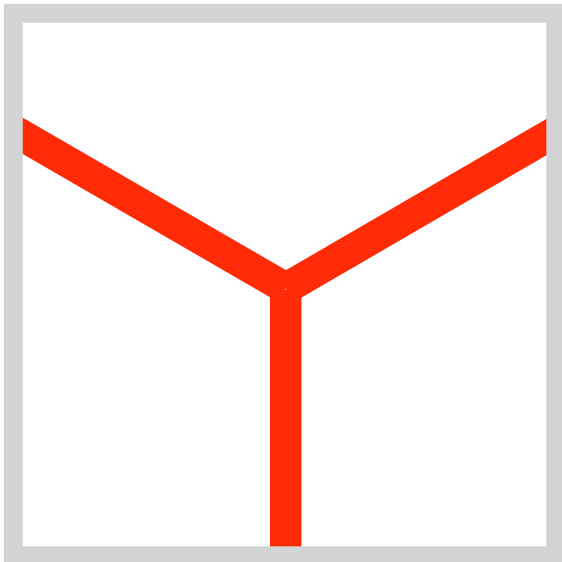




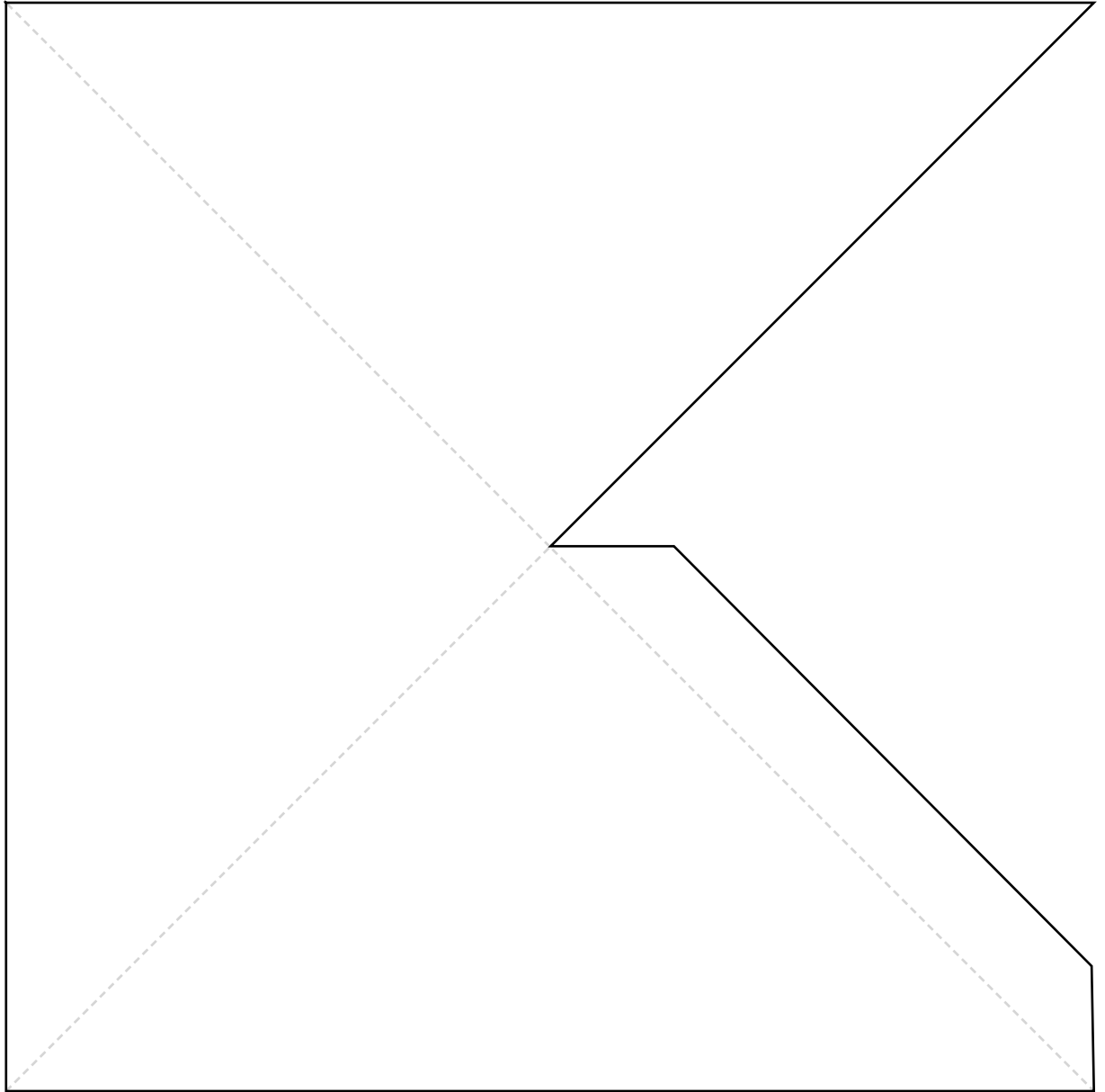




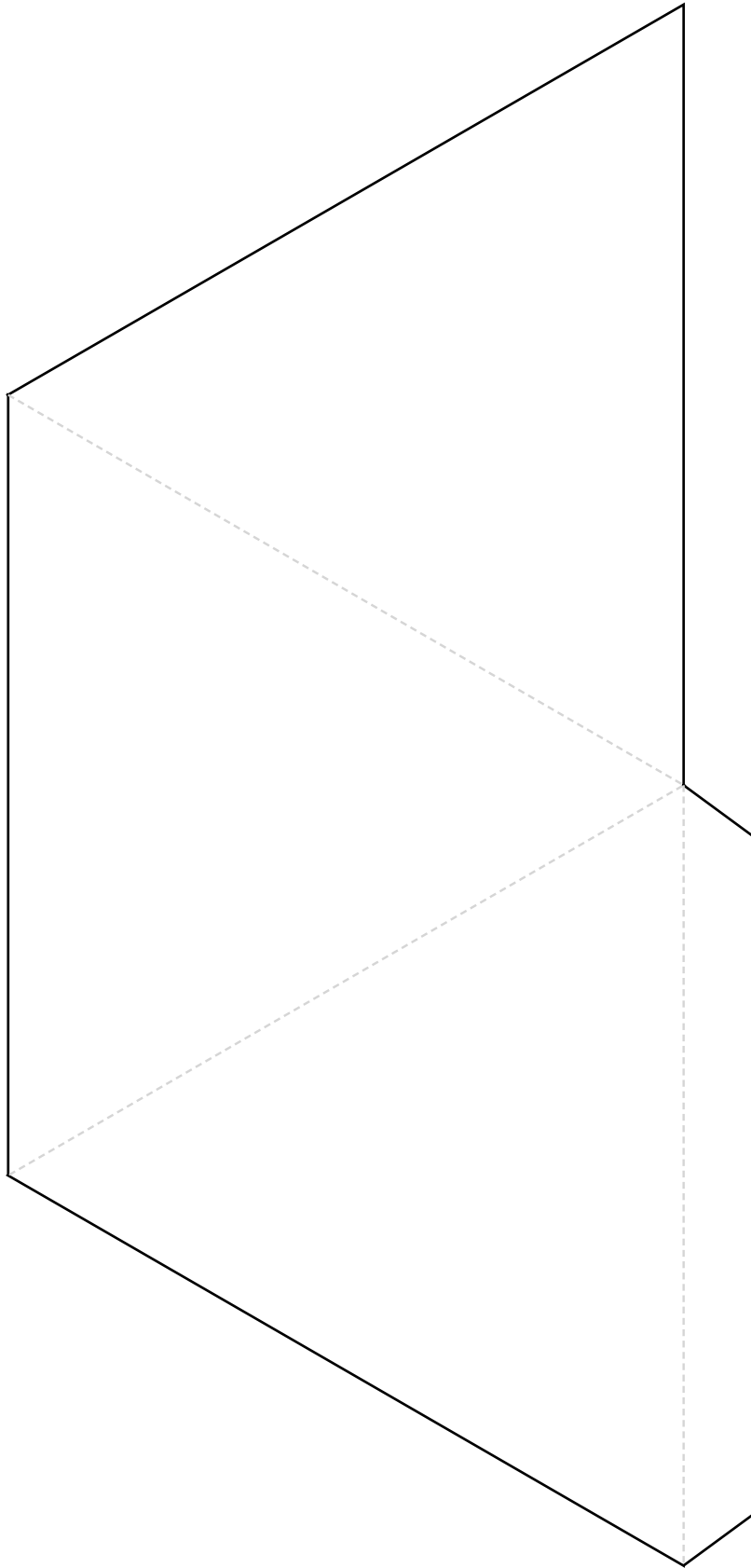




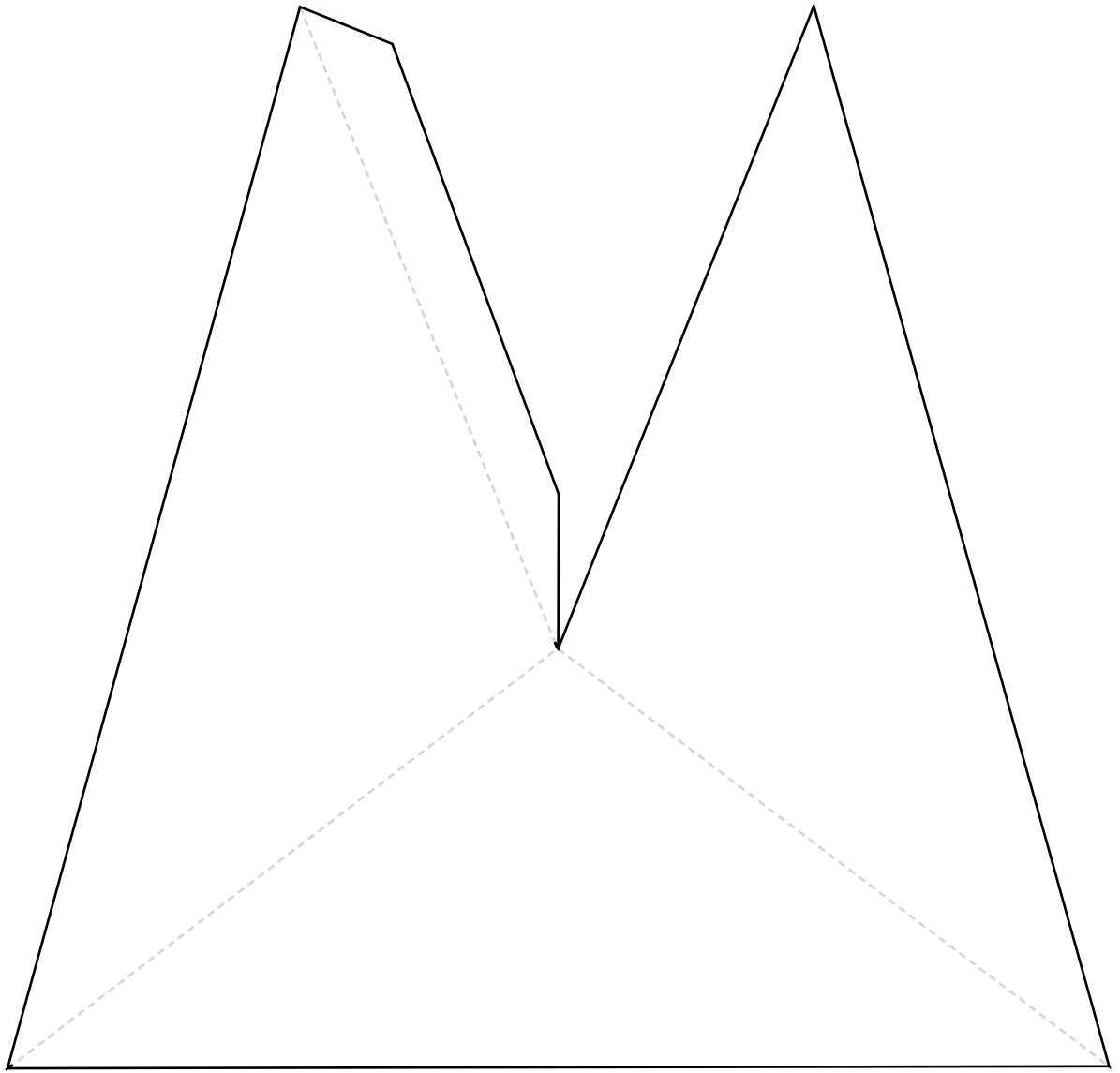
1

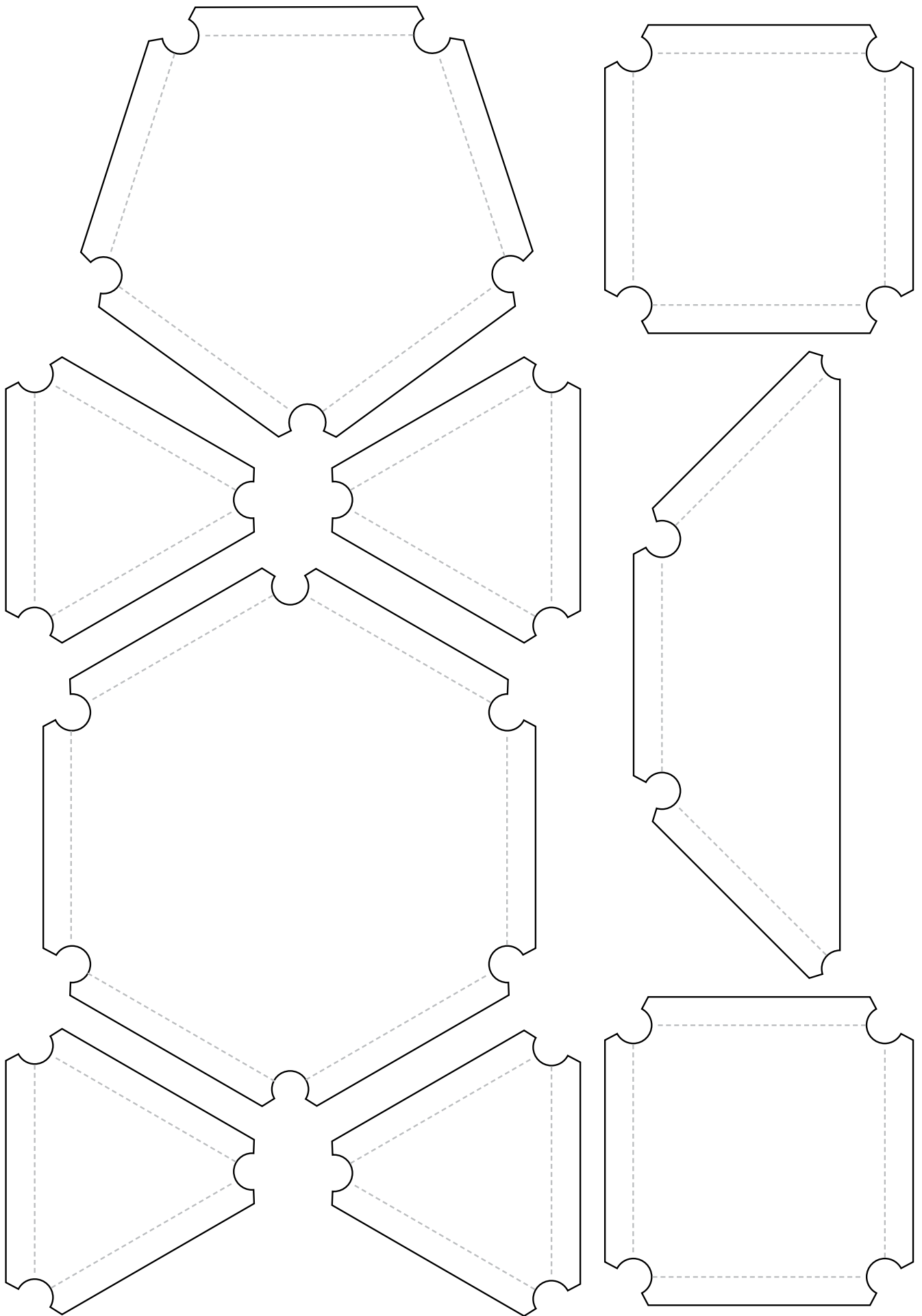


2



3





3. Remplir l'espace



Empilez des oranges



Polyèdres



Problèmes complexes



Empilez des oranges



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 feuille quadrillée, des pièces de monnaie, des billes ou des oranges...

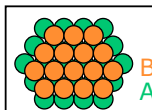
39

Empilez, empilez...

- Placez le maximum de pièces identiques dans un carré de côté 1, de côté 2, 3... 10 unités.
 - Placez le maximum de boules unités dans un cube de côté 10 unités.
- Calculez la densité de chaque empilement.



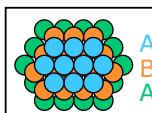
Que retenir ?



Dans un carré de côté 10, vous pouvez placer plus de 100 disques !

A partir de quel rang peut-on en placer plus que le carré du côté ?

Dans le plan, la densité* maximum obtenue avec des disques identiques est de 90,6%. C'est-à-dire qu'il y a moins de 10% de vide.

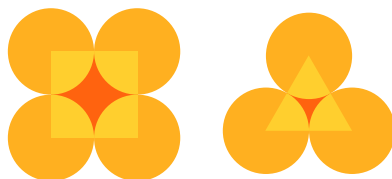


Dans l'espace, quand l'empilement est régulier, la densité* maximum est obtenue (comme pour les réseaux cristallins) quand les billes sont aux sommets et aux centres des faces d'un empilement de cubes. Cet empilement est appelé "cubique à faces centrées". Sa densité est de 74%.

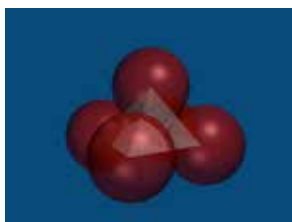
Pour des empilements de billes de diamètres différents ou de formes aplaties, le problème de la densité maximum n'est pas encore résolu.

* la densité est la proportion de la surface ou du volume occupés par les billes à l'intérieur de l'enveloppe qui les contient (ici, le carré, la pyramide ou le cube).

Pour aller plus loin



Calculer la densité de ces empilements de disques revient à comparer dans le carré (ou le triangle), l'aire de la partie occupée par les disques à l'aire du carré (ou du triangle).



Calculer la densité de ces empilements de boules revient à comparer dans le cube (ou dans le tétraèdre), le volume de la partie occupée par les boules au volume de la pyramide (ou du tétraèdre).

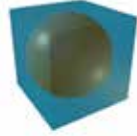
Empilez des oranges



Pour aller plus loin

Question 1

Entre un kilo de café moulu et un kilo de café en grains, quel est celui qui occupe le plus petit volume ?



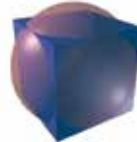
Question 2

Dans un cube, placez une sphère qui soit tangente aux 6 faces du cube.

Quel est, selon vous, le rapport des volumes (sans faire de calcul).

Refaites la même estimation avec le rapport des surfaces.

Vérifiez par le calcul que **ces deux rapports sont égaux !** C'est une des méthodes qui a permis à **Archimède** de trouver l'aire et le volume de la sphère.



Question 3

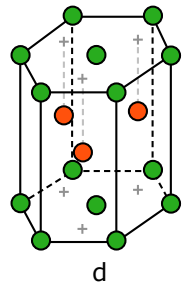
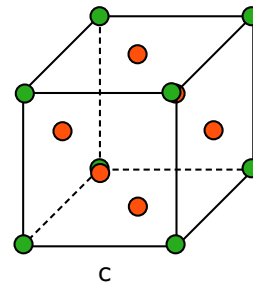
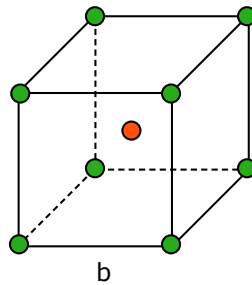
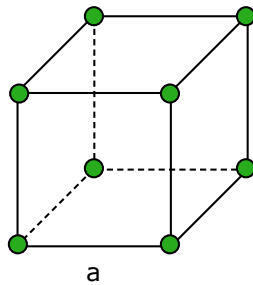
Dans un cube, placez une sphère qui soit tangente aux arêtes du cube.

Reposez-vous les mêmes questions. Le commentaire est cette fois-ci le suivant :

le rapport des volumes est égal à deux fois la densité maximale d'empilement de sphères.

Quelques résultats faciles à retrouver :

- a. Empilement cubique simple - Densité : $\pi / 6$
- b. Empilement cubique centré - Densité : $\pi \sqrt{3}/8$
- c. Empilement cubique à faces centrées - Densité : $\pi \sqrt{2}/6$
- d. Empilement hexagonal compact - Densité : $\pi \sqrt{2}/6$



Métiers des maths

Toutes les entreprises qui s'intéressent au conditionnement d'objets, de graines, de pilules... Les physiciens et ingénieurs qui s'intéressent aux matériaux et aux empilements d'atomes. Les empilements sont aussi utilisés pour les codages informatiques de message et leurs corrections automatiques (codes de Hamming) !

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Empilements - Densité - Képler - Hale

3. Remplir l'espace

Polyèdres



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : **Patrons polyèdres**, ciseaux ou cutter, colle

40

41

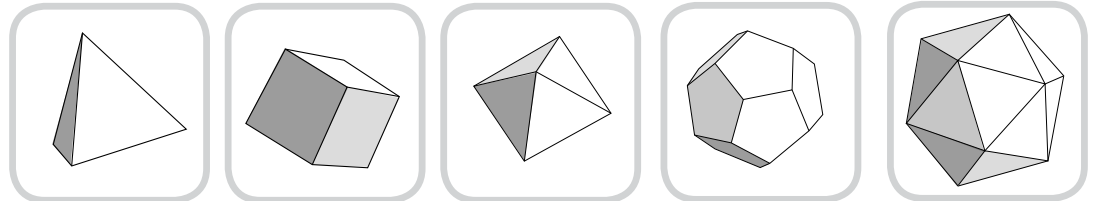
42

43

44

Fabriquez des polyèdres

- A partir d'un patron en carton ou de polygones réguliers assemblés, réalisez les 5 solides de Platon, un double tétraèdre, une pyramide à base carrée...
- Choisissez un polyèdre et faites-le tourner.
- Combien a-t-il de faces, de sommets, d'arêtes ?



Que retenir ?

Un polyèdre régulier est un solide dont les faces sont faites d'un même polygone régulier, réparties de la même façon autour de chaque sommet. Il en existe 5 appelés les **solides de Platon**. Il est semi-régulier si les faces sont faites de 2 ou 3 types de polygones réguliers. Il en existe 13 appelés **solides archimédiens**.

Pour les polyèdres convexes, réguliers ou non, il existe une relation entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces :

$$S + F = A + 2.$$

Elle a été découverte par **Euler** en 1752.

Que se passe-t-il pour une graphe planaire ?
Pour un solide avec un trou ?
deux trous ?

Remplissez le tableau ci-dessous :

Polyèdre	Faces	Sommets	Arêtes
cube	6	8	12
...			

... Y a-t-il une relation entre ces nombres ?

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : **Patrons de polygones**, des feuilles de carton, 1 paire de ciseaux, 1 "pince à trou" ou 1 emporte-pièces, des élastiques

45

46

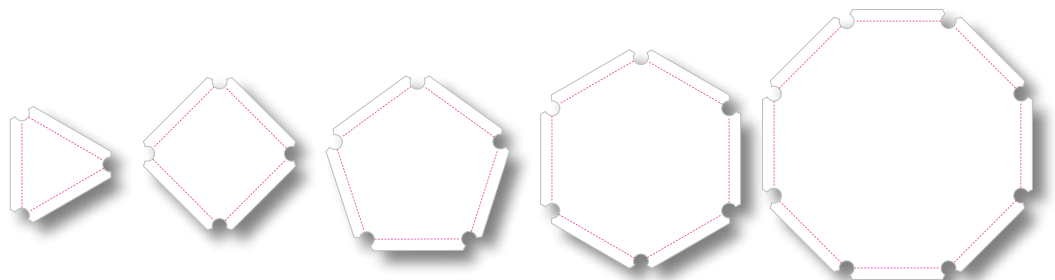
47

48

49

Fabriquez, concluez...

- Découpez des polygones réguliers à 3, 4, 5, 6 ou 8 côtés comme indiqué.
- Assemblez-les pour fabriquer un polyèdre régulier, semi-régulier.
- Combien peut-on construire de polyèdres réguliers différents ? et des semi-réguliers ?



Métiers des maths

Ces structures de l'espace sont utilisées par les architectes.

Mais on les retrouve aussi dans la nature et intéressent aussi les physiciens (empilements), les biologistes et naturalistes (avec les diatomées).

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Polyèdres - Platon - Archimède - Euler

Problèmes complexes

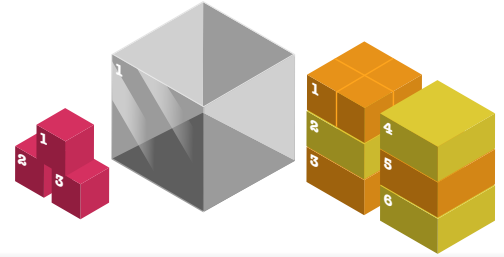


Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 3 petits cubes en bois (ou mousse...),
6 plaques (du même matériau) faites de 4 cubes à plat, 1 cube de 3X3X3

Remplissez le coffre !

Le défi : remplissez le coffre de 3x3x3 unités
à l'aide de ces deux types de caisses !



Que retenir ?

Dans la vie quotidienne, nous rencontrons régulièrement ce problème : mettre le maximum d'objets dans une boîte ou le maximum de boîtes dans un coffre.

Pour les mathématiciens – entre autres –, c'est un **problème complexe** : plus il y a d'objets, plus il faut de temps pour trouver une solution. Et ce temps augmente de façon exponentielle avec le nombre d'objets.

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : un sac à dos et des objets à y mettre

Le problème du sac à dos

Le défi : remplissez le sac à dos au maximum de la valeur des objets sans dépasser le poids de 15kg.



Que retenir ?

Une pyramide 2 fois plus haute a un volume 8 fois plus grand. On peut ainsi, par recombinaison, comparer le volume de ces deux types de pyramides. Avec 3 hauteurs, on peut même retrouver la formule du volume de toute pyramide :

$$\text{Volume} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{3}$$

Avec d'autres polyèdres, le problème d'empilement est en général plus compliqué.

Pour aller plus loin

Trouvez d'autres polyèdres qui, comme le cube, remplissent à eux seuls l'espace sans trou ni déformations.

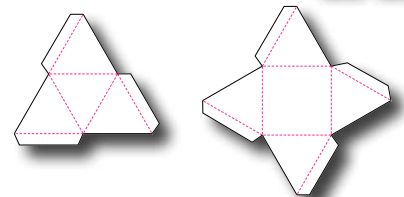
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 patrons de tétraèdres, 1 cutter ou 1 paire de ciseaux, 1 tube de colle

50 51

La grande pyramide

Fabriquez 6 tétraèdres réguliers et 6 pyramides à base carrée avec les mêmes faces triangulaires. Avec ces petites pyramides, construisez une pyramide deux fois plus haute. Comparez les volumes de ces pyramides.

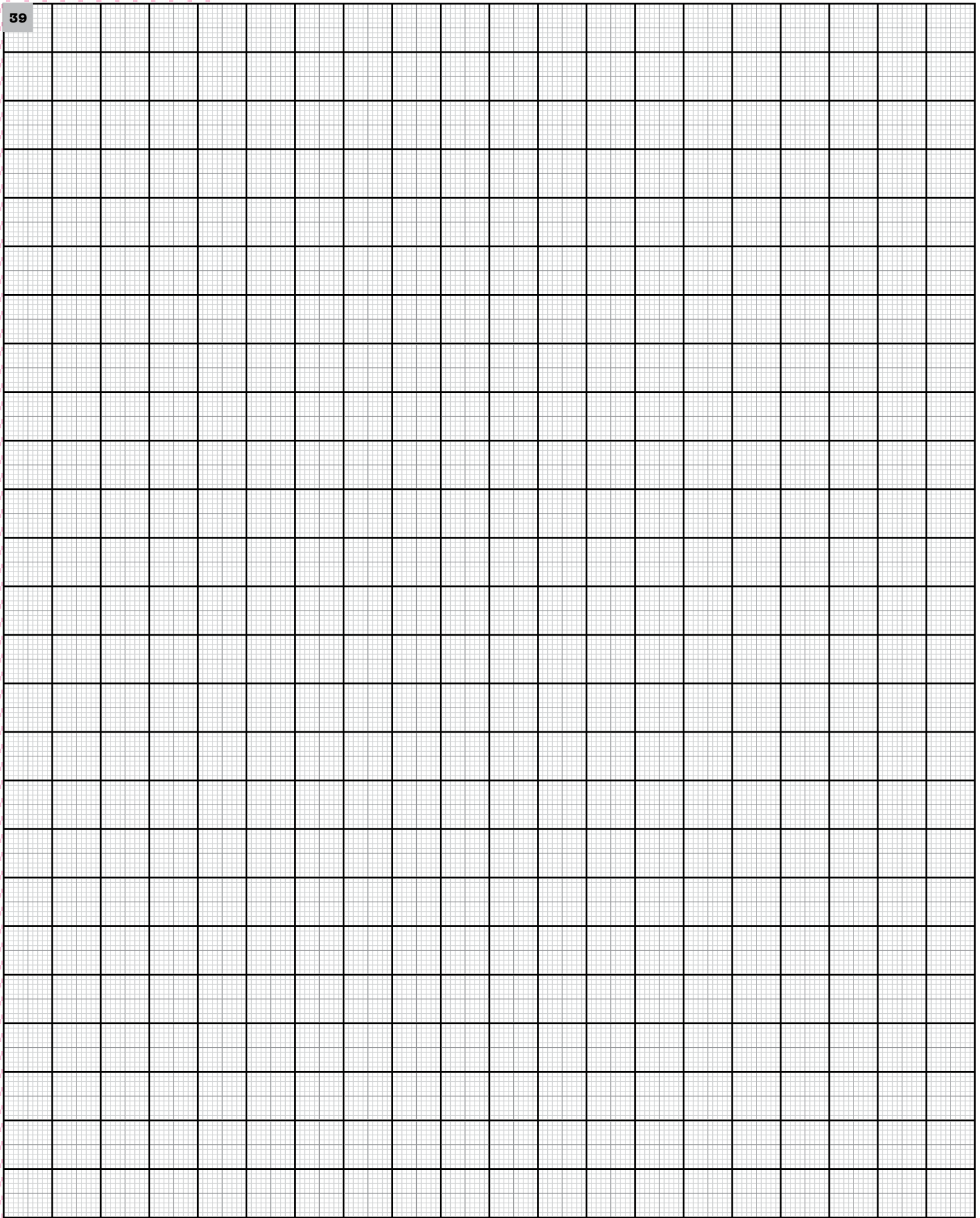


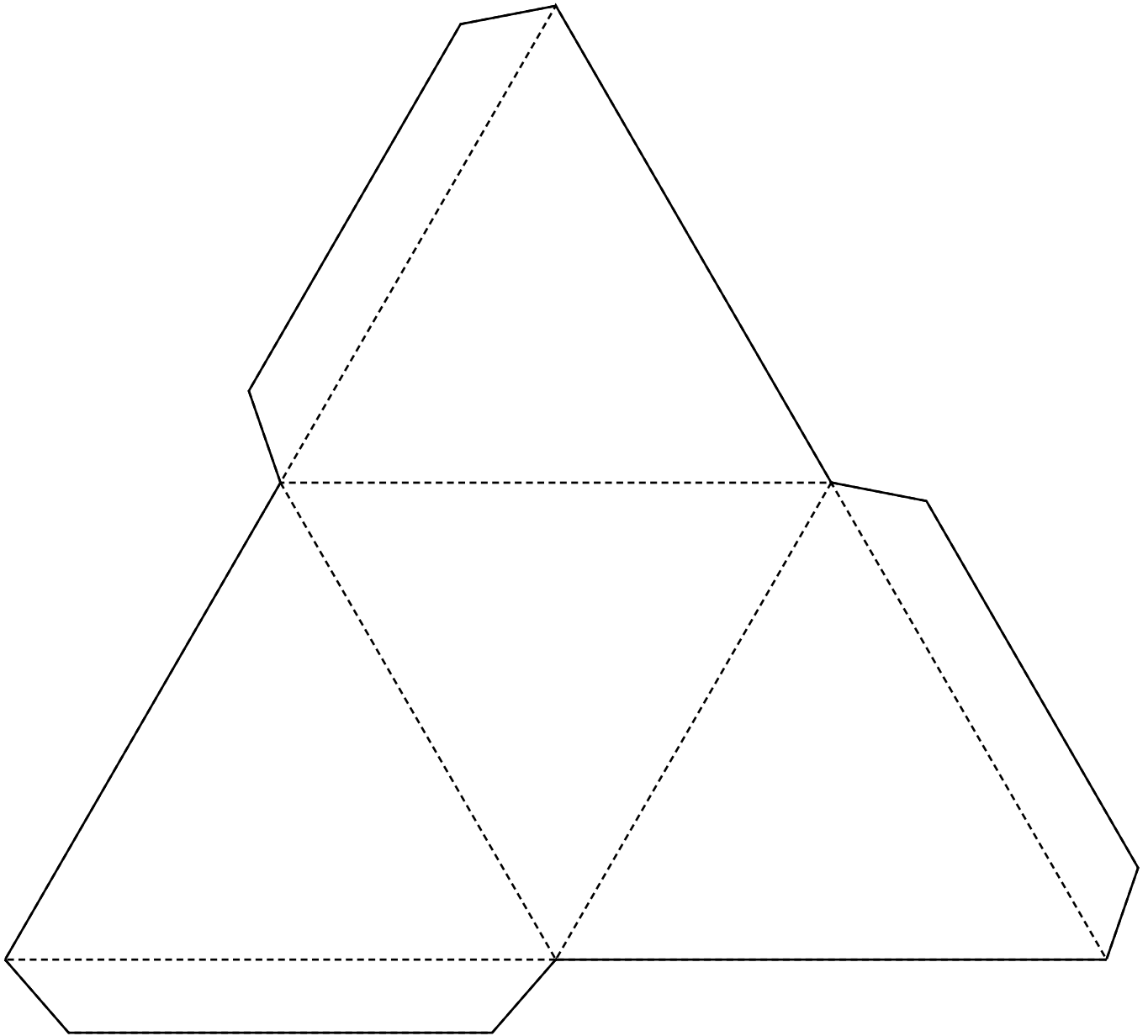
Métiers des maths

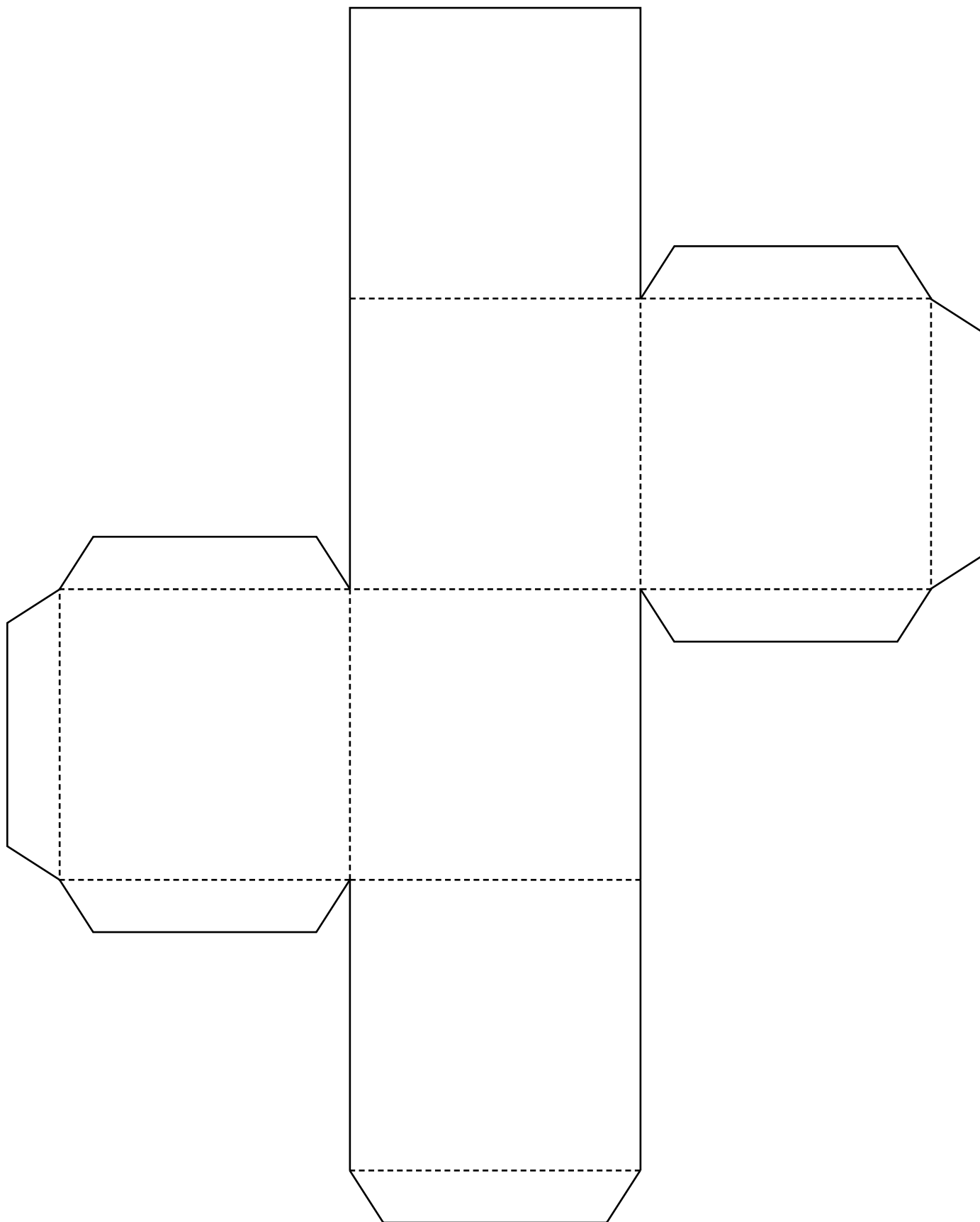
En dehors de la vie courante, ces problèmes de remplissage optimal sont traités par tous les transporteurs routiers, aériens ou maritimes, par toutes les entreprises qui font du conditionnement.

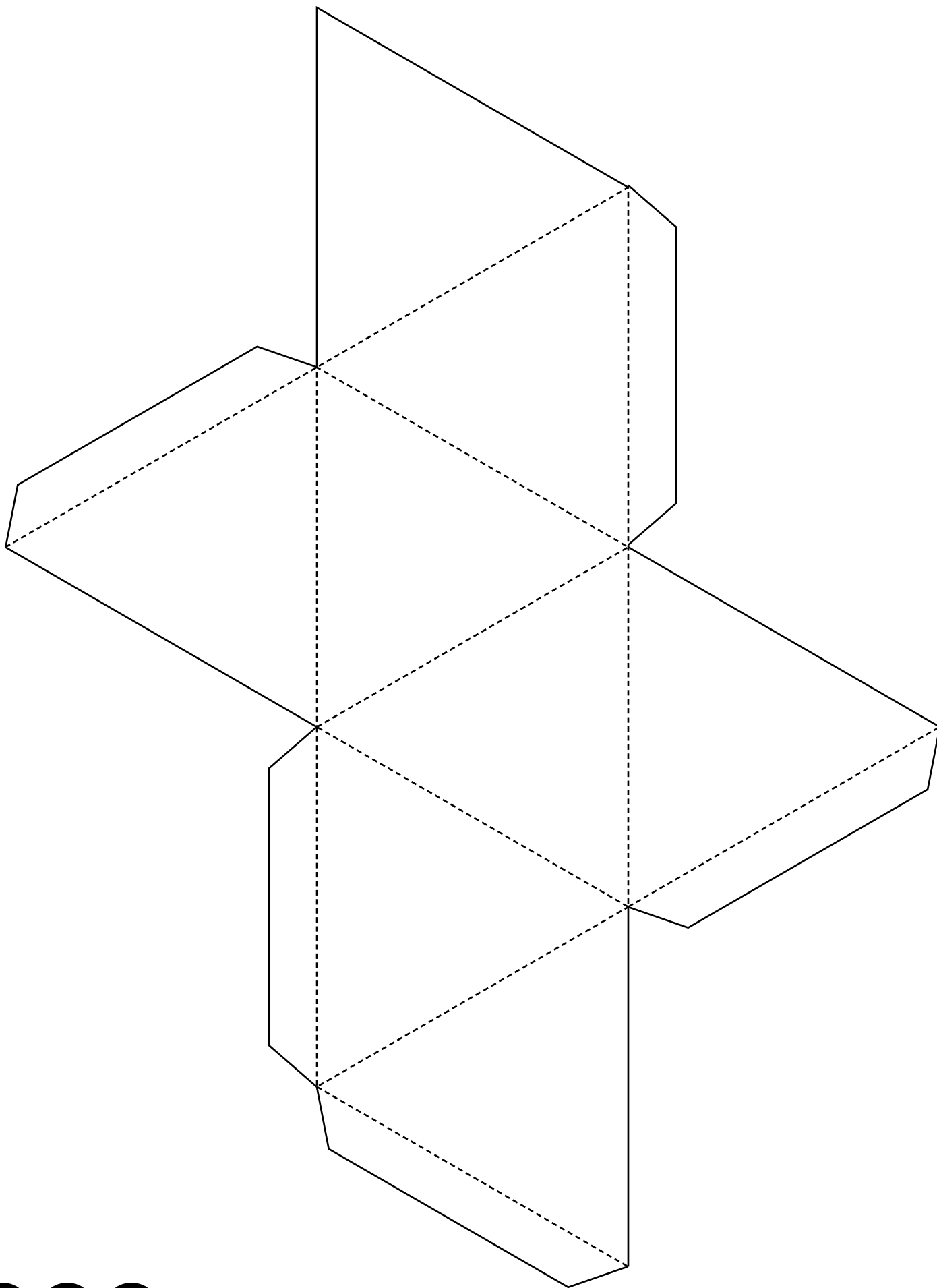
MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

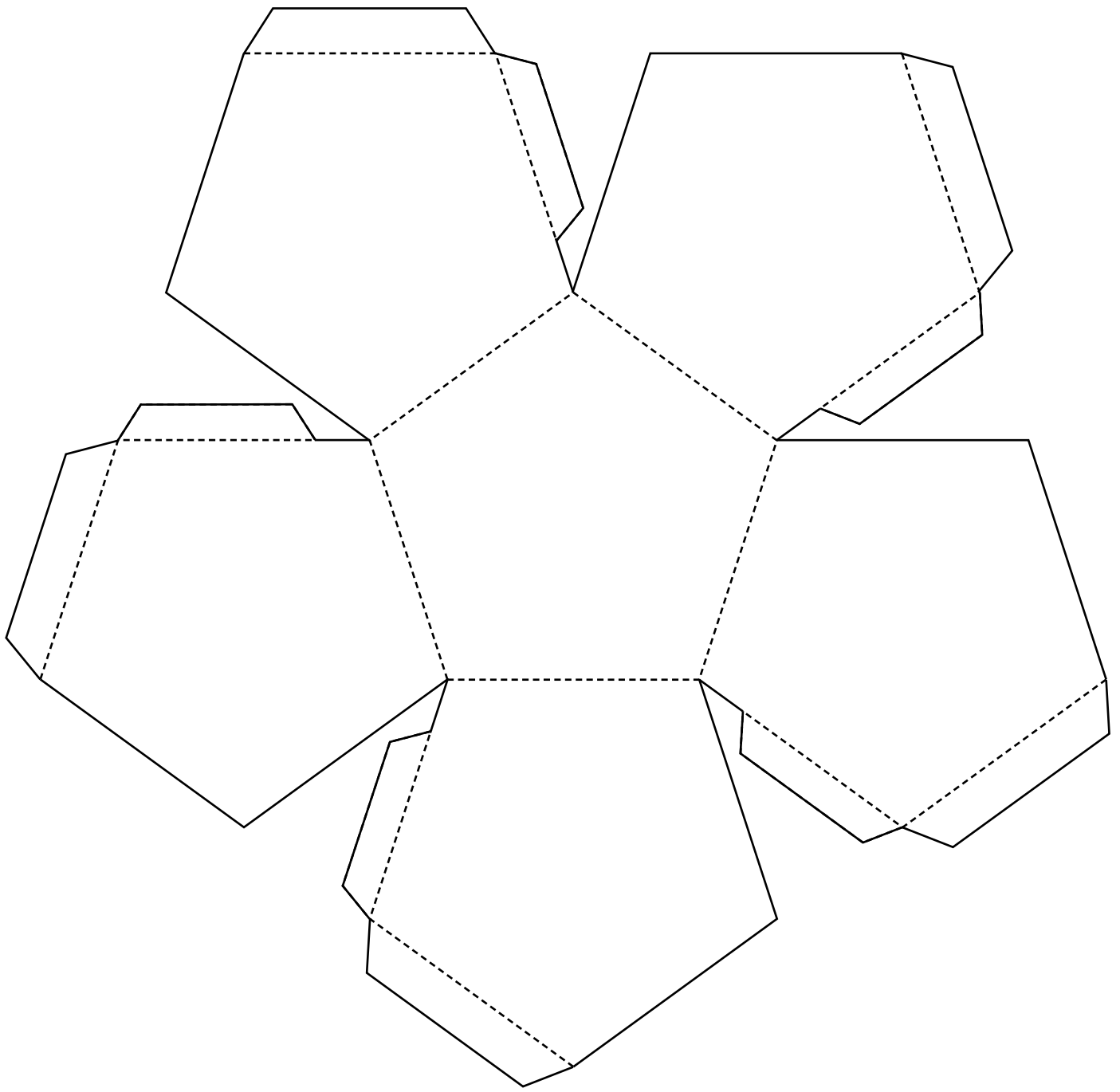
Volume de pyramide - Problème complexe - Problème NP

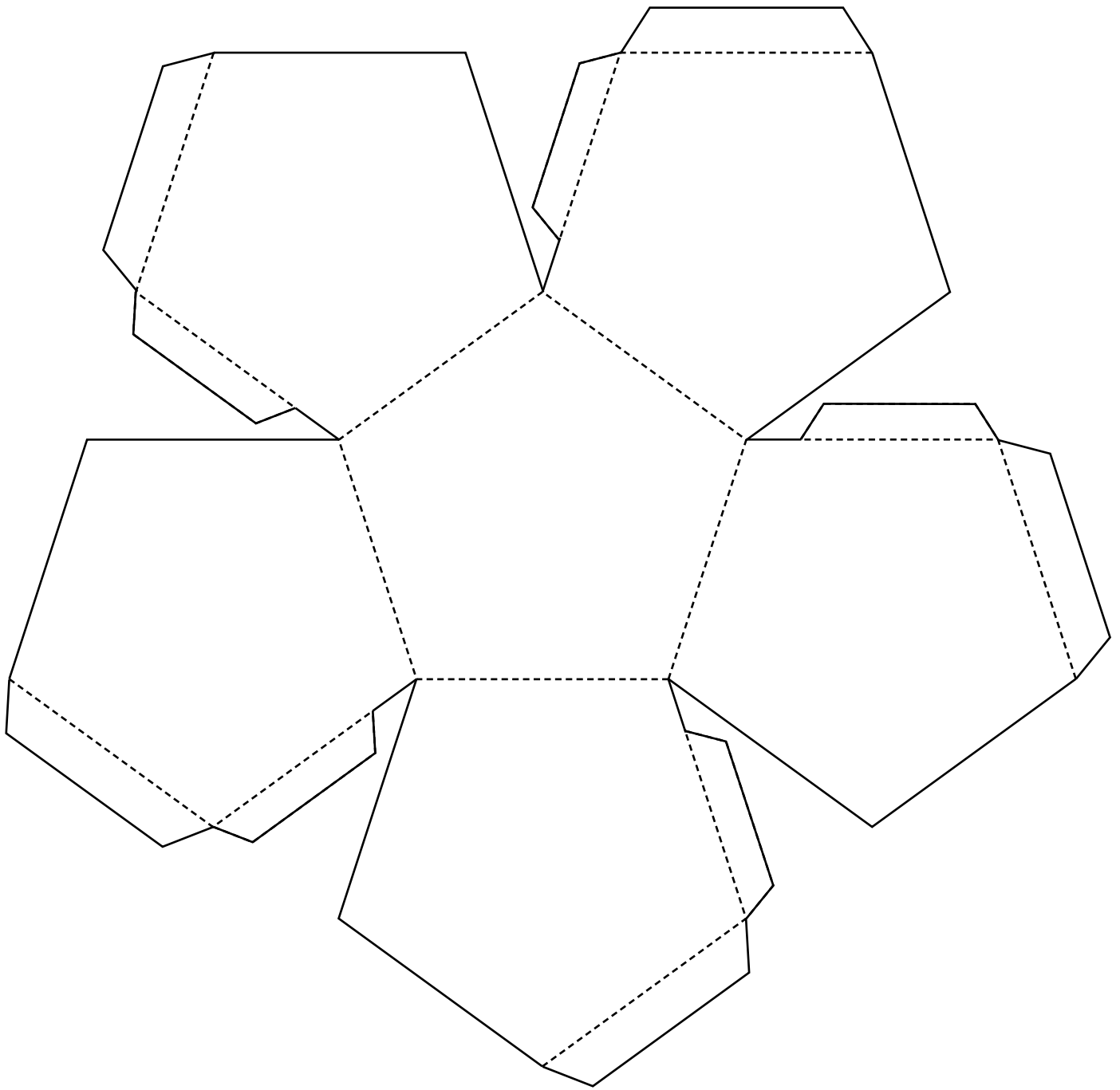


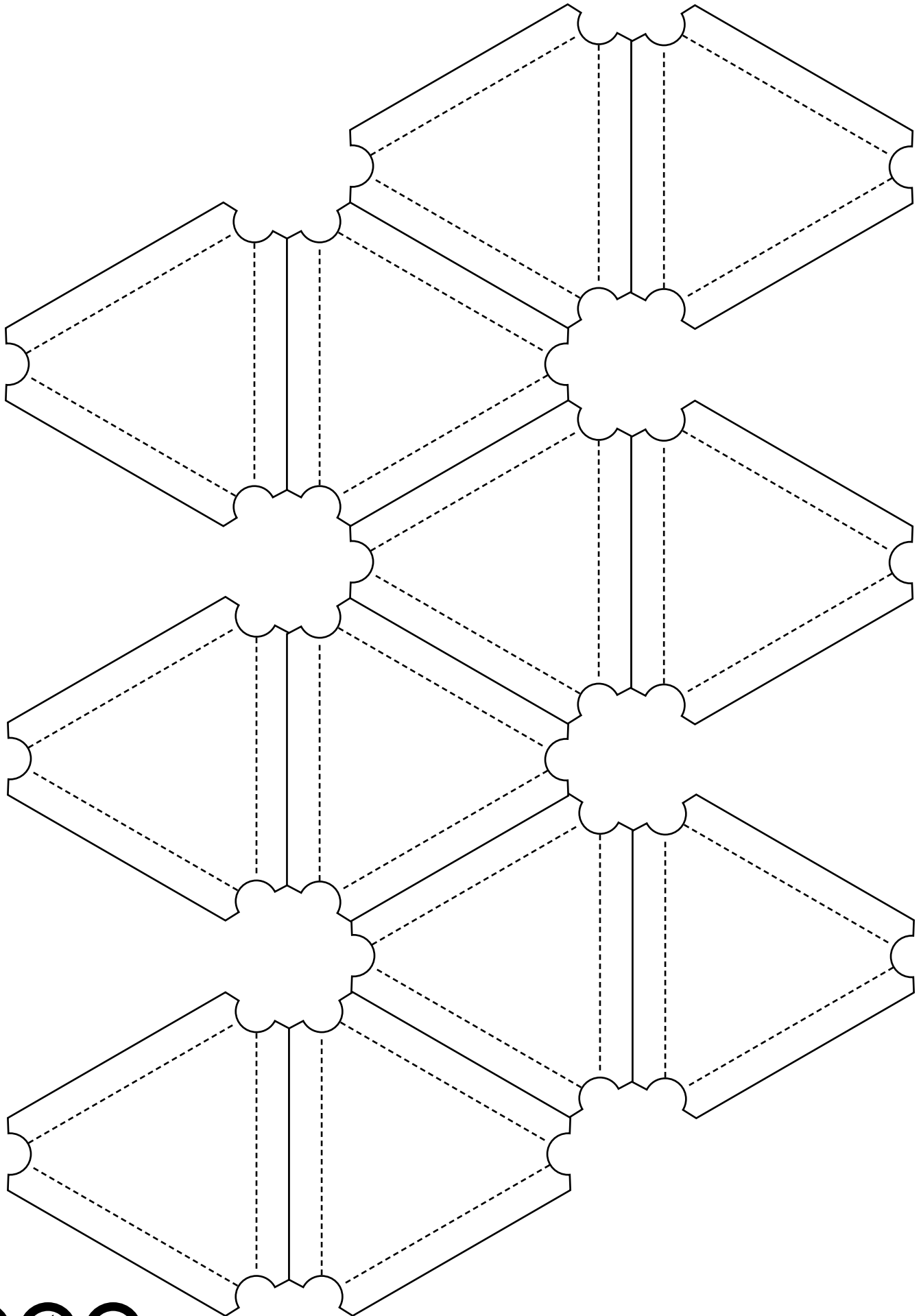


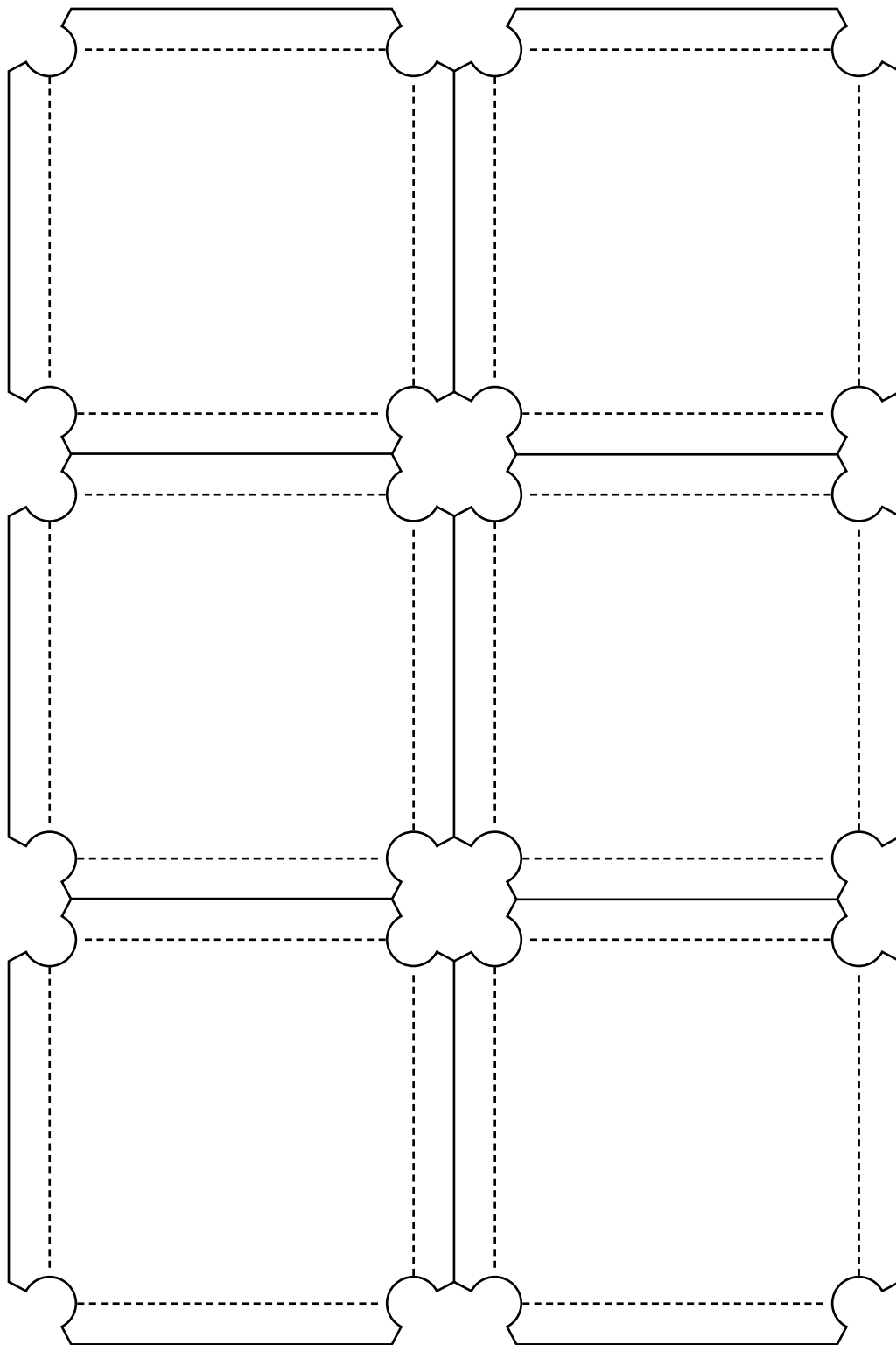


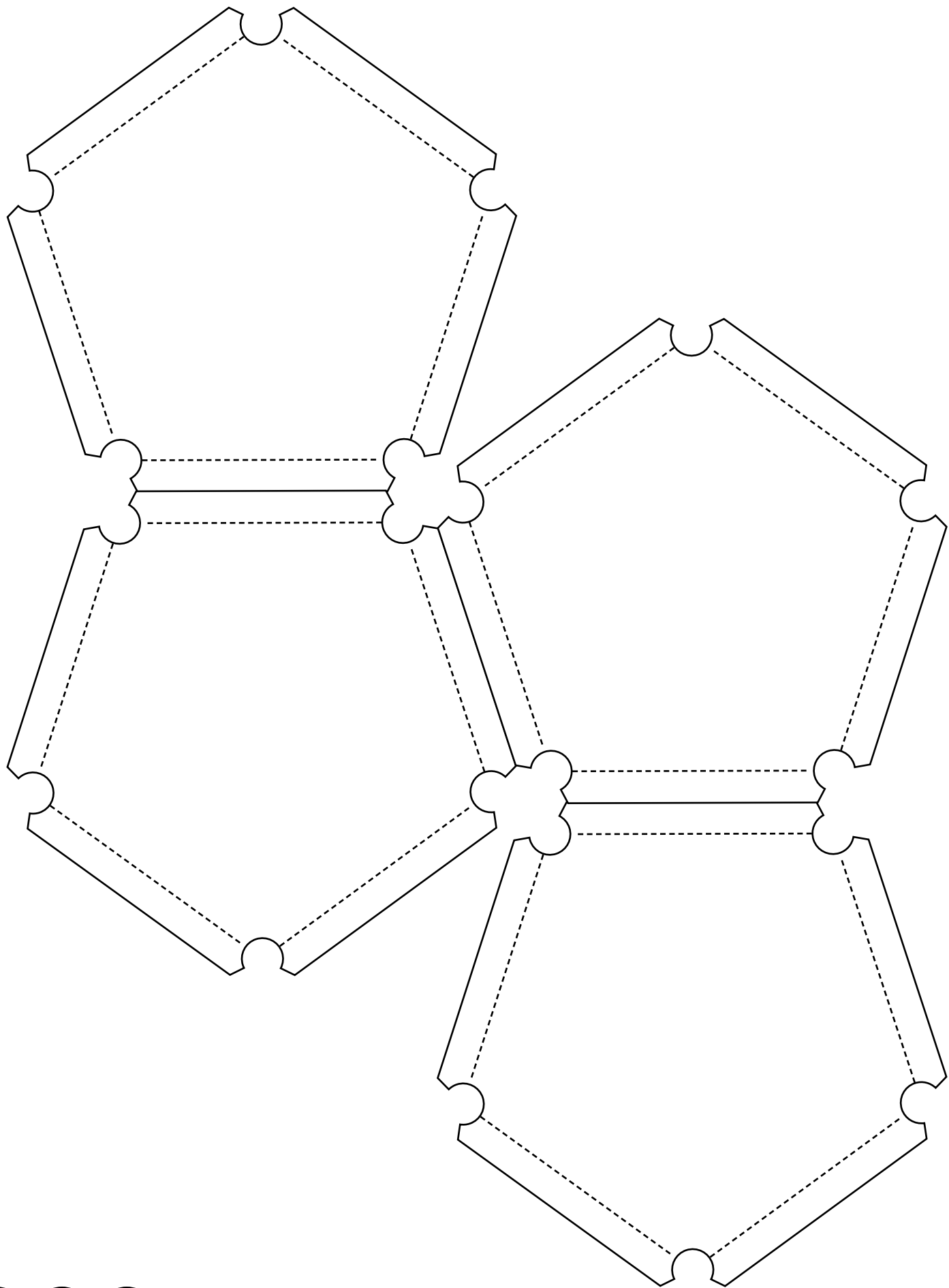


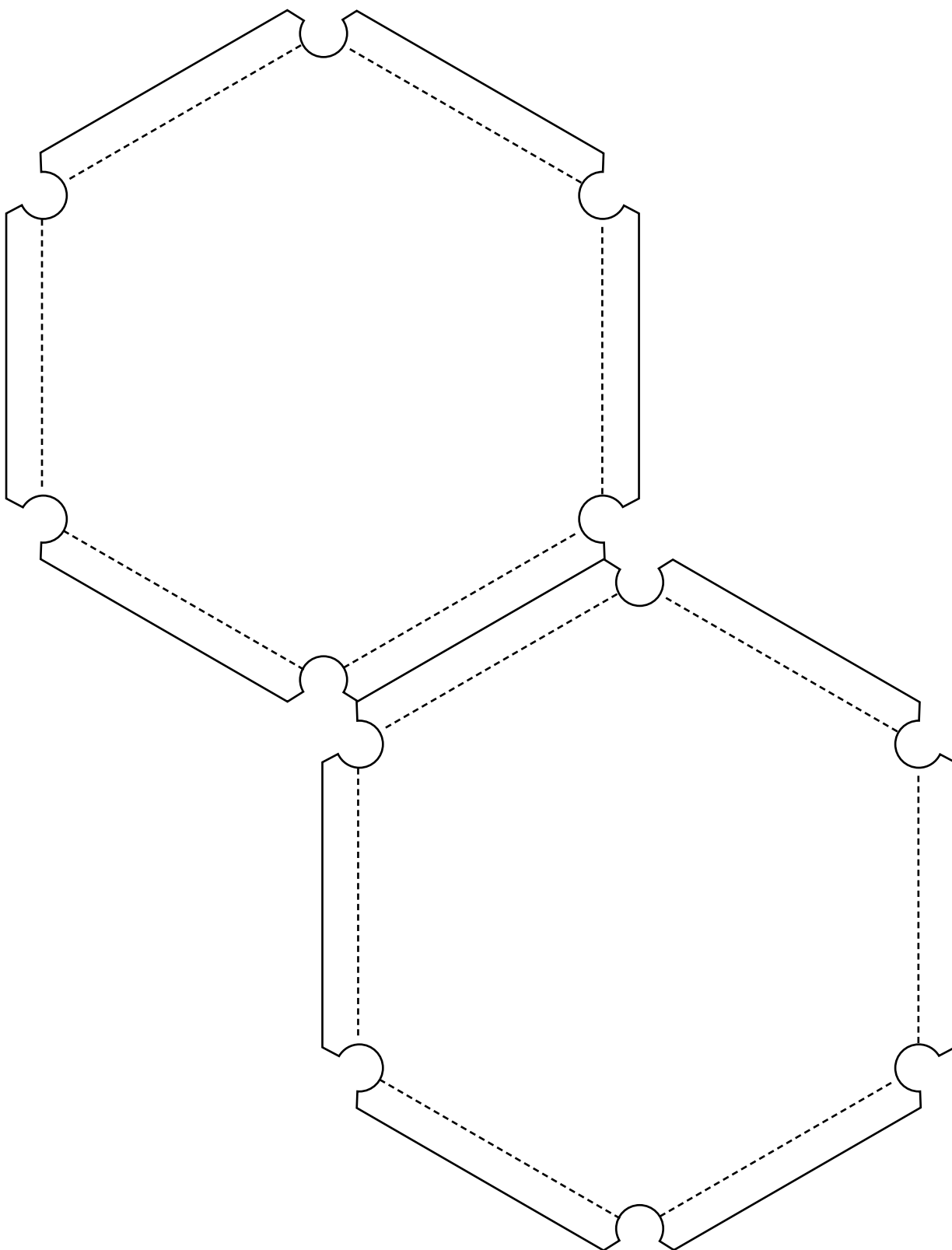
**1/2**

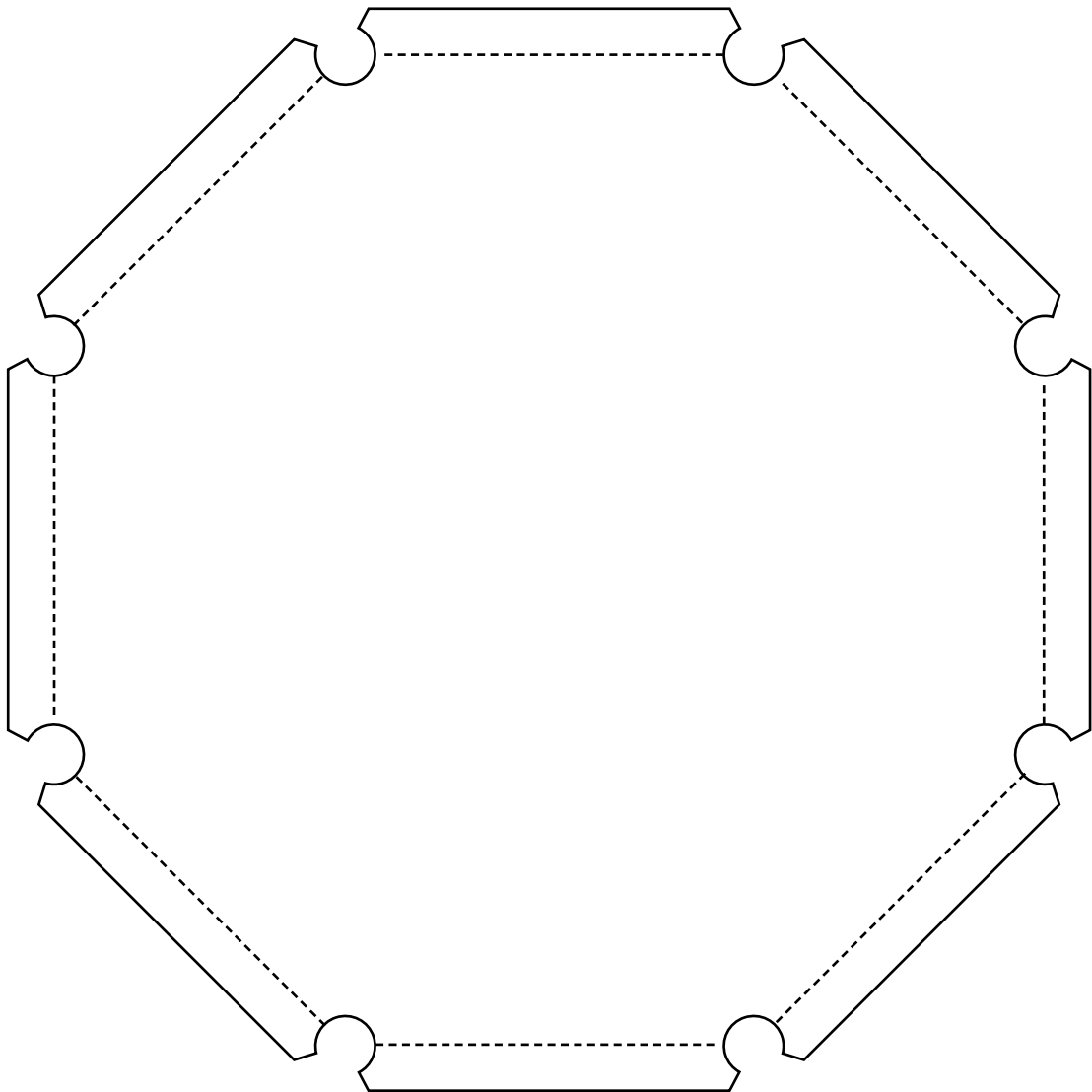
**2/2**

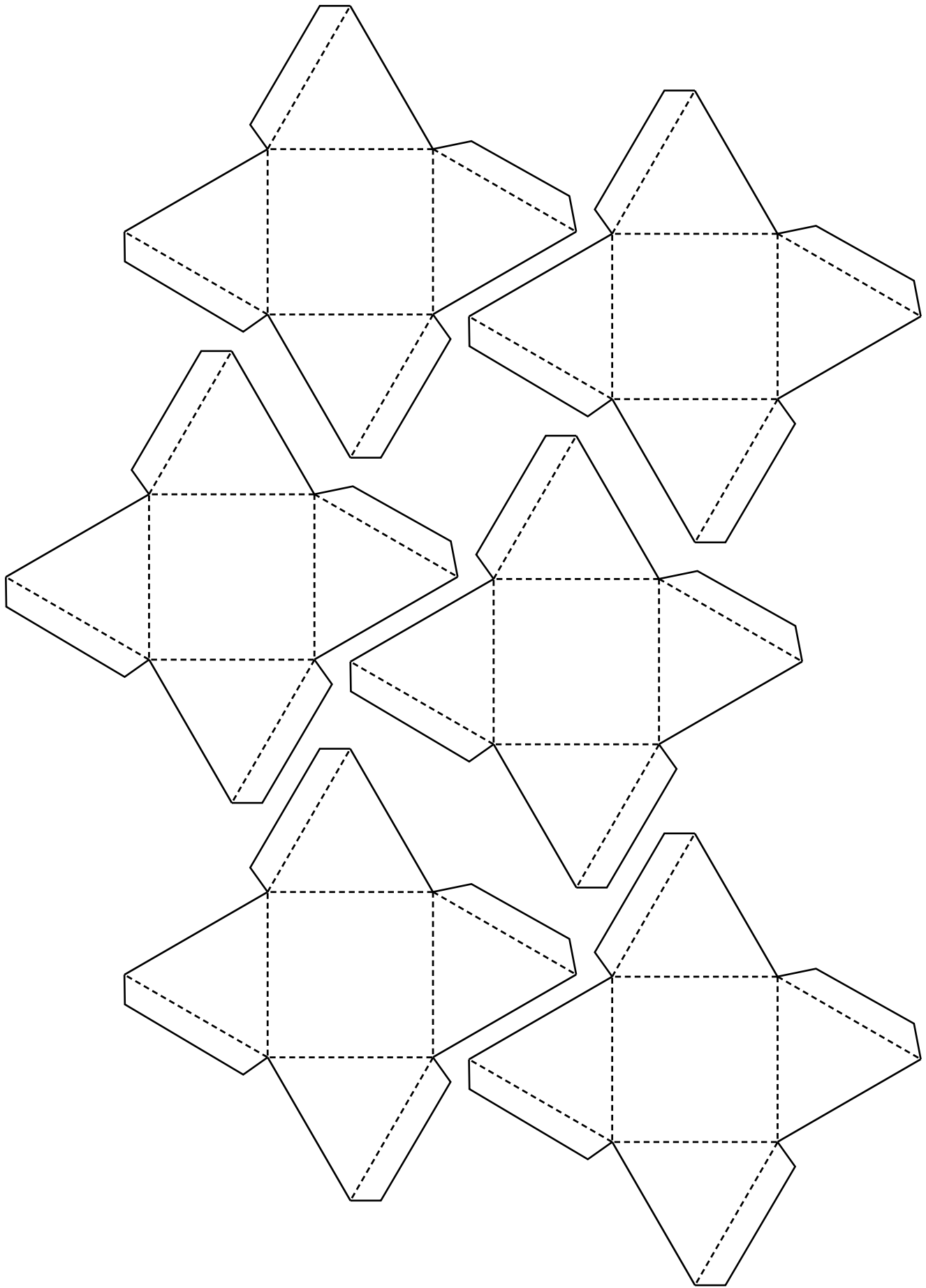


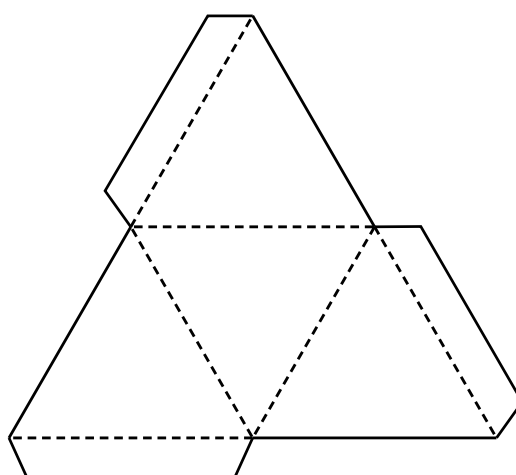
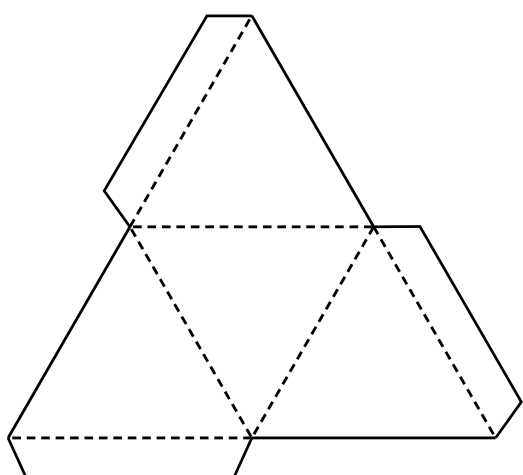
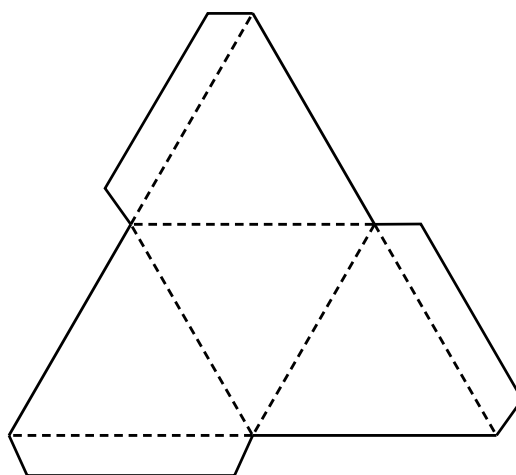
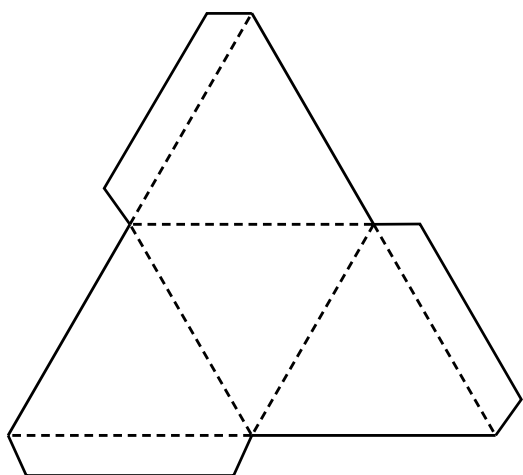
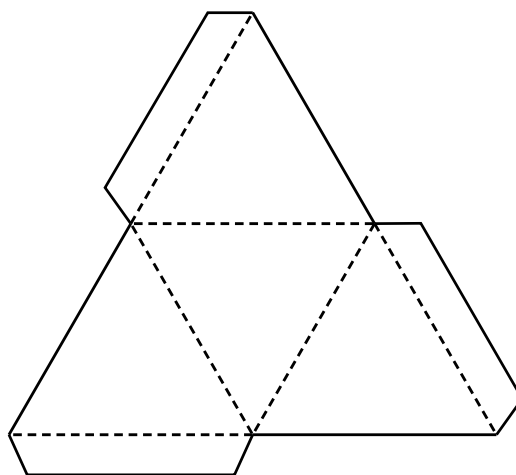
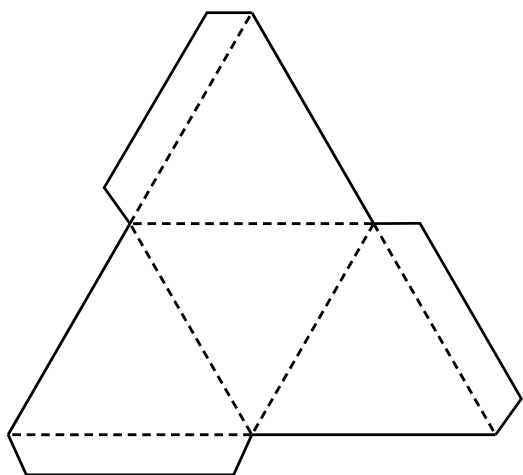














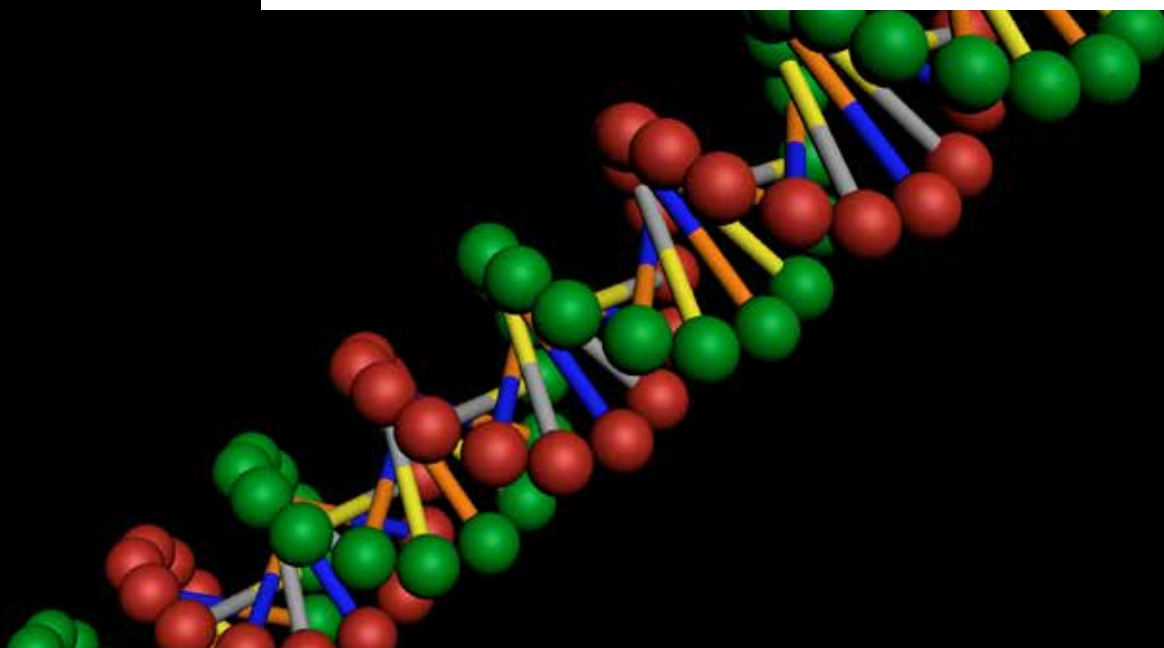
D'un seul trait



4 couleurs suffisent



Allo, c'est toi ?



D'un seul trait



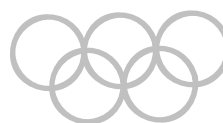
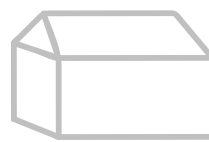
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Modèles de dessins, 1 crayon

57

Dessinez d'un trait...

Essayez de retracer ces figures sans lever le "crayon" et sans passer deux fois sur le même trait ? Quand cela est-il possible ? Impossible ?

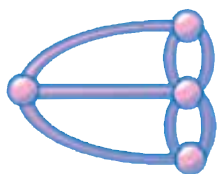


Que retenir ?

Königsberg*, 1736

Est-il possible de parcourir la ville en traversant chacun de ses sept ponts une fois et une seule ?

Pour résoudre ce problème, à l'origine de la théorie des graphes, **Euler** retient l'information essentielle : il y a quatre quartiers séparés par l'eau du fleuve, soit quatre "points" à relier par 7 traits qui symbolisent les ponts. Le problème devient : sur ce dessin existe-t-il un chemin passant une seule fois par chaque trait ? Ce fut l'amorce de la théorie des graphes. La réponse d'**Euler** : combien y a-t-il de points où aboutit un nombre impair de traits ? Il n'y a de solution que si ce nombre est égal à zéro ou à deux !



Question : Et si l'on rajoutait un pont reliant une rive à l'autre (comme c'est le cas aujourd'hui) ?

* aujourd'hui Kaliningrad (région russe séparée de la Russie par la Pologne et la Lituanie)

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 jeu de dominos sans les doubles

Dominos-Dominos

Essayez de faire une chaîne à l'aide de tous les dominos, en suivant la règle du jeu. Recommencez sans les dominos qui portent un 6. Puis sans ceux qui portent un 5... Est-ce toujours possible ? Pourquoi ?

Chaque domino représente l'arête d'un graphe à 7 sommets, numérotés de 0 à 6. Chaque chemin eulérien correspond à une chaîne de dominos.

Métiers des maths

La théorie des graphes est utilisée pour modéliser et étudier des situations très concrètes comme les réseaux de télécommunication, les circuits électroniques, les réseaux de distribution – eau, gaz, électricité, courriers... – et de nombreux problèmes de logistique, transport, production...

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Graphes - Théorie des graphes - Chemin eulérien - Euler

4 couleurs suffisent



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 carte géographique, 4 crayons ou feutres

58

Avec 4 couleurs seulement !!!

Un ou deux joueurs.

Essayez de colorier cette carte en utilisant le moins de couleurs possible.

Et pensez à la mer !

La règle du jeu : 2 pays voisins doivent être de couleurs différentes.

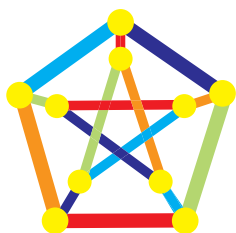
Perd celui qui ne peut plus jouer !



Que retenir ?

Le théorème des 4 couleurs

La théorie des graphes a permis de modéliser ce problème et de réduire le nombre de cas à étudier. Mais c'est grâce à l'ordinateur que l'on a pu analyser toutes les situations et de montrer qu'au plus 4 couleurs suffisent. Il est possible de trouver un algorithme de coloriage automatique avec 6 couleurs. Mais le problème n'a pas encore trouvé de solution avec 4 couleurs. C'est un problème "complexe" dont le temps de résolution par des algorithmes croît de façon exponentielle en fonction du nombre de "pays". Des algorithmes non-déterministes (comme les algorithmes génétiques) permettent de les résoudre plus rapidement.



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Des polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, pyramides...), des crayons ou feutres de 4 couleurs

59

60

61

62

63

Et dans l'espace ?

Construisez un polyèdre régulier (ou un autre) en respectant la règle des 4 couleurs : deux faces voisines par une arête doivent être de couleurs différentes.

De la même façon, construisez avec un polyèdre à un trou et essayez de le colorier !

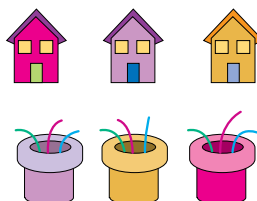


Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 dessin en plan et sur un tore

3 puits & 3 maisons

Dans chaque cas, essayez de relier ces trois puits et ces trois maisons par 3 réseaux de surface sans que les réseaux ne se croisent.



Question :

Et si l'on rajoute un 4^{ème} puits et une 4^{ème} maison ?

Question

Un loup, une chèvre et un chou se trouvent sur la rive droite d'un fleuve. Un passeur doit les transporter de l'autre côté du fleuve, mais il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois.

Aidez-le ! Attention !

Le loup mange la chèvre et la chèvre mange le chou !!

Métiers des maths

Ces algorithmes cherchent à résoudre des problèmes de regroupement d'objets respectant certaines règles. Ils trouvent des applications pratiques dans la mise en place de programmes de tâches (calendriers d'opérations, d'horaires, de travaux, d'examen...), de réseaux de téléphones mobiles, de réseaux de communication Internet, de transmissions sécurisées par le Web...

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Coloriage de graphes - Algorithmes - Algorithmes génétiques

Allo, c'est toi ?



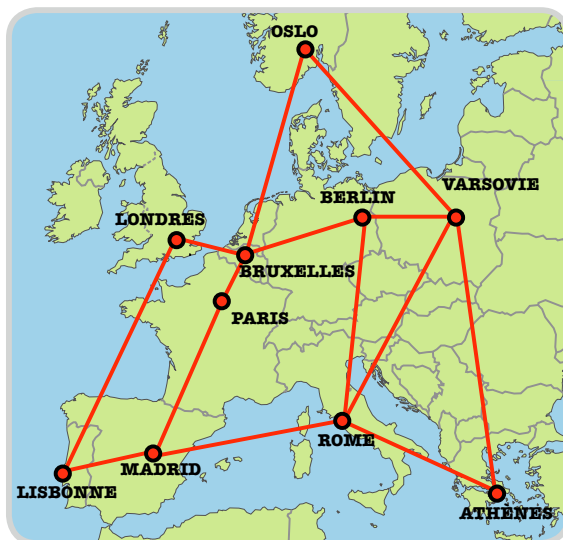
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 cartes, 1 crayon

64

Le voyageur de commerce

Un voyageur veut visiter dix villes en perdant le minimum de temps en transport. Il doit partir d'une ville et y revenir en passant une seule fois par toutes les autres. Aidez-le à faire son voyage.



Athènes

③ Berlin

④ ① Bruxelles

⑤ ④ ③ Lisbonne

④ ① ① ③ Londres

④ ③ ② ① ② Madrid

④ ① ② ⑤ ② ④ Oslo

③ ② ① ② ① ② ② Paris

① ② ② ④ ② ③ ③ Rome

③ ② ② ⑤ ② ④ ② ③ ② Varsovie

Que retenir ?

Les distances peuvent être mesurées en temps, en coûts de parcours, en débits d'électricité ou d'eau...

Ce type de problème, qui a un énoncé très simple, a des solutions d'autant plus longues à calculer que le nombre de villes est grand. Si avec 10 villes il faut 60 étapes de calcul, réalisées en une microseconde par un ordinateur, avec 100 villes, il faudrait 2^{60} étapes de calcul (2 multiplié par 2 soixante fois) réalisés en des centaines d'années par un ordinateur. Plus un algorithme est complexe, plus il demande de "temps-machine".

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Modèles de dessins, polyèdres à fabriquer ; 1 crayon, 1 ficelle

62

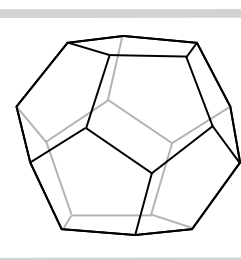
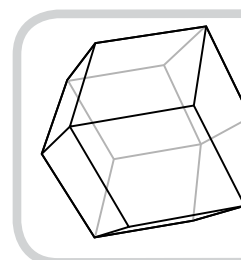
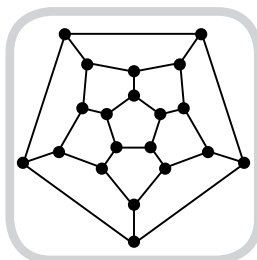
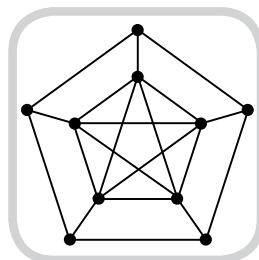
63

65

66

Le tour du monde

Choisissez une figure ou un polyèdre et essayez de trouver un chemin qui passe une fois et une seule par chacun des sommets.



Que retenir ?

Trouver un chemin hamiltonien, c'est trouver un chemin qui passe une fois et une seule par chaque sommet. Ce type de problème n'a pas encore trouvé de solution générale.

C'est un problème complexe. **Hamilton** a montré qu'il y a des solutions pour les vingt sommets d'un dodécaèdre régulier (fait de 12 pentagones). En est-il de même pour l'autre dodécaèdre (fait de 12 losanges) ?

Allo, c'est toi ?

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Un échiquier et des pièces à découper, 1 paire de ciseaux

67

68

Echec aux dames

- Essayez de placer huit dames sur un échiquier sans qu'aucune d'elles puisse en prendre une autre.
- Essayez de déplacer un roi de case en case pour parcourir une seule fois toutes les cases (sans faire de diagonale).
- Essayez de déplacer un cavalier sur un échiquier en passant sur chacune des cases une fois et une seule ?

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 crayon

Du coq à l'ane

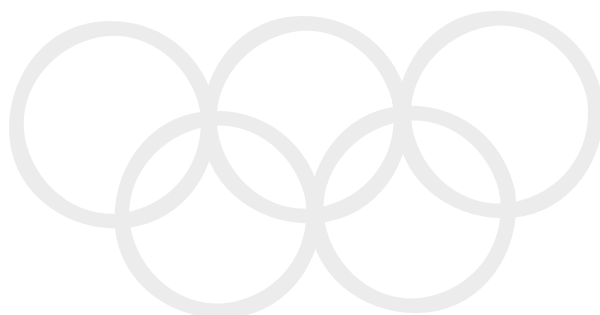
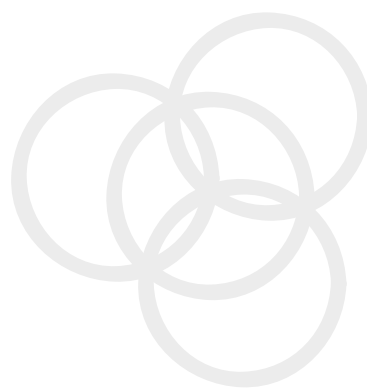
Passez du mot COQ au mot ANE en changeant une seule lettre à la fois dans le mot (coq, col, sol, sel... ane !) et en allant au plus vite !
Et de EAU à VIN ?

Métiers des maths

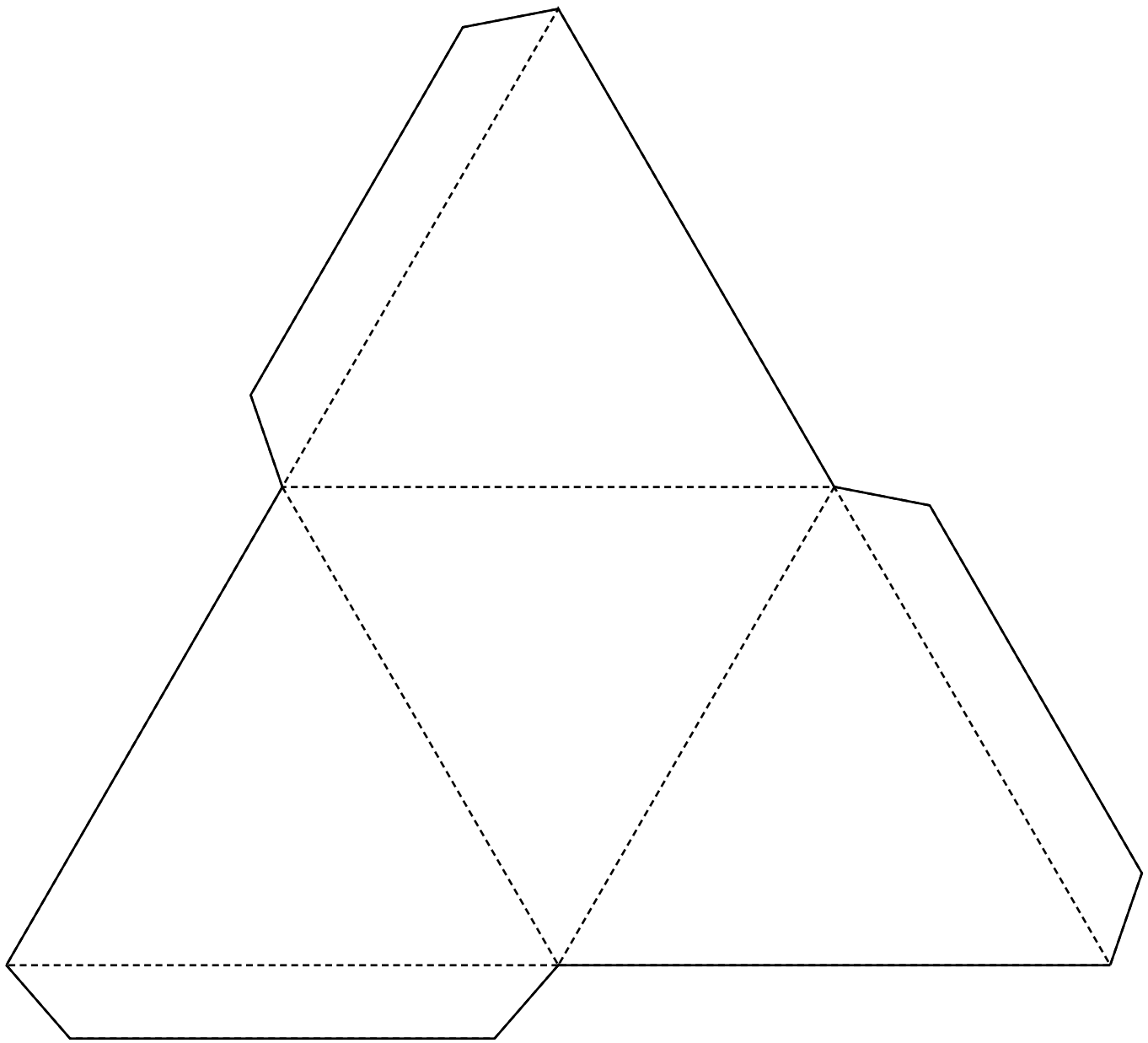
De nombreuses recherches sont faites par les mathématiciens, les informaticiens, les généticiens pour trouver des algorithmes efficaces qui peuvent résoudre ces problèmes complexes... comme l'étude du séquençage des 30.000 à 100.000 bases (A-T C-G) d'une molécule d'ADN.

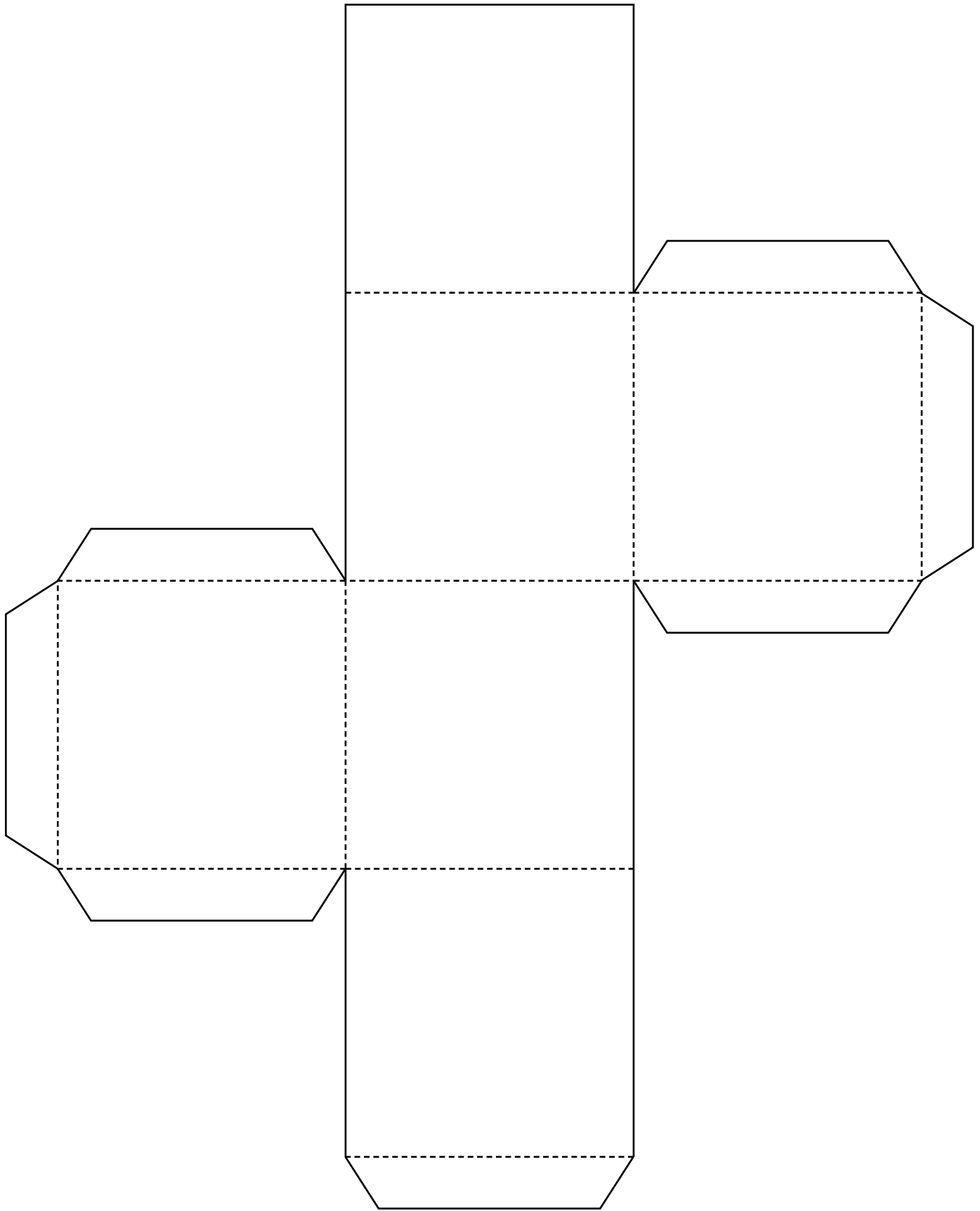
MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

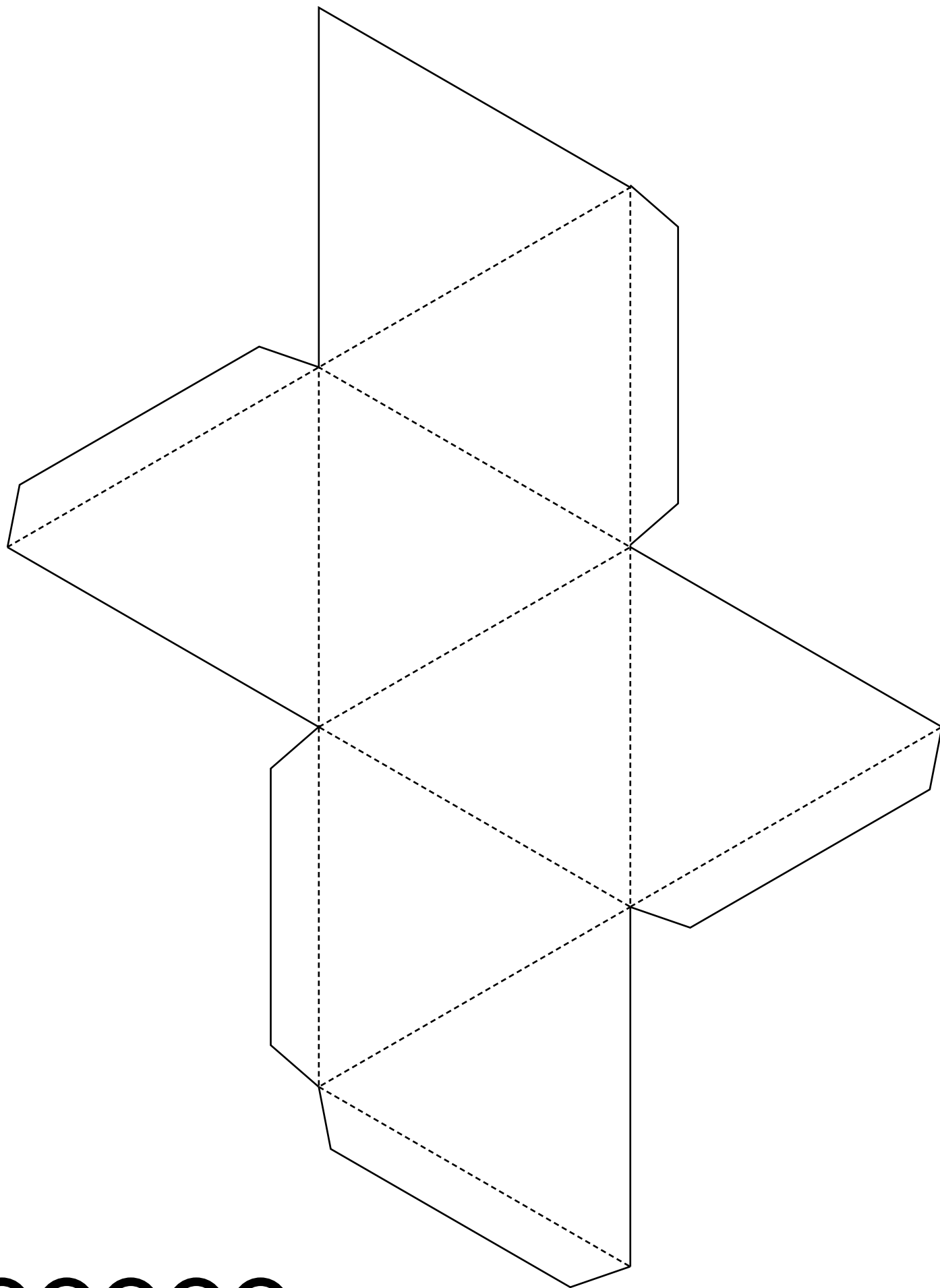
Graphes - Chemin hamiltonien - Voyageur de commerce - Optimisation

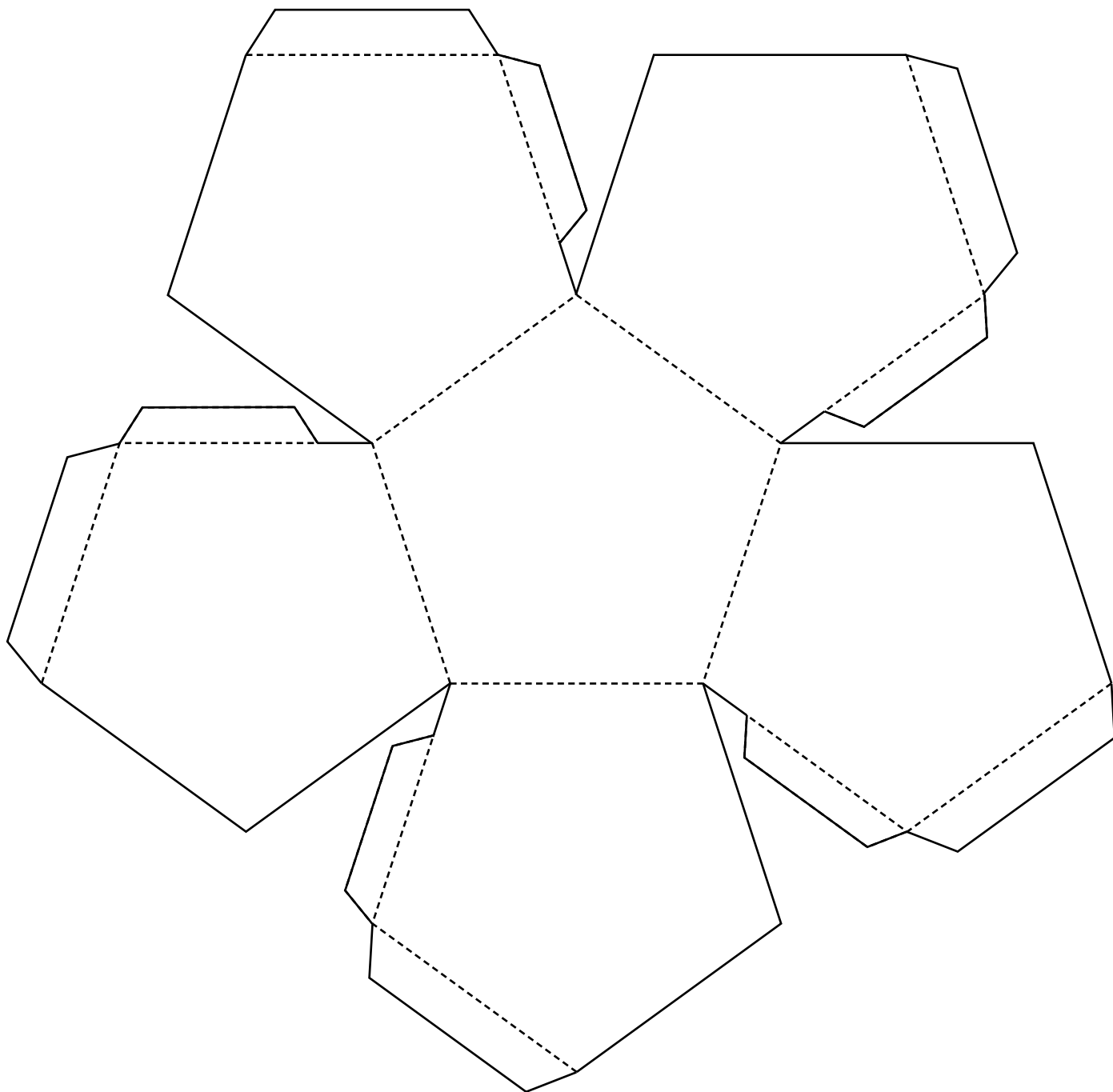


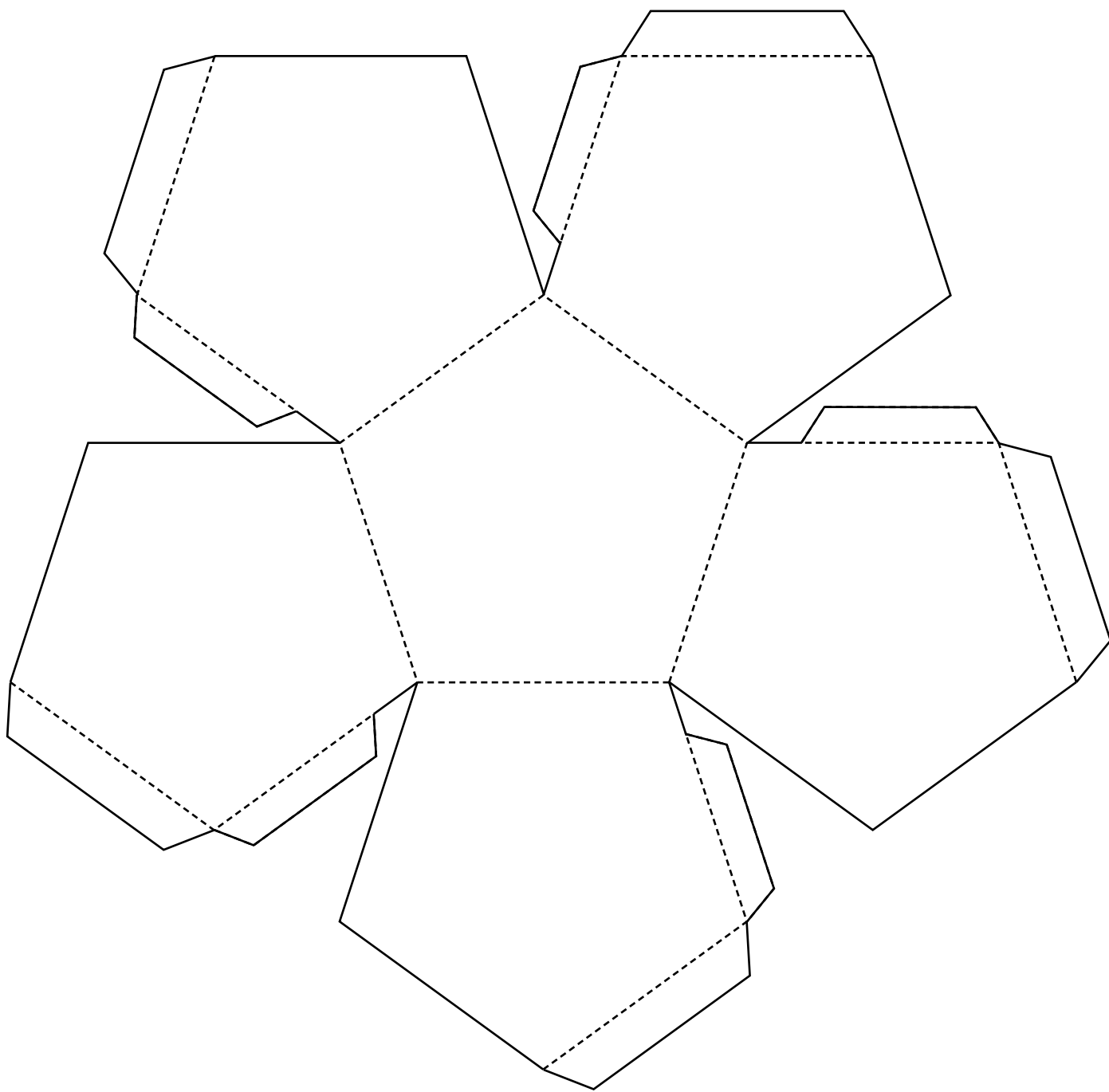








**1/2**

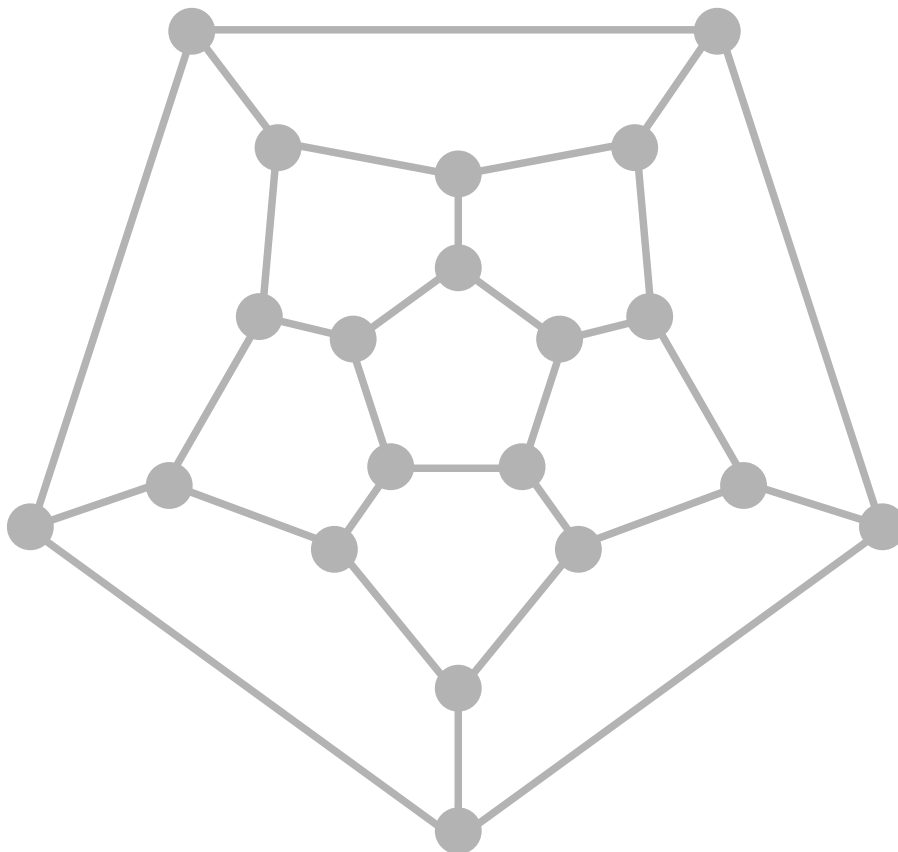
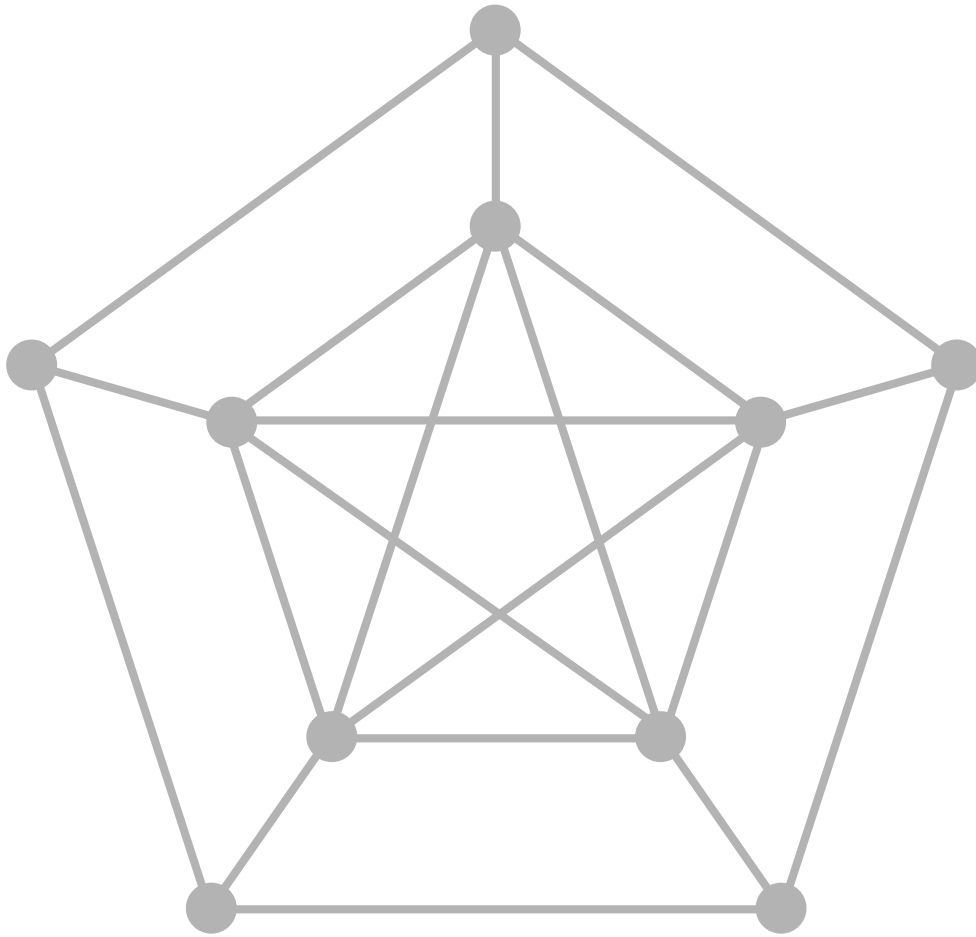
**2/2**

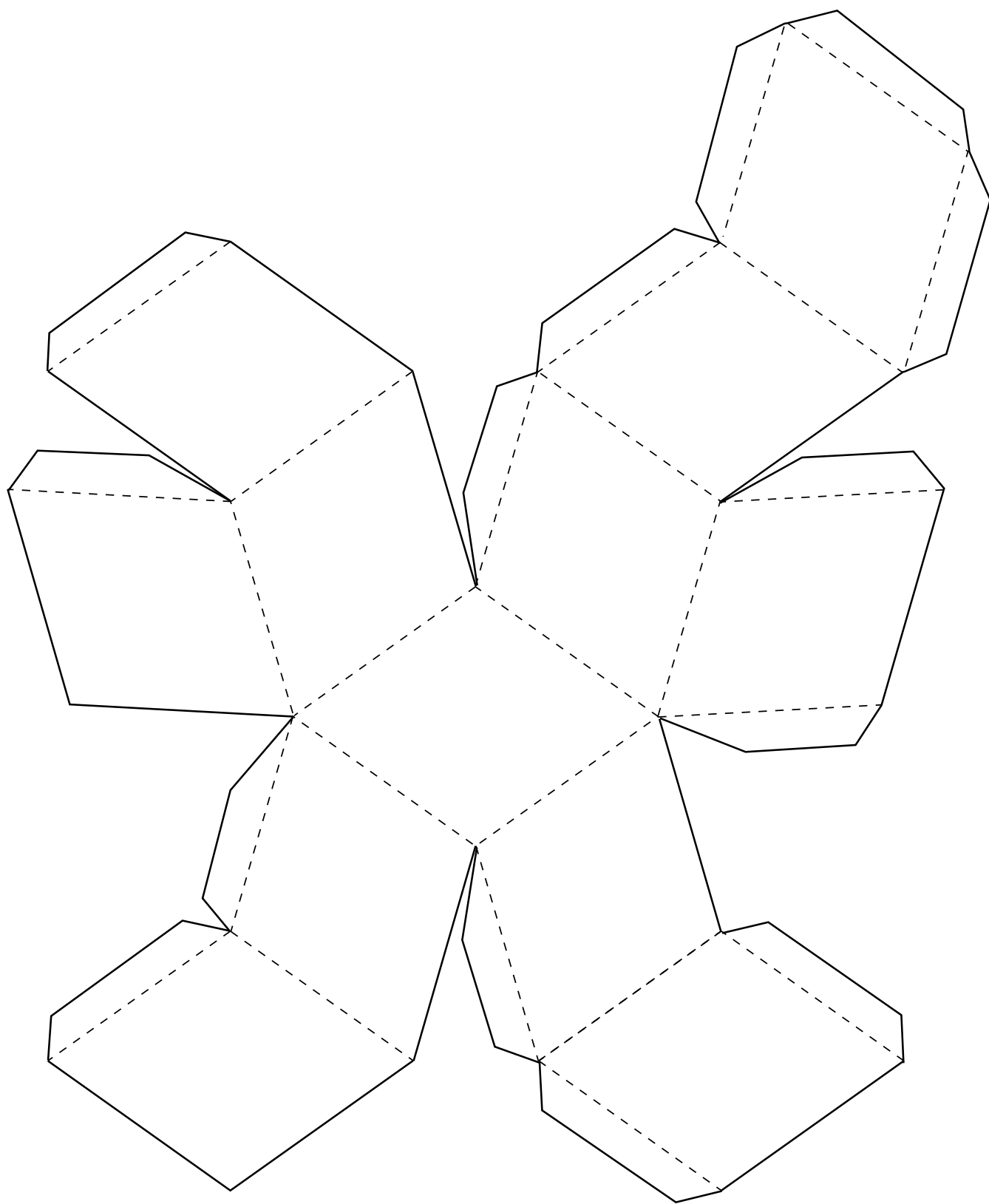


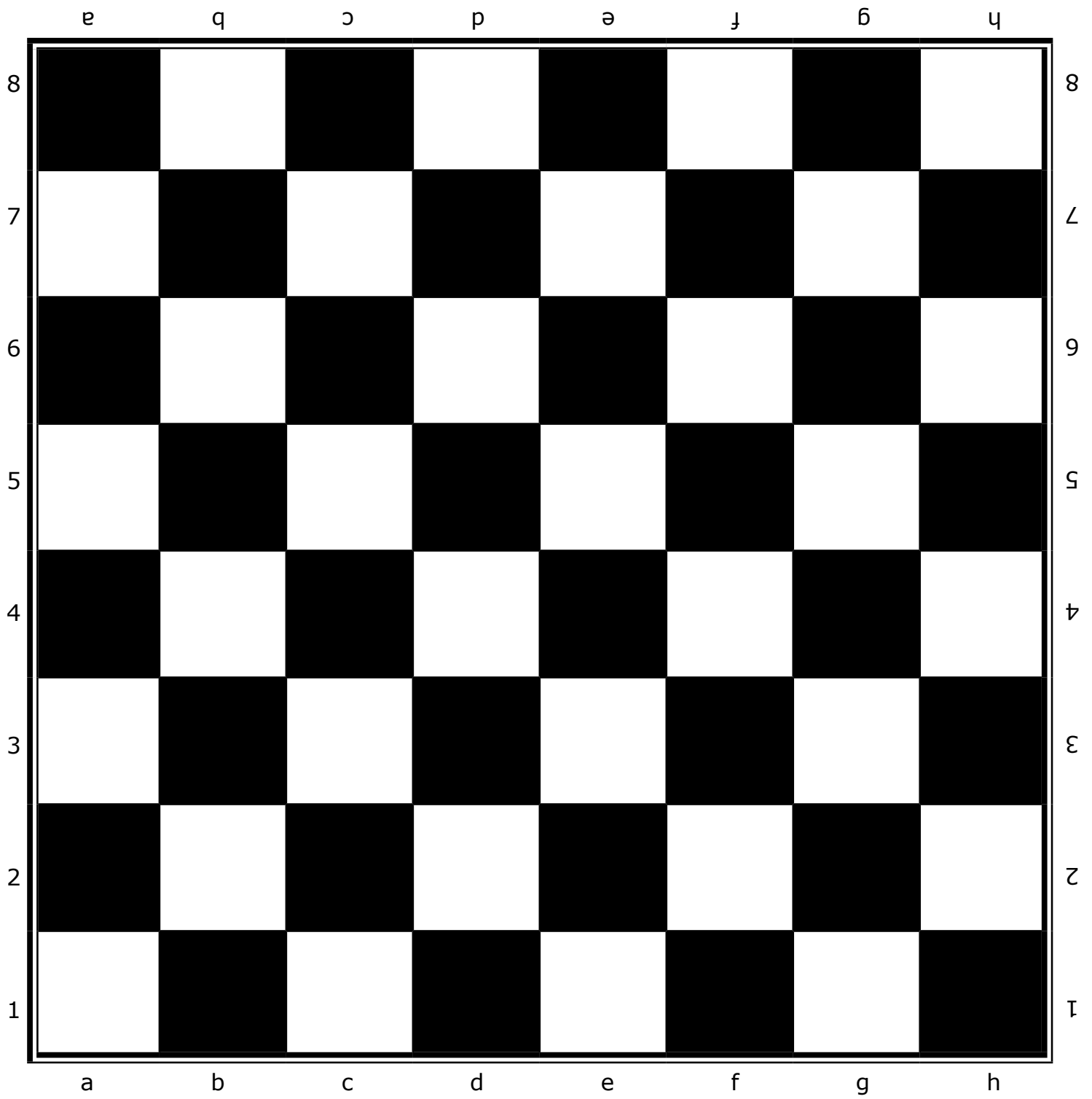
Athènes

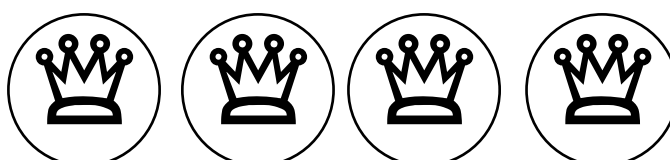
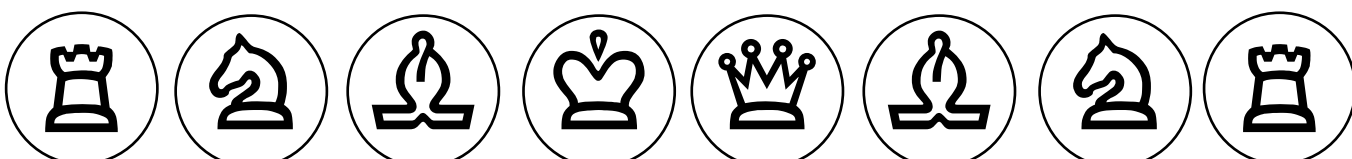
3	Berlin								
4	1	Bruxelles							
5	4	3	Lisbonne						
4	1	1	3	Londres					
4	3	2	1	2	Madrid				
4	1	2	5	2	4	Oslo			
3	2	1	2	1	2	2	Paris		
1	2	2	4	2	3	3	2	Rome	
3	2	2	5	2	4	2	3	2	Varsovie

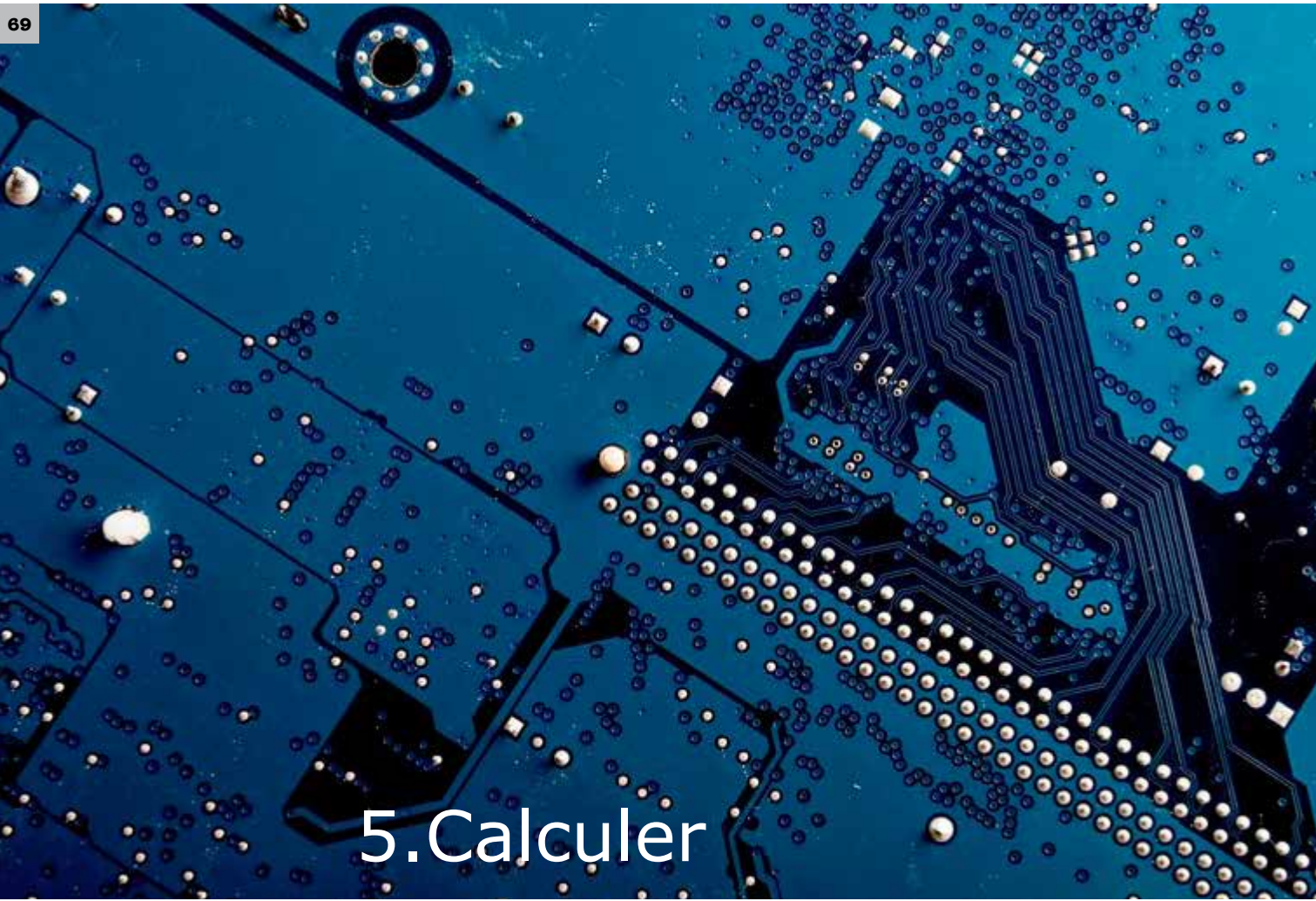












5. Calculer



Avec la tête et les mains



Nombres premiers



Images numériques



Avec la tête et les mains



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Les dix doigts des deux mains !!!

Comptez sur vos doigts !

 $9 \times 1 \dots 9 \times 2 \dots 9 \times 3 \dots \mathbf{9 \times 4 =}$

Les deux mains ouvertes face à soi, on compte sur ses doigts jusqu'à 4, en partant de la main gauche, et on baisse le 4^{ème} doigt.

- On lit : **3** doigts levés à gauche pour les dizaines et **6** à droite pour les unités, soit **36**

 $\text{Deux nombres entre 5 et 10 } \mathbf{6 \times 8 =}$

On compte jusqu'à 6 avec la main gauche. 1 doigt reste levé.

On compte jusqu'à 8 avec la main droite. 3 doigts restent levés.

- Résultat : **3+1** qui font **4** dizaines et **4x2** pour les doigts restés baissés qui font **8** unités soit **48**

 $\text{Deux nombres entre 10 et 15 } \mathbf{13 \times 14 =}$

On compte jusqu'à 13 avec la main gauche. 3 doigts restent levés.

On compte jusqu'à 14 avec la main droite. 4 doigts restent levés.

- Résultat : **3+4** qui font **7** dizaines et **3x4** pour les unités soit **100+70+12=182**

 $\text{Deux nombres entre 15 et 20 } \mathbf{17 \times 19 =}$

On compte jusqu'à 17 avec la main gauche. 2 doigts restent levés.

On compte jusqu'à 19 avec la main droite. 4 doigts restent levés.

Soit : **2+4** qui font **6** quinzaines et **2x4** pour les unités, soit **90+8=98**

- Résultat : **15x15 + 98 = 225 + 98 = 323**

Que retenir ?

Apprendre à compter, c'est commencer par apprendre ses tables d'addition et de multiplication jusqu'à 10. Mais il suffit de les apprendre jusqu'à 5 et, après, de savoir compter sur ses doigts !

Ainsi pour $(5+a) \times (5+b)$:

Pour les dizaines, quand j'ajoute les doigts levés, je calcule $10 \times (a+b)$.

Pour les unités, quand je multiplie les doigts baissés,

je calcule $(5-a) \times (5-b) = 25 - 5(a+b) + ab$.

Vérifiez que l'on a bien $(5+a) \times (5+b)$.

Vérifiez de même pour les autres multiplications.

Pour utiliser ces techniques, il suffit de connaître les carrés de 10, 15... Essayez cette technique avec des nombres entre 20 et 25...

Avec la tête et les mains



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier et crayon ou ardoise, craie et chiffon

Calcul mental - Calcul rapide

Additions, soustractions

Faites faire des additions et soustractions de nombres entiers de 2 chiffres, de 3 chiffres..., en écrivant les deux nombres, en les énonçant ou en écrivant l'un et en énonçant l'autre. Faites décrire et analyser par les élèves les différentes techniques de calcul utilisées.

38+5
28+18
128+58
289+135...

27-18
66-19
151-28
197-19...

Qui sommes-nous ?

- Notre somme est 25, notre différence 1.
- Nous sommes trois nombres consécutifs et notre somme est 48.
- La somme de mes deux chiffres est 12 et leur produit 14.

L'algorithme de Kaprekar (mathématicien indien - 1949)

Prenez un nombre entier, 5294 par exemple, et opérez comme suit :

K(5294) = 9542 - 2459 = 7083
K(7083) = 8730 - 378 = 8352
K(8352) = 8532 - 2358 = 6174
Et K(6174) = !!!

Faites faire ces calculs avec d'autres nombres et faites faire des hypothèses sur les différents cas possibles.

Multiplications, divisions

- En premier, faites apprendre par cœur les carrés de 11, 12, 13, 15, 20, 25.
- Faites faire des multiplications et des divisions par 5, par 9, par 11, par 12, 13, 15, 19, 25, 50, 100.
- Calculez 46x96 et 64x69. Étrange n'est-ce pas. Trouvez-en d'autres.
- Calculez 23x9 et 78x9. On dit que 23 et 78 sont associés. Trouvez-en d'autres !

Étonnantes multiplications !

Calculez, continuez et trouvez-en d'autres !

1 x 8 + 1 = ...	9 x 9 + 2 = ...
12 x 8 + 2 = ...	98 x 9 + 6 = ...
= ...?	= ...?
1 x 9 + 2 = ...	1 x 1 = ...
12 x 9 + 3 = ...	11 x 11 = ...
= ...?	= ...?

La conjecture de Syracuse

- Prenez un nombre entier N et opérez comme suit :
- Si N est pair, divisez-le par 2.
- S'il est impair, multipliez-le par 3 et ajoutez 1.
- Recommencez ce calcul sur le résultat...

Par exemple :

20 -> 10 -> 5 -> 16 -> 8 -> 4 -> 2 -> 1 -> 4 -> 2 -> 1...

Faites faire ces calculs avec d'autres nombres et faites faire des hypothèses sur les différents comportements possibles de ces suites. (On parle d'altitude pour le plus grand nombre atteint dans la suite, de durée de vol pour la longueur de la suite avant qu'elle ne repasse sous le nombre de départ...). Cet algorithme, créé par **Collatz** et **Hasse** (mathématiciens allemands - 1932) a débouché sur une conjecture, dites de Syracuse, non encore démontrée.

Avec la tête et les mains



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier et crayon

Calculs et algorithmes

Diviser pour multiplier **57 x 86 = ?**La multiplication
à la Russe

$$\begin{array}{r}
 57 \quad 86 \\
 \hline
 28 \quad 172 \\
 \hline
 14 \quad 344 \\
 \hline
 7 \quad 688 \\
 3 \quad 1376 \\
 1 \quad 2752 \\
 \hline
 4902
 \end{array}$$

La multiplication
per gelosia

$$\begin{array}{c}
 \times \quad \begin{array}{cc} 8 & 6 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} 6 \\ 5 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cc} = & \begin{array}{cc} 4 & 9 \end{array}
 \end{array}$$

Ou encore, proche de
la technique classique :

$$\begin{array}{r}
 57 \\
 \times 86 \\
 \hline
 3042 \\
 + 4056 \\
 \hline
 = 4902
 \end{array}$$

En savoir plus

Avec les ordinateurs, pour ne pas avoir à poser des lignes de produits à additionner et éviter les problèmes de retenues... (à retenir !) d'autres techniques de calculs rapides sont utilisées. C'est le domaine de l'algorithmique. Ainsi en est-il de l'algorithme du russe **Anatolii Karatsuba** (1962) :

Soit à calculer **1234 x 5678**

On coupe chaque nombre en paquets de 2 chiffres pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 1234 \times 5678 &= (12 \times 10^2 + 34) \times (56 \times 10^2 + 78) \\
 &= 12 \times 56 \times 10^4 + [(12 + 34) \times (56 + 78) - 12 \times 56 - 34 \times 78] \times 10^2 + 34 \times 78 \\
 &= 672 \times 10^4 + [46 \times 134 - 672 - 2652] \times 10^2 + 2652 \\
 &= 672 \times 10^4 + [6164 - 672 - 2652] \times 10^2 + 2652 \\
 &= 6720000 + 284000 + 2652 \\
 &= 7006652
 \end{aligned}$$

Il a suffit de faire 3 multiplications de nombres 2 fois plus petits et quelques additions de plus mais très simples. A la base de cet algorithme, on trouve les relations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}
 (ax + b)^2 &= a^2x^2 + [(a+b)^2 - a^2 - b^2]x + b^2 \\
 (ax + b)(cx + d) &= acx^2 + [(a+b)(c+d) - ac - bd]x + bd \\
 \text{et : } 4ab &= (a+b)^2 - (a-b)^2
 \end{aligned}$$

Avec la tête et les mains



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier et Crayon

Calcul rapide et proportionnalité

Comment calculer rapidement :

- En 6 h une climatisation consomme 7 kW. Combien consomme-t-elle en 18 h ?
 En 9 h une climatisation consomme 18 kW. Combien consomme-t-elle en 108 h ?
 En 32 h une climatisation consomme 27 kW. Combien consomme-t-elle en 8 h ?
 En 21 h une climatisation consomme 17 kW. Combien consomme-t-elle en 90 h ?

La double proportionnalité

Complétez des tableaux du type :

Consommation de pommes de terre dans une école (en kg)

		NOMBRE DE JOURS			
		1	20	40	100
NOMBRE D'ÉLÈVES	1	0,1	2		
	5	0,5		20	
	10	1		40	
			30		150
	20	2		80	

Calcul d'aire d'un rectangle (en cm^2)

		LARGEUR					
		1	4	5	6	10	12
LONGUEUR	1	1					12
	2	2		10		20	
	3						
			16				
	5	5			30		

Calcul d'aire d'un triangle (en cm^2)

		HAUTEUR				
		1	3	5	8	15
BASE	1	0,5	1,5	2,5	4	
	2,5		3,75			
	3					
	5		7,5	12,5		37,5

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 6 pièces de puzzle, 2 par groupes d'élèves, papier quadrillé, papier, crayon, ciseaux

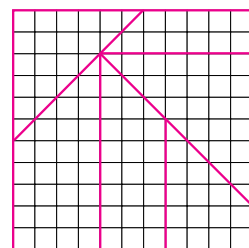
78

79

Calcul et géométrie

Puzzles à agrandir

Avec ces 6 pièces reconstituez un carré. Puis fabriquez le même puzzle en plus grand en respectant la règle suivante : les trapèzes dont la hauteur mesure 4 cm doivent être agrandis pour avoir une hauteur de 7 cm. Lorsque vous aurez fini, vous devrez pouvoir reconstituer un grand carré avec les 6 pièces agrandies.



Pour aller plus loin

Thalès et la proportionnalité

Photos de vacances

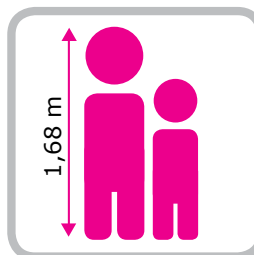
Papa et mes deux frères



Mon petit frère et moi



Ma mère et ma sœur



Mon père et ma sœur



Quelle est ma taille ?

Avec la tête et les mains



Que retenir ?

La proportionnalité est un axe essentiel de l'apprentissage des mathématiques et des autres sciences. C'est aussi un outil très présent dans la vie quotidienne. Elle permet d'introduire la multiplication et la division à l'école. Elle est surtout essentielle pour comprendre les relations entre grandeurs munies d'une unité de mesure, en physique et dans les autres sciences.

Les propriétés utilisées sont :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(a.x) = a.f(x)$$

$$f(a.x + b.y) = a.f(x) + b.f(y)$$

Deux fonctions mathématiques sont en action dans ces calculs :

La fonction « scalaire » :

$$\begin{array}{cc} 6 \text{ (h)} & 7 \text{ (kW)} \\ 18 \text{ (h)} & ?? \text{ (kW)} \end{array}$$

La fonction « aux dimensions » :

$$\begin{array}{cc} 9 \text{ (h)} & 18 \text{ (kW)} \\ 108 \text{ (h)} & ?? \text{ (kW)} \end{array}$$

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier, Crayon

Calculs approchés

Ordre de grandeur

Faites estimer l'ordre de grandeur de calculs (vérifiés ensuite avec ou sans calculatrice).

Ainsi, le résultat de chacun de ces calculs est-il compris entre 0 et 1, entre 0 et 0,1, entre 0 et 0,01, entre 1 et 2, entre 1 et 10 ?

$$\begin{aligned} 125 \div 28 &= 0,4464 \text{ ou } 4,4643 \text{ ou } 44,6428 \text{ ou } ??? \\ 28 \div 1275 &= 0,0022 \text{ ou } 0,0220 \text{ ou } 0,2196 \text{ ou } ??? \\ 357 \div 176 &= 0,203 \text{ ou } 2,028 \text{ ou } 20,284 \text{ ou } ??? \\ 41,84 \times 2,25 &= 9,414 \text{ ou } 94,14 \text{ ou } 941,9 \text{ ou } ??? \\ 1/(1+\sqrt{2}) &= 0,414 \text{ ou } 2,142 \text{ ou } 4,142 \text{ ou } 21,421 \text{ ou } ??? \end{aligned}$$

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier, crayon ou calculatrice ou ordinateur

Notre ordinateur nous trompe !

Choisissez un nombre compris entre 0 et 1. Multipliez-le par 2.

- Si le résultat est inférieur à 1, multipliez-le à nouveau par 2.
 - Sinon, soustraire 1 et multiplier le résultat par 2.
- Et recommencez ce calcul 60 fois. Refaites les mêmes calculs avec un nombre très voisin. Que constatez-vous ?
- Choisissez un nombre encore plus voisin et recommencez les calculs.
 - Essayez aussi avec des nombres tels que $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-1$ ou $\pi-3$ et des nombres décimaux très voisins.

Exemple

0,3	0,305
0,6	0,61
0,2	0,22
0,4	0,44
0,8	0,88
0,6	0,76
0,2	0,52
0,4	0,04
0,8	0,08
...	...

Pour compter, nous utilisons les nombres entiers et les décimaux. Sur le marché, il vaut mieux savoir faire un rapide calcul mental ou approché même si l'on a une calculatrice.. L'ordinateur, lui, n'utilise que des nombres décimaux avec seulement quelques dizaines de décimales. Les lois mathématiques n'y sont plus respectées et conduisent souvent à des erreurs.

Métiers des maths

Certaines de ces techniques de calcul peuvent être utilisées dans la vie de tous les jours.

D'autres sont recherchées par les mathématiciens et les informaticiens pour permettre aux ordinateurs de calculer toujours plus vite et plus loin ou de vérifier très vite l'exactitude des codes des cartes bancaires !

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Calcul - Calcul rapide - Calcul mental - Calcul approché - Algorithmes de calcul



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 3 grilles des nombres entiers sur 6, 20 puis 30 colonnes, crayon, gomme

80

81

37	2	3	4	5	6	31
8	17	9	10	11	12	13
14	15	5	16	3	18	29
19	7	20	21	22	11	24
41	25	26	27	28	30	27
33	34	35	23	36	37	38
43	39	40	42	47	48	49

Sur la piste des nombres premiers !

Est premier tout nombre entier autre que 1 qui n'est divisible que par 1 et lui-même.

Pour chaque tableau :

- barrez 1 puis mettez en gras le premier nombre non barré soit 2,
- barrez tous les multiples de 2 (après 2),
- mettez en gras le suivant non barré, soit 3 qui est premier,
- et recommencez jusqu'à ne plus avoir de nombres à barrer.

Observez, suivant le tableau utilisé, les propriétés de cette technique.

A partir de quel nombre premier vous êtes-vous arrêté ? Que pouvez-vous en conclure ?

Cette technique appelée **crible d'Ératosthène**, permet de faire apparaître tous les nombres premiers de la liste

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 3 dés

Jouez au 421

Jetez les 3 dés.

Inscrivez les 3 chiffres au tableau.

Gagne celui qui, avec ces trois chiffres, construit le plus grand nombre premier.

Chaque élève peut dire pourquoi tel ou tel nombre proposé n'est pas premier.



Que retenir ?

Critères de divisibilité par ...

- un nombre entier est divisible par 2 si le dernier chiffre est un multiple de 2,
- divisible par 4 si ... par 8 si ...
- divisible par 3 si ... (de même par 9). Pourquoi ?
- divisible par 5 si ...
- divisible par 11 si ...
- et par 7 ? et par 13 ?

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Une liste de nombres premiers

La grande famille des nombres premiers

Dans la famille des nombres premiers :

- Trouvez des jumeaux (c'est-à-dire des nombres premiers qui diffèrent de 2) comme 3 et 5, 5 et 7... On conjecture qu'il y en a une infinité. Et des triplets ?
- Trouvez des cousins (qui diffèrent de 4). Il y en aurait autant que de nombres jumeaux !
- Trouvez des sexy (qui diffèrent de... 6) !
- Vérifiez que le produit des premiers nombres premiers augmenté de 1 est premier. Ceci permet de prouver qu'il y a un nombre infini de nombres premiers. Mais plus ils sont grands plus ils sont rares.
- Vérifiez que tout nombre pair (inférieur à 100 par exemple) peut s'écrire comme somme de 2 nombres premiers (c'est la **conjecture de Goldbach** qui fera gagner une très grosse somme d'argent à qui la démontrera !).

Nombres premiers



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier, crayon

La grande famille des nombres entiers

- Ecrivez 10101, 1001, 101, 11, comme produits de nombres premiers.
Faites de même avec 304, 305, 403, 404, 504, 604... Tout nombre entier se décompose de manière unique en produit de nombres premiers.
- En dehors de la famille des nombres premiers, trouvez des nombres qui sont parfaits (qui sont égaux à la somme de leurs diviseurs comme $6 = 3 + 2 + 1$).
Remarquez que $1/6 + 1/3 + 1/2 = 1$ et qu'il en est de même pour les autres nombres parfaits trouvés.
- Trouvez des nombres entiers produits de deux nombres premiers différents.
Gagne celui qui trouve le plus grand !

Les codes secrets utilisés aujourd'hui sont basés sur des nombres qui sont le produit de deux nombres premiers très grands. Les trouver dépasse le temps de calcul des ordinateurs les plus puissants.

- Trouvez le PGCD et le PPCM (plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple) de 28 et 70, de 330 et 900, de 276 et 483, ...
- Vérifiez sur ces exemples que $\text{PGCD}(a,b) \times \text{PPCM}(a,b) = ab$.

Métiers des maths

Les travaux de recherche sur les nombres premiers et leurs relations avec l'informatique sont nombreux et nombreuses sont les questions qui restent à résoudre.

La sécurité des réseaux informatiques et de communication est étroitement liée aux nombres premiers (cryptographie, codes correcteurs d'erreurs, algorithmique, etc.).

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Nombres premiers - Critères de divisibilité - Eratosthène - Algorithme d'Euclide
Cryptographie - Codes secrets à clé publique



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier, crayon

1 + 1 = 10 !!!

En base 2, les nombres entiers s'écrivent en n'utilisant que 0 et 1 :

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110...

Calculez en base 2, en posant l'addition : 101 + 11, 101 + 101, 111 + 111...

Puis : 101 x 11, 101 x 101, 111 x 111

$$\begin{array}{r}
 11 \\
 + 11 \\
 \hline
 110
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 11 \\
 \times 11 \\
 \hline
 11 \\
 110 \\
 \hline
 1101
 \end{array}$$

Que retenir ?

Après avoir compté avec des cailloux (d'où le mot calcul), les hommes ont inventé le système de base 10.

Ainsi, dire qu'il y a 549 moutons signifie qu'il y en a en fait $5 \times 10^2 + 4 \times 10 + 9$. Ce mode utilise dix symboles – les chiffres – et tient compte de la position de chaque chiffre (de droite à gauche). Grâce à la logique mathématique, le système de numération en base 2 permet aujourd'hui de représenter des situations où il n'y a que deux états : vrai ou faux, oui ou non, le courant passe ou ne passe pas, l'aimant est aimanté ou ne l'est, la lumière est beaucoup réfléchie ou ne l'est pas beaucoup.

Le numérique qui envahit notre quotidien parvient à reproduire la réalité avec une qualité toujours croissante. Il compense l'aspect élémentaire du système binaire, par la quantité d'information élevée qu'il peut traiter rapidement.

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 3 images numérisées

72 dpi ou 300 dpi ?

Ces 3 images ont les mêmes dimensions : 7 x 4,35 cm.

• Combien de carrés unités (on dit pixels) comportent-elles (largeur x hauteur) ? C'est la taille de l'image en pixels. L'image 1 a une résolution de 75 dpi (dot per inch ou point par pouce), la 2 : 150 dpi et la 3 : 300 dpi.

• Comment varie le nombre de carrés en fonction de la résolution ?



image 1



image 2



image 3

Le poids des photos

Comment varie le poids des images ? Complétez le tableau.

Une même image numérisée en 75 dpi est ici présentée en 75, 150 et 300 dpi.

La 1^{ère} résolution, suffisante pour un écran, produit une image imprimée pixélisée.

La seconde est suffisante pour les tablettes et les smartphones actuels.

La 3^{ème}, 4 fois plus fine, permet d'obtenir une impression photographique nette et lissée.

Taille de l'image		Résolution en dpi	Poids en K octets
pouces	cm		
3,74x2,39	8,74x5,39	75	125 Ko
		100	?
		150	?
		300	?
1,90x1,18	4,45x2,75	75	?
		100	?
		150	125 Ko
		300	?
0,94x0,59	2,20x1,39	75	?
		100	?
		150	?
		300	125 Ko

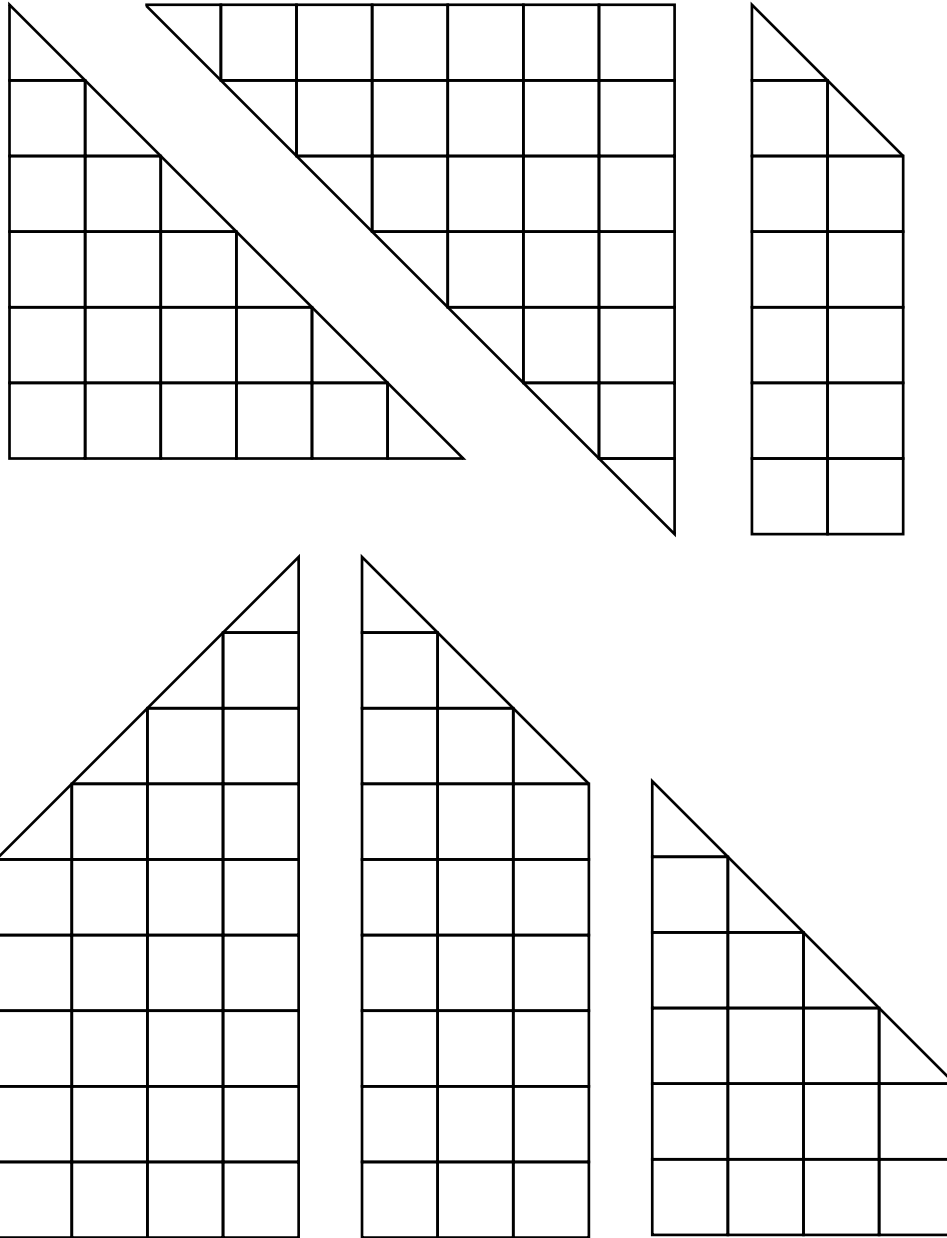
Que retenir ?

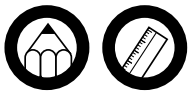
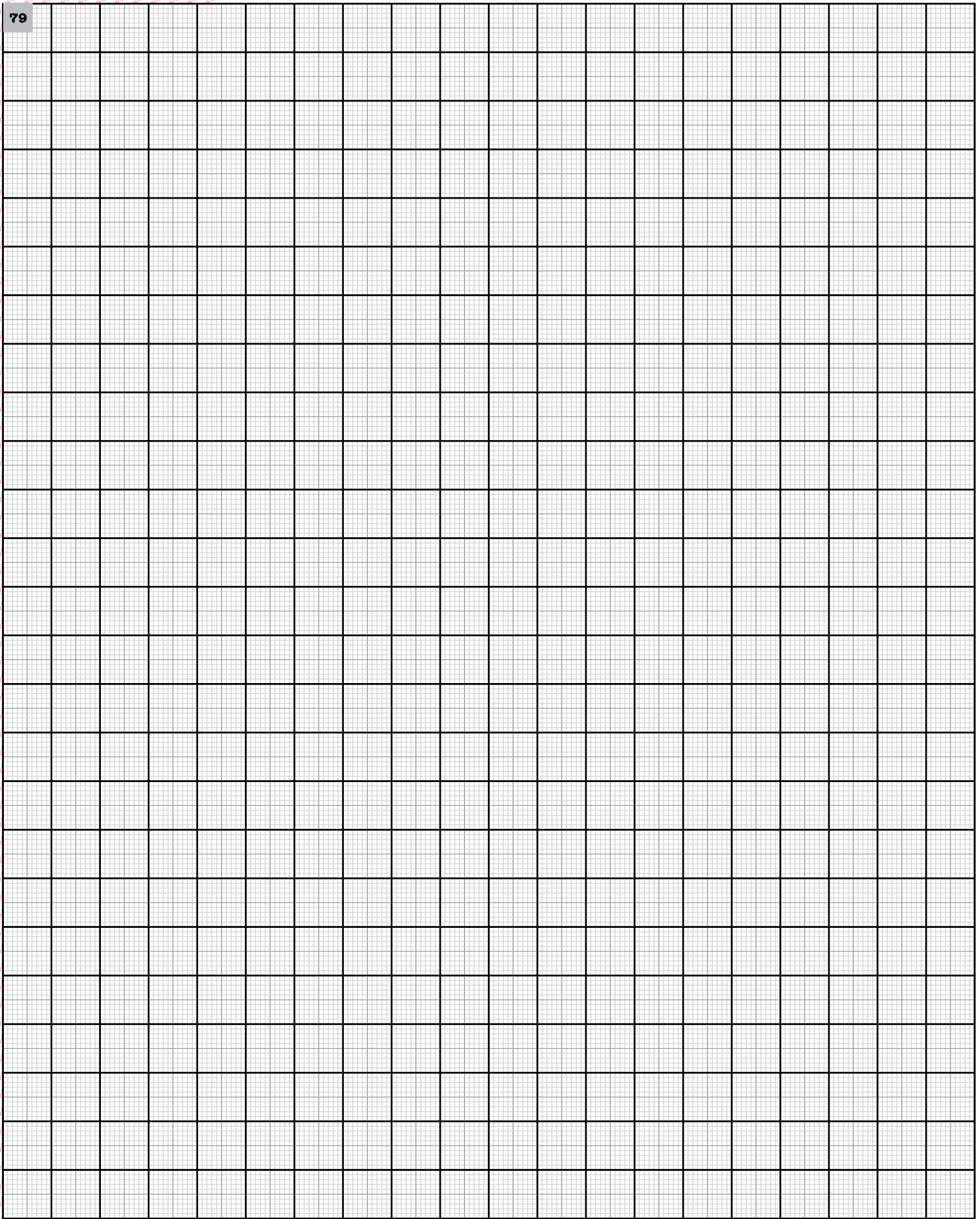
Une image numérique colorée est constituée de carrés unités, les pixels et chaque carré est un mélange de 3 ou 4 couleurs : rouge, vert, bleu (RVB) pour les écrans et cyan, magenta, jaune, noir (CMJN) pour l'imprimerie. Pour une même surface, plus il y a de pixels, plus la définition est grande.

Métiers des maths

Photo, CD, DVD, Internet, téléphone mobile, TV haute définition... utilisent les images numériques. Pour stocker, transmettre, analyser, traiter, compresser, corriger, modifier ces images, les mathématiques sont devenues indispensables.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :**Pixels - Compression d'images - Impression numérique**





1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126
127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138
139	140	141	142	143	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200





1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600

6.Construire



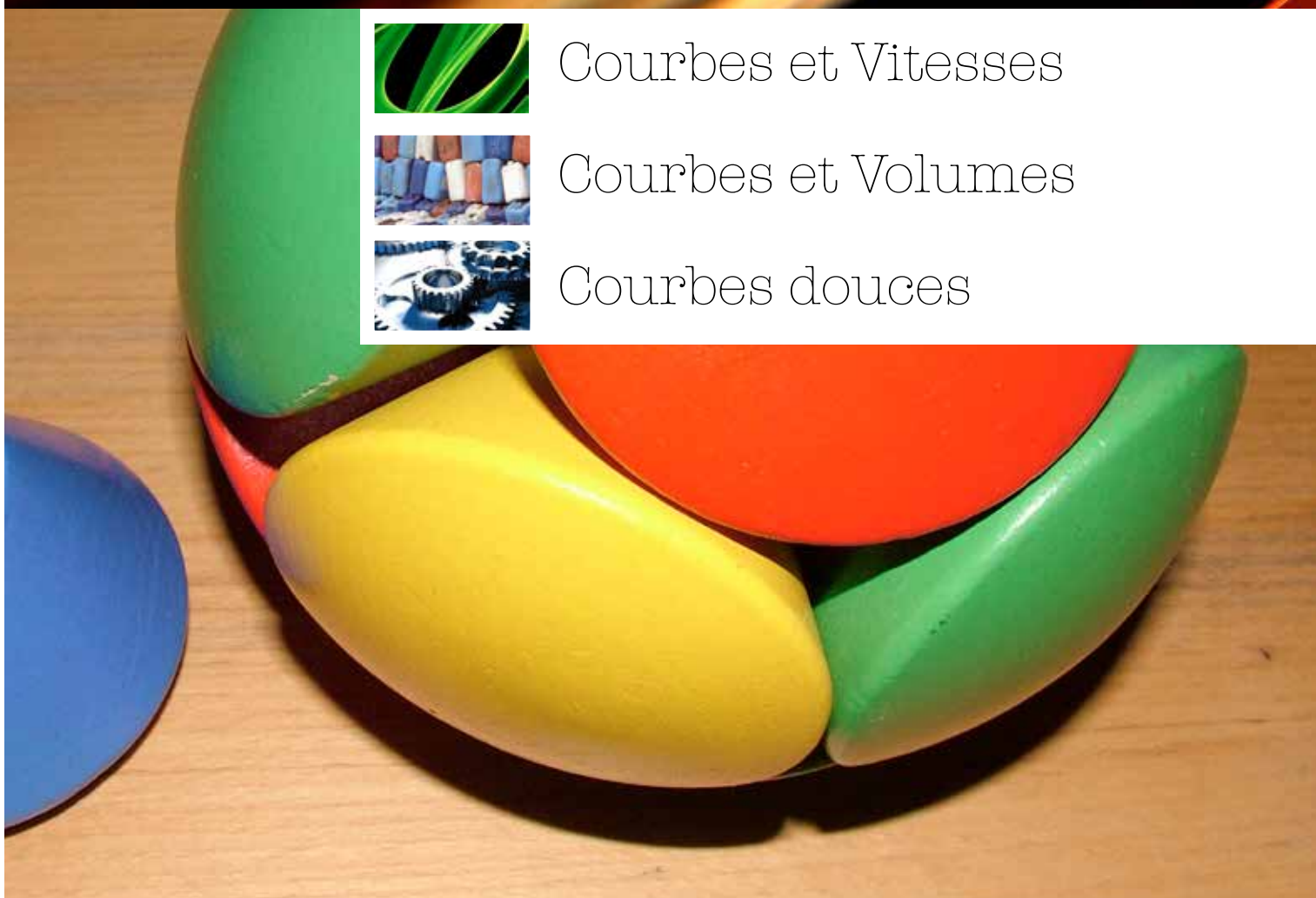
Courbes et Vitesses



Courbes et Volumes



Courbes douces





Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Dessins de 5 circuits de course, 1 graphique de vitesse

88

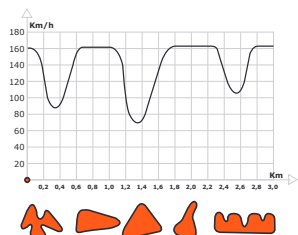
Que retenir ?

Vitesse et accélération

La **vitesse** est une mesure physique qui permet de connaître et décrire l'évolution d'une quantité (le plus souvent une distance) en fonction du temps. Elle s'exprime en mètre par seconde, en km/h, en nœuds dans la marine et en mach dans l'aviation.

L'**accélération** est la variation de la vitesse d'un objet en fonction du temps.

On dit que la fonction "vitesse/temps" est la **dérivée** de la fonction "distance/temps". De même la fonction "accélération" est la **dérivée** de la fonction "vitesse/temps". Elle décrit l'évolution de la tangente à la courbe vitesse/temps en chaque point.



Sur quel circuit est-on ?

Ce graphique est celui de la vitesse d'une voiture de course à plein régime lors de son 3^{ème} tour de circuit.

Questions :

- Sur quel circuit peut-elle être ?
- Dans quel sens tourne-t-elle ?
- Où se trouve la ligne de départ ?

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier quadrillé, crayon

89

Savez-vous lire un graphique ?

- Chacun imagine un circuit automobile et le dessine, en construit le graphique des vitesses sur un tour de circuit, le passe à son voisin qui a fait de même.
Question : à partir du graphique fourni par votre voisin, trouvez le circuit auquel il a pensé. Gagne celui qui trouve le premier.
- Traduisez sous forme graphique l'histoire suivante : un marcheur grimpe une côte de 4 km à 2 km/h, il s'arrête une heure et redescend par le même chemin à 4 km/h.
- Deux cyclistes font une course aller - retour. Le premier parcourt l'aller à 60 km/h et le retour à 40 km/h. Le second parcourt l'aller et le retour à 50 km/h. Quel est celui qui arrive le premier ?

Pour aller plus loin...

Roulez moins vite

- Une automobile roule à 100 km/h de moyenne au lieu de 90 km/h. Quel temps gagne-t-elle sur un parcours de 90 km ?
- Un cyclomoteur roule à une vitesse de 50 km/h au lieu de 45 km/h. Quel temps gagne-t-il sur 45 km ? sur 90 km ?

Freinez à temps !

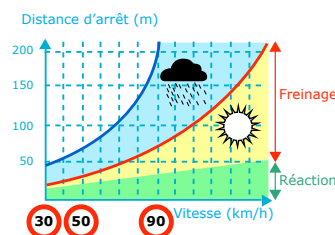
Entre le moment où un conducteur perçoit un obstacle et celui où il commence à freiner s'écoule un **temps de réaction** estimé entre 1 et 2 secondes. La **distance de freinage**, qui dépend de la vitesse et de l'état du véhicule, est estimée par temps sec à $0,08V^2$. V étant la vitesse du véhicule exprimée en mètres/seconde.

- Calculez la distance que parcourt une automobile pour s'arrêter lorsqu'elle roule à 90 et à 100 km/h.
- Calculez de même la distance parcourue par le cyclomoteur à 45 et 50 km/h.

Et par temps de pluie ?

La distance de freinage dépend aussi de l'état de la route. Sur route mouillée, elle augmente de 40%.

- Recalculez les distances d'arrêt précédentes.
- Réalisez un tableau puis un graphique des distances d'arrêt en fonction de la vitesse et de l'état de la route.



Métiers des maths

Le **calcul différentiel** s'est développé aux 17^{ème} et 18^{ème} siècles. Il permet de décrire l'évolution de la pente de la tangente à une courbe continue :

- Si la fonction croissante est représentée par une courbe, les tangentes à la courbe en chaque point ont un coefficient directeur positif.
- Si la fonction est décroissante, le coefficient directeur des tangentes est négatif.

Cette propriété est utilisée par tous ceux qui étudient des phénomènes évolutifs, des mathématiciens aux physiciens, des ingénieurs aux biologistes, des démographes aux économistes...

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Fonction - Graphique - Dérivée - Tangente - Vitesse - Accélération



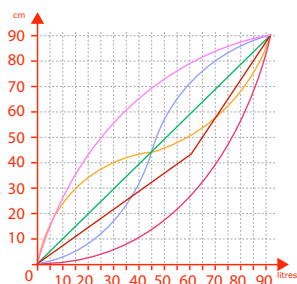
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 dessin de 6 récipients, 1 dessin avec les 6 graphiques

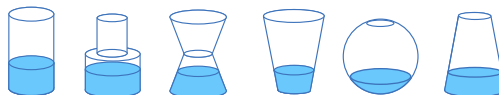
90

91

Le volume du tonneau



- Ces six récipients ont même hauteur (90 cm) et même volume (90 l). Le graphique indique le niveau de remplissage des récipients, à débit constant, en fonction du volume (donc du temps).
- Quelle est la courbe de remplissage de chaque récipient ?
- Quelles peuvent être les dimensions de chaque récipient ?



Faites-le vous-même

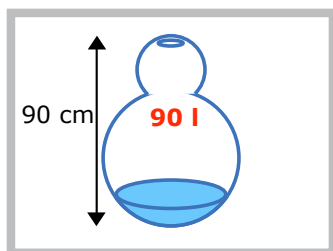
MATÉRIEL : Papier quadrillé, Crayon

89

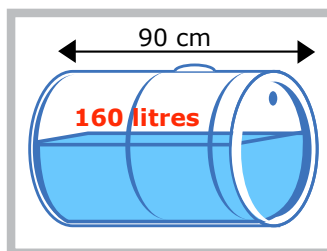
Savez-vous lire un graphique ?

- Chacun imagine un récipient (de 90 cm de haut et de 90 l) et le dessine.
- Il en construit le graphique de remplissage.
- Le passe à son voisin qui a fait de même.

Question : à partir du graphique fourni par votre voisin, trouvez le récipient auquel il a pensé. Gagne celui qui trouve le premier.



- Quelle est le graphique de remplissage de ce récipient ?



- Quelle peut être la courbe de remplissage de ce tonneau ?

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 dessin des 6 récipients, de 6 jauges graduées

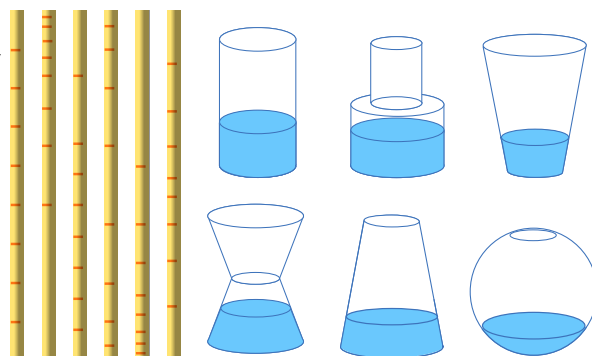
92

A chacun sa jauge

- Chaque tige est la jauge, graduée de 10 litres en 10 litres, de l'un de ces six récipients. Associez chaque jauge à son récipient.
- Graduez de 10 litres en 10 litres la jauge d'un baril de 160 litres couché, suivant que le trou de remplissage se trouve en haut d'un couvercle ou sur le haut du tonneau.

Vidangez un réservoir

- Reprenez les 6 récipients et leurs graphiques de remplissage.
- Dessinez maintenant le graphique de vidange de chacun (en supposant que le débit est constant et que le bouchon de vidange est en bas).





Que retenir ?

Pour déterminer la courbe de remplissage d'un récipient à chaque instant, il faut estimer (ou calculer) l'évolution de l'aire de la section du récipient en fonction de la hauteur h . Cela revient à utiliser directement ou approximativement des calculs de volume en fonction de la hauteur. C'est le domaine du calcul intégral mis en place par **Newton** (1642-1727) et **Leibniz** (1646-1716). Mais beaucoup de formules de volumes (et d'aires) sont connues depuis **Archimède** (287-212 av. J.-C.).

Quelques formules

Volume des récipients en fonction de la hauteur
(hauteur en dm, volume en dm³ ou litres)

- Cylindre : $V(h) = \text{Base} \times h = \pi R^2 \times h$
- Pyramide sur base : $V(h) = B \times h/3$
- Cône sur pointe : $V(h) = V(H) \times (h/H)^3$
- Sphère : $V(h) = \pi h^2 (R - h/3)$

Métiers des maths

La notion de relation entre deux (ou plusieurs) variables s'exprime en mathématique par des **fonctions**. Leurs **représentations graphiques** font aujourd'hui partie de la vie quotidienne (courbe de température, cours de la bourse...) et sont des outils utilisés dans de nombreux domaines techniques. Le **calcul intégral**, qui permet de calculer des aires et des volumes, s'est développé en même temps que le calcul différentiel au 17^{ème} siècle.

Les problèmes de mesure de volume et de jauge sont utilisés depuis toujours par les commerçants et les ingénieurs.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Fonction - Graphique - Calcul intégral - Volumes - Archimède - Baril



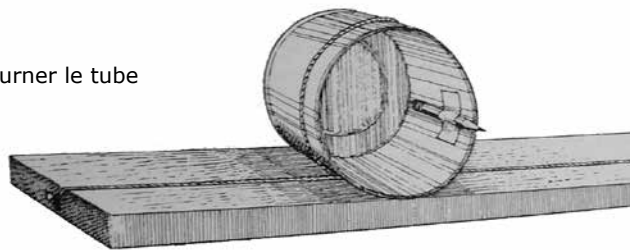
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 crayon, 1 feuille, 1 règle, 1 tube

Roulette et cycloïde

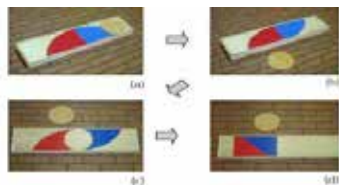
- Fixez le crayon à l'intérieur du tube
- Tracez la courbe obtenue en faisant tourner le tube contre la règle sans glisser.

Cette courbe s'appelle une **cycloïde**.
C'est la courbe décrite par un point sur un pneu de bicyclette qui roule.



Que retenir ?

Le nom « **cycloïde** » a été proposé par **Galilée** (1667-1748). Cette courbe possède plusieurs propriétés originales. Deux billes qui partent à des hauteurs différentes se rencontrent toujours au bas de la cycloïde. L'aire sous une branche de cycloïde est égale à 3 fois l'aire du disque qui la décrit.



Le meilleur toboggan ?

C'est celui qui permet d'arriver le plus vite en bas du toboggan ?

Ce problème fut proposé sous forme de défi par **Jean Bernoulli** en 1696.

La réponse fut trouvée par lui-même, mais aussi par son frère Jacques, par **G. de l'Hospital**, **Leibniz** et **Newton**. Ce type de problème est à l'origine du **calcul des variations**.

C'est une cycloïde, appelée ici courbe brachistochrone.

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 crayon, 1 feuille des disques en carton rigide ou en PVC... 1 disque creux

93

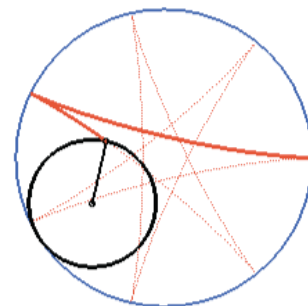
94

Des courbes en boucle

- Fixez le crayon au bord d'un disque.
- Tracez des courbes en faisant tourner ce disque à l'intérieur ou à l'extérieur d'un autre disque.

Ces courbes s'appellent des **hypocycloïdes** ou des **épicycloïdes**.

- Essayez de construire une telle courbe extérieure à 1, 2, 3... branches.
- Essayez de construire une telle courbe intérieure à 2, 3 ou 4 branches.
- Est-ce que ces courbes se referment toujours ?



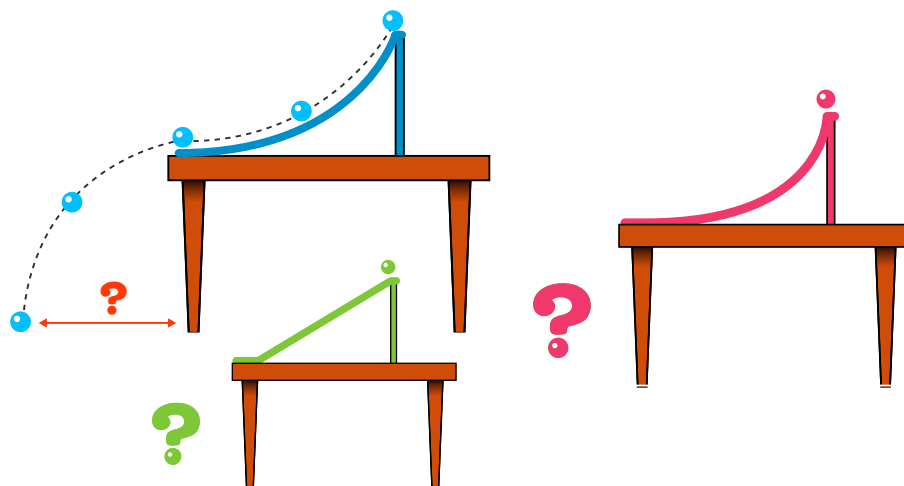
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 3 toboggans en bois ou PVC, en U ou ... 3 billes identiques en acier de préférence

Le plus court chemin ?

Posez les toboggans au bord d'une table. Faites partir les 3 billes en même temps.

- Quelle est celle qui arrivera la première au bas du toboggans ?
- Quelle est celle qui va tomber le plus loin ?



Morale de l'histoire : « La ligne droite n'est pas toujours le plus court chemin ! »



Pour aller plus loin...

Problèmes chocs

Un problème choc est un problème dont la réponse va à l'encontre du raisonnement logique naturel. En voici trois exemples.



2 pièces de monnaies identiques.
L'une fait un tour complet autour de l'autre qui est fixe.
• Combien a-t-elle fait de tour(s) sur elle-même ?
Pourquoi ?



Une bouteille est couchée sur la table
et fait un tour sur elle-même, le goulot appuyé sur un morceau de bois.
• Quelle est la distance parcourue par un point de la bouteille ?
Par un point du goulot ? Pourquoi ?



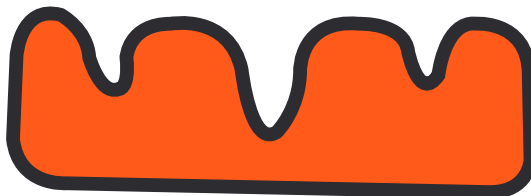
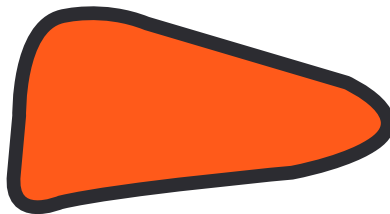
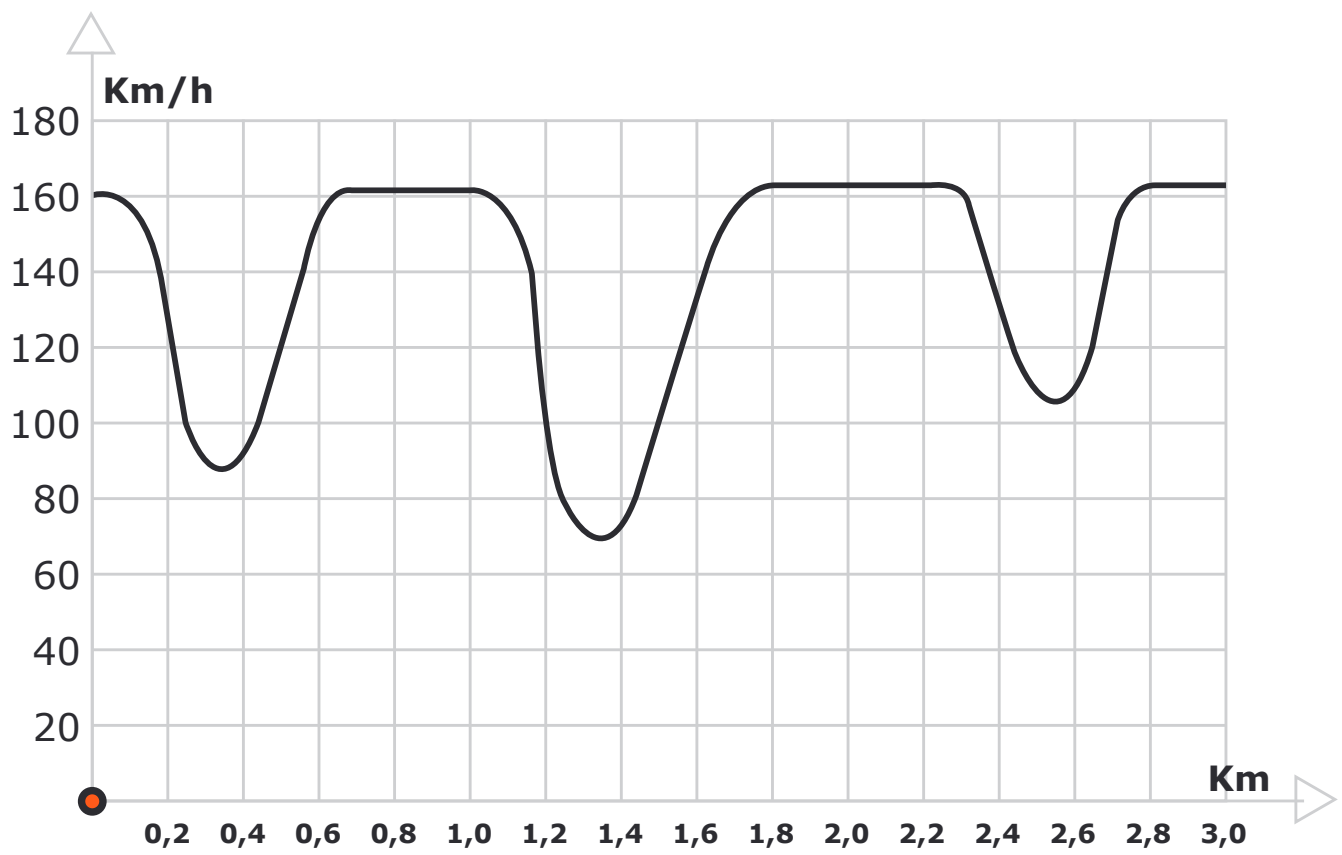
Une planche est posée sur deux cylindres identiques.
• Quelle est la distance parcourue par la planche
quand les cylindres font un tour ?

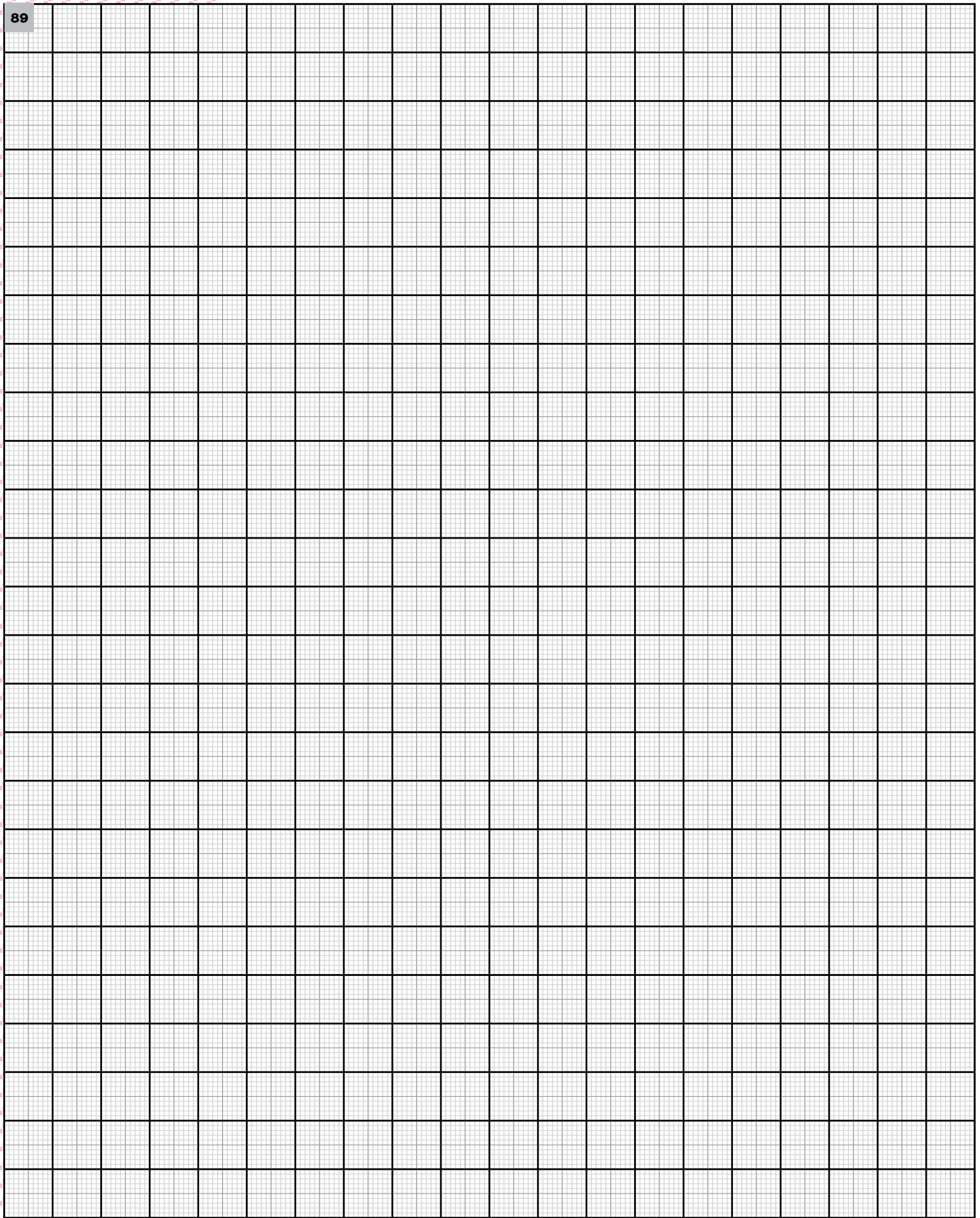
Métiers des maths

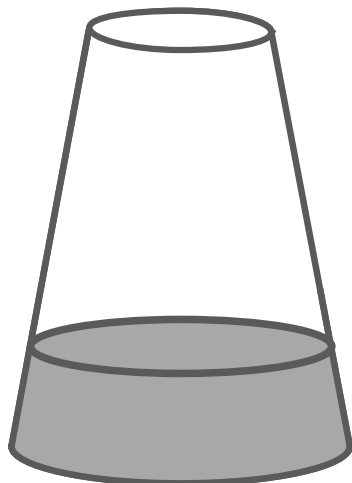
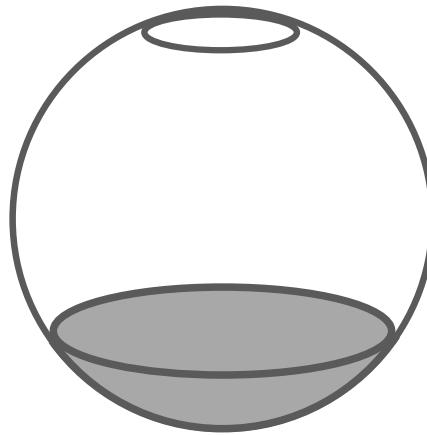
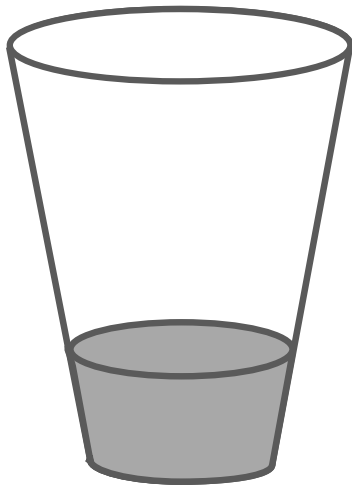
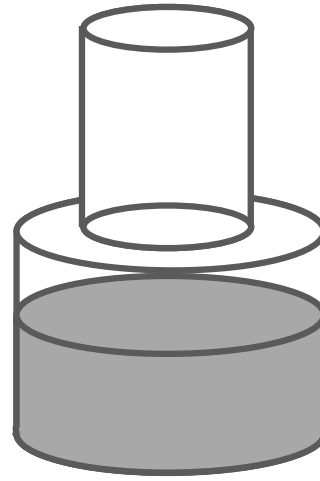
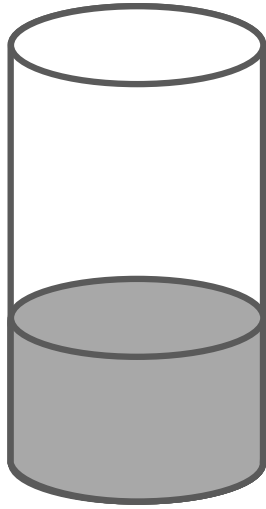
Ces courbes apparaissent dès l'Antiquité, utilisées par **Aristote** et **Ptolémée** pour décrire les mouvements des planètes. Les astronomes les utilisent encore aujourd'hui.
Pour obtenir des mesures plus précises du temps en navigation et en astronomie, **Huygens** invente en 1659 une horloge à pendule qui oscille entre deux arcs de cycloïde. C'est le pendule isochrone.
En mécanique, les formes cycloïdales sont utilisées dans des engrenages et des réducteurs de vitesse.
Une piste de skate-board en forme de cycloïde aurait plus d'avantages que les pistes actuelles !

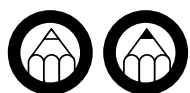
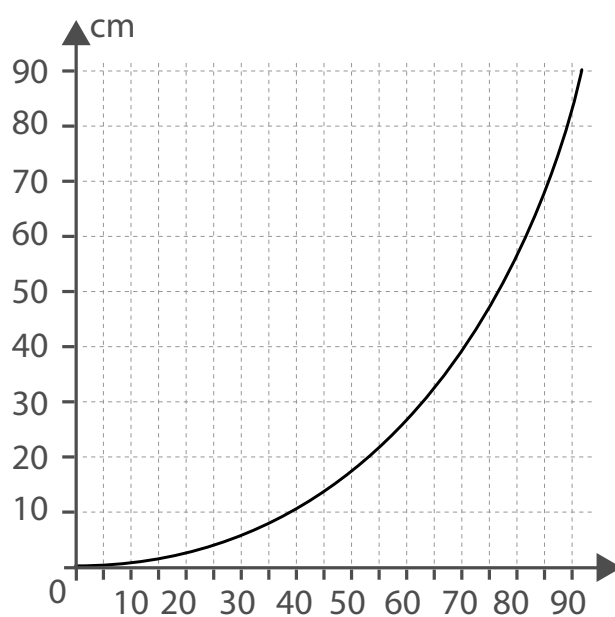
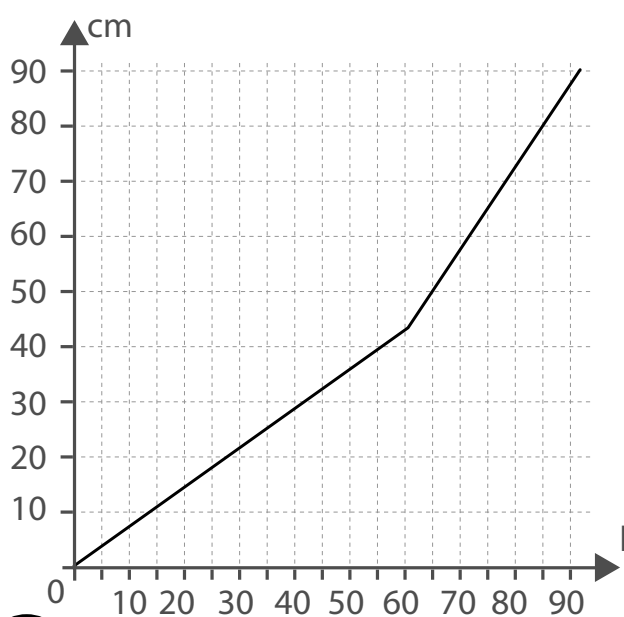
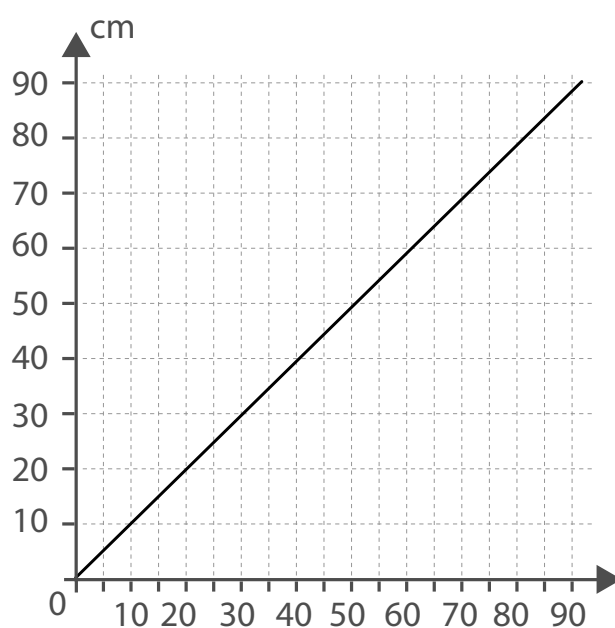
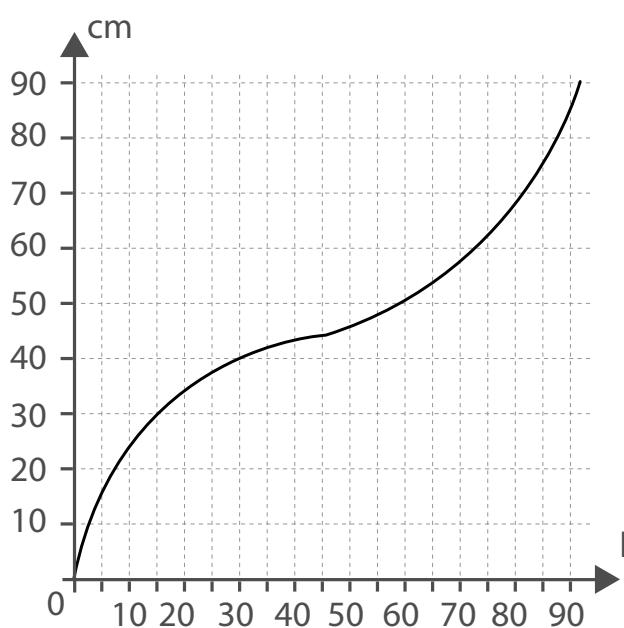
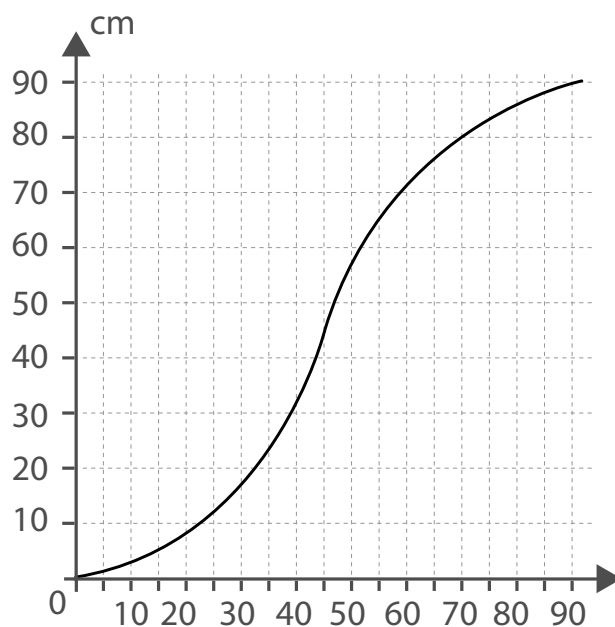
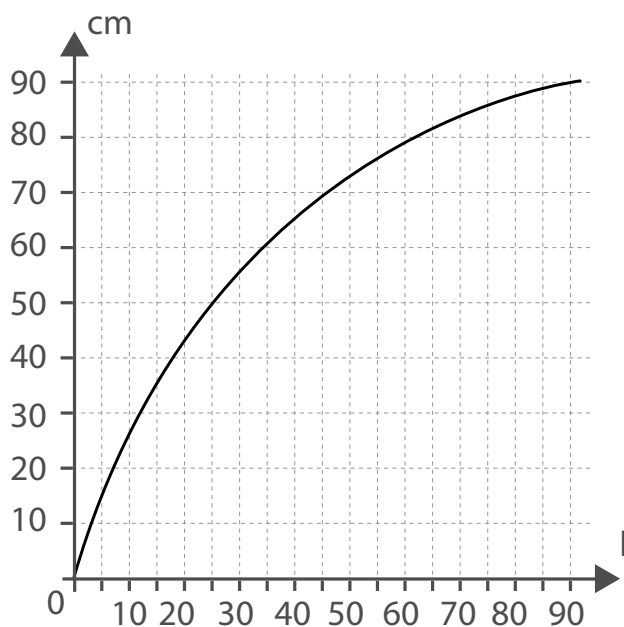
MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

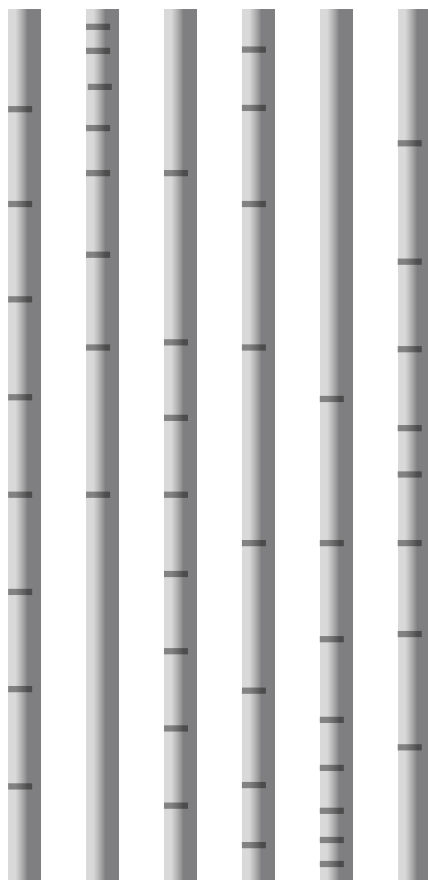
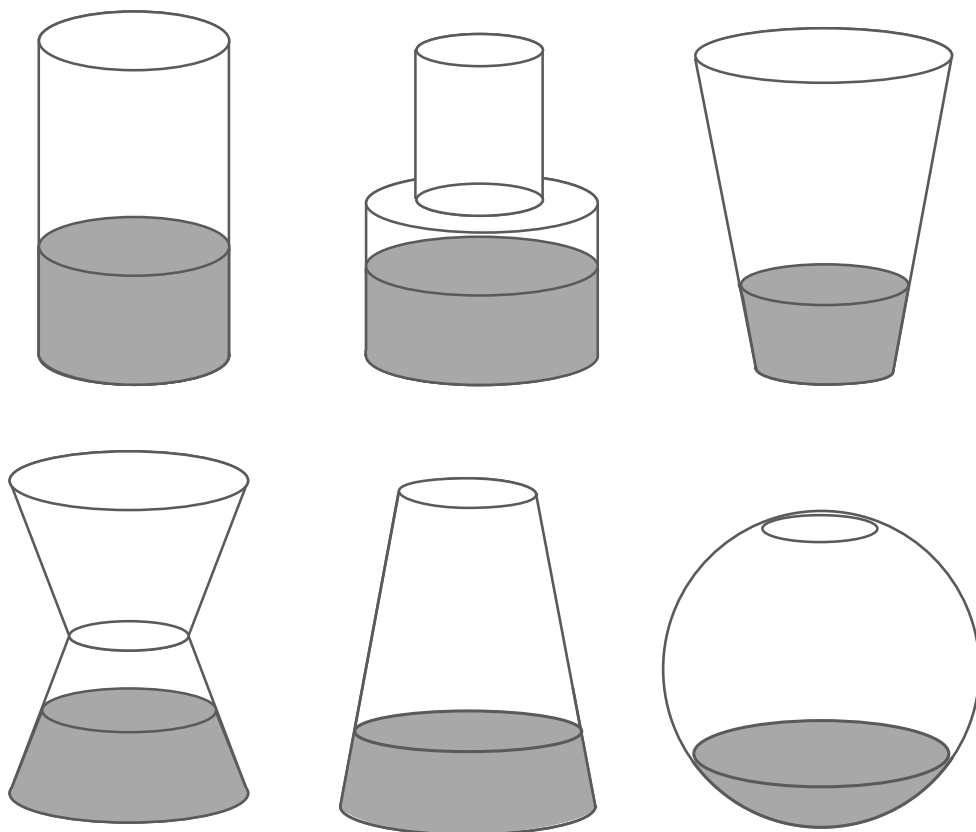
Bernoulli - Tautochrone - Brachistochrone - Cycloïde - Caustique - Horloge de Huygens

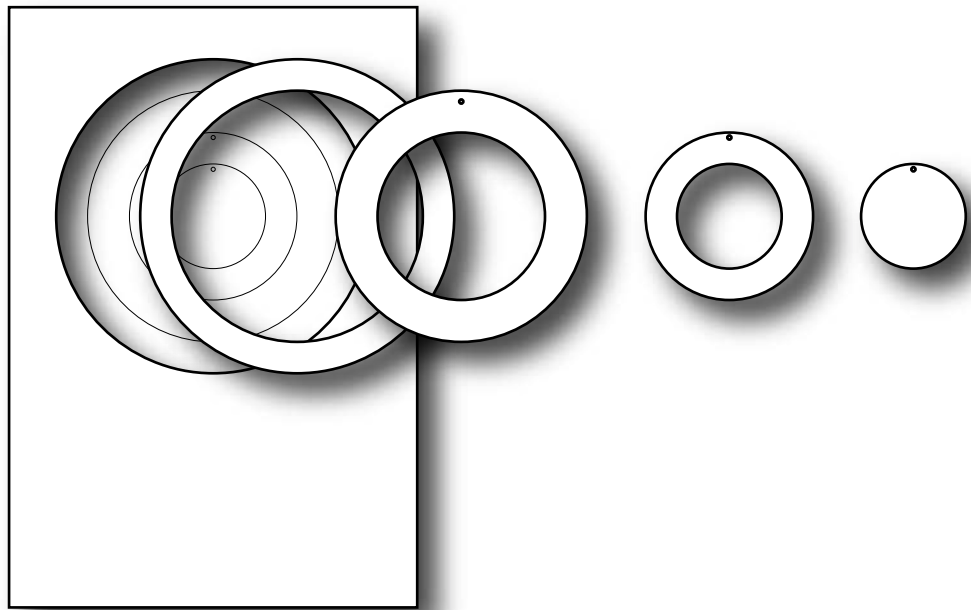
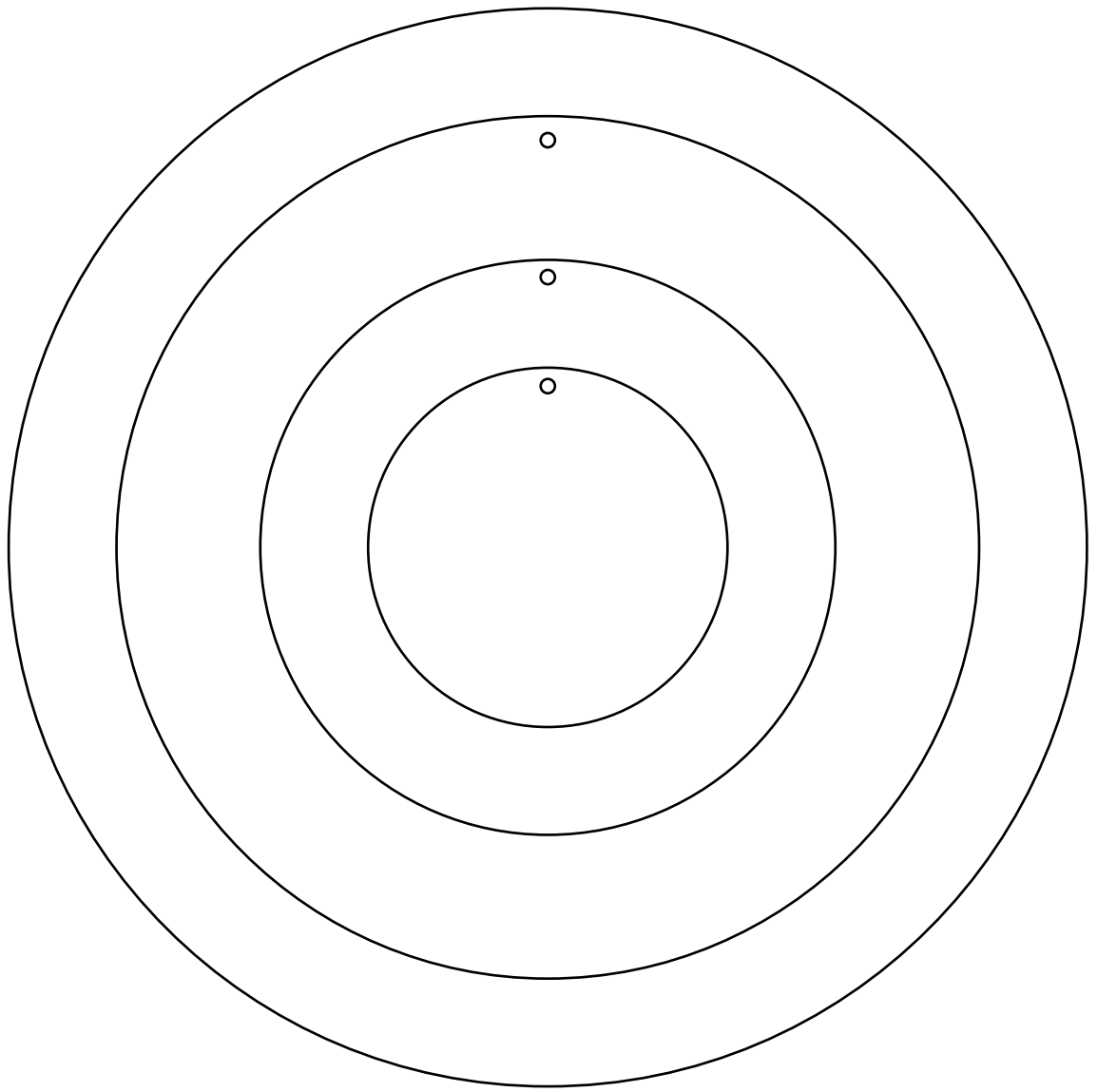


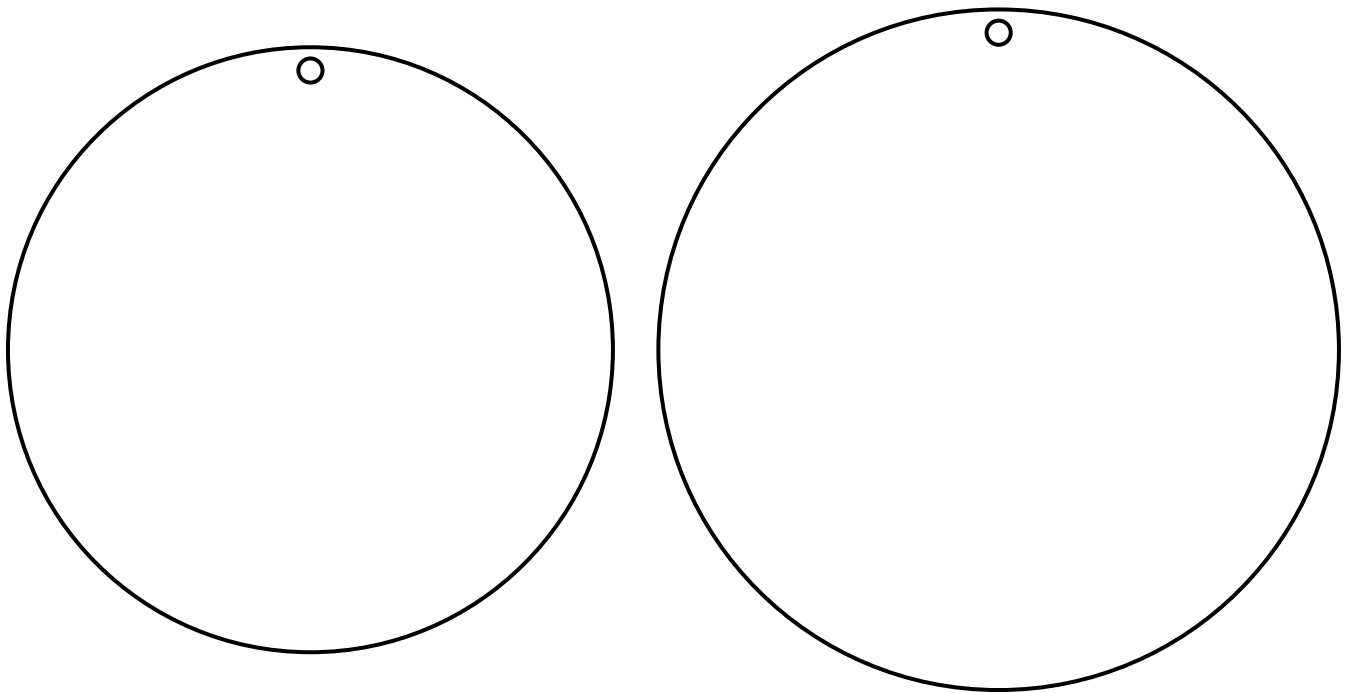
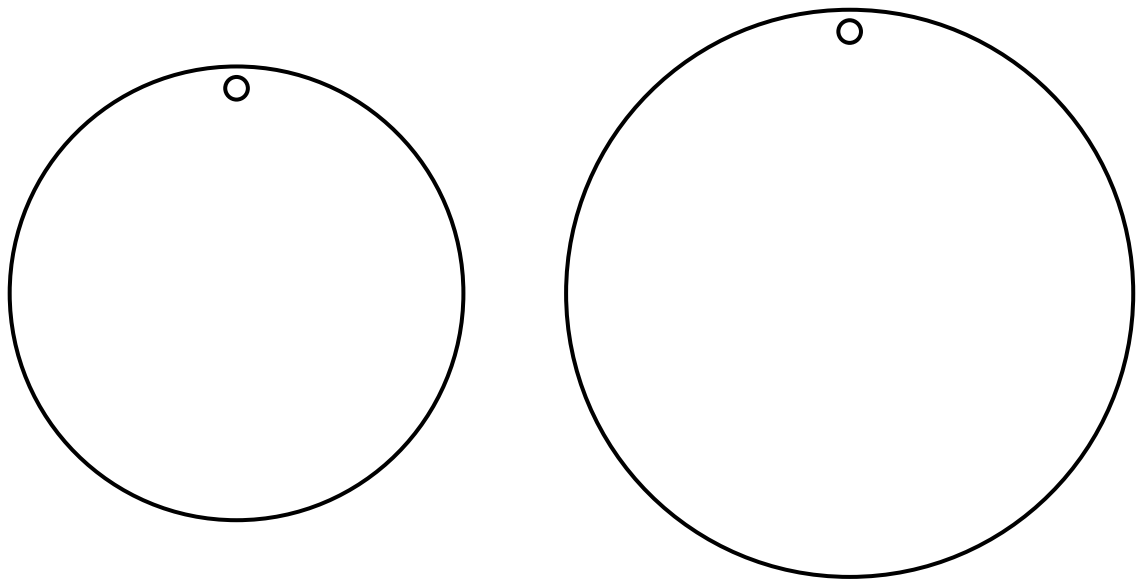
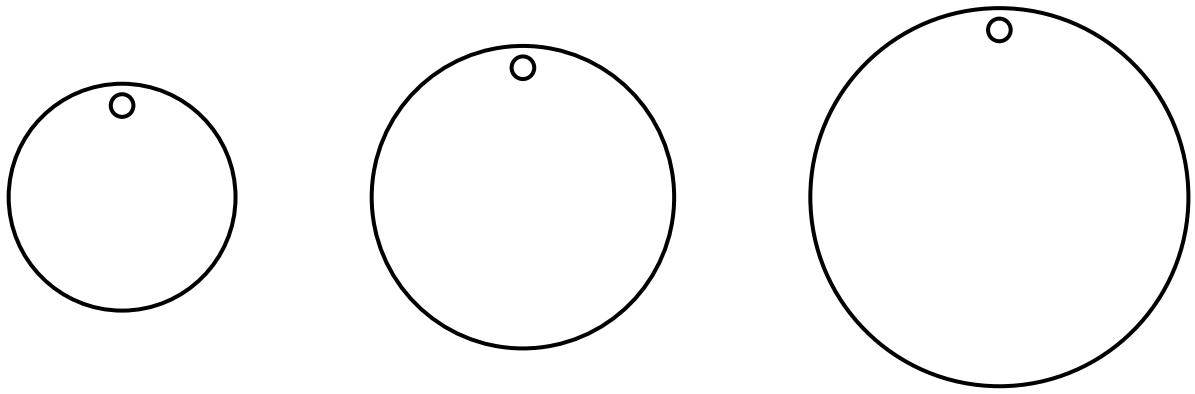










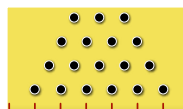




7. Estimer - Prévoir



2 boules rouges ?



Bingo !



Et le gagnant est ?



2 boules rouges ?



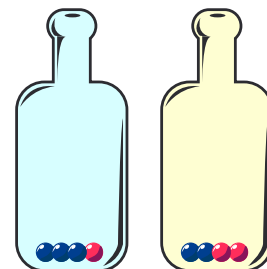
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 petites bouteilles avec 4 billes

**2 boules de même couleur
ou 2 boules de couleurs différentes ?**

Prenez un récipient, retournez-le et faites apparaître deux boules dans le goulot.

- Avez-vous plus de chances d'obtenir deux boules de même couleur ou deux boules de couleurs différentes ?
- Comment vérifier votre réponse ?
- Et si chaque bouteille contenait 1000 fois plus de boules de chaque couleur ?



Que retenir ?

Prévoir ou estimer

Dans l'un des récipients, il y a autant de boules de chaque couleur, on peut donc penser que l'on a autant de chance d'avoir la même couleur que des couleurs différentes. Et bien non !

Pour le vérifier, vous pouvez :

- refaire l'expérience un grand nombre de fois. C'est l'approche statistique.
- calculer le nombre de façons de réunir 2 boules parmi 4. C'est l'approche probabiliste.

Dans le 1^{er} cas, vous avez une estimation statistique du résultat. Plus vous ferez d'expériences, plus vous vous approcherez du résultat exact.

Dans le 2^d cas, vous avez une approche modélisée du problème et un résultat théorique.

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 urne avec 750 billes bleues et 250 rouges - 100 billes apparaissent
ou 1 sac avec 750 bleues et 250 rouges - 1 récipient : 100 billes

Sondages - Sondages

- Faites un tirage de 100 billes, combien y a-t-il de billes de chaque couleur ?
- Recommencez l'expérience plusieurs fois. À combien estimez-vous le nombre de billes de chaque couleur dans l'urne ?

Que retenir ?

Si on interroge un échantillon de 100 personnes choisies au hasard dans un groupe de 1000, on obtient des informations approchées. De même ici, un échantillon de 100 billes donne des informations sur le nombre de billes de chaque couleur dans l'urne avec une certaine précision, une certaine « fourchette » (entre 21 et 29 boules rouges). C'est le domaine des sondages.

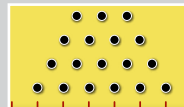
Métiers des maths

Aujourd'hui statistiques et probabilités sont utilisées dans la gestion des systèmes complexes : contrôle des fusées, files d'attente, marges d'erreur... mais aussi dans les jeux d'argent, l'économie, les assurances, le calcul des retraites et des plans de retraite, les tests de qualité, les études d'opinion... Le calcul statistique permet d'extrapoler des informations pour une population entière à partir d'un échantillon représentatif. Les sondages, bien menés, doivent aussi informer sur les limites des techniques utilisées.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Hasard - Jeux - Sondage - Chance

Bingo !



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 planche de Galton (cf plan), billes, clous, planche

100

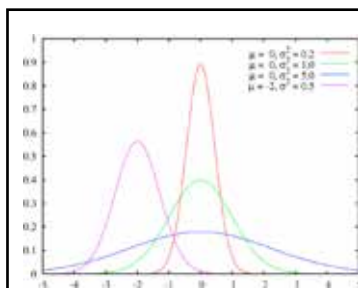
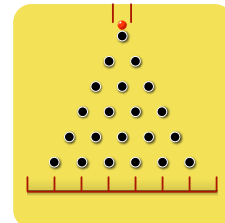
Le hasard est-il calculable ?

Choisissez une bille et faites la descendre doucement.

- Pouvez-vous prévoir où elle va arriver ?
- Où a-t-elle le plus de chance de tomber ?

Prévoir comment se comporte chaque bille est impossible.

Par contre, le calcul des probabilités permet de prévoir comment se distribue l'ensemble des billes à l'arrivée.



La courbe de Gauss

Pourquoi la forme de cette courbe est-elle si connue ? Pourquoi est-elle fondamentale en statistique ? Si on classe les habitants d'une ville ou d'un pays..., selon une caractéristique (taille, poids, QI, niveau de compétence...), plus on s'approche de la moyenne sur le critère considéré et plus il y a d'individus. Plus on s'en éloigne et moins il y en a. Aux extrémités, il n'y a presque personne.

La représentation graphique de cette réalité est une courbe appelée courbe en cloche ou courbe de **Gauss** (1777-1855). Le caractère universel de cette courbe provient d'un résultat trouvé par **Euler** (1707-1783) et **Laplace** (1749-1827) qui dit que la distribution de Gauss est l'accumulation de nombreuses petites contributions indépendantes.

Que retenir ?

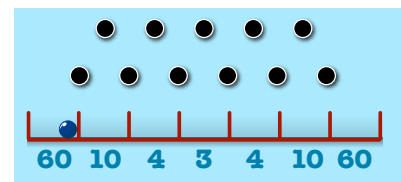
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 planche de Galton (cf plan), 7 valeurs sous les tiroirs

100

Choisissez la bonne case

- Misez un Euro, un dollar ou... sur l'une des cases.
- Si la bille tombe dans la case, vous gagnez 60, 15, 4 ou 3 fois plus que votre mise.
- Certaines cases sont plus chanceuses que d'autres pour le joueur. Lesquelles ?
- Calculez le nombre de chemins qui conduisent à chaque case.
- Quelle chance a-t-on d'arriver dans chacune des cases ?



Pour connaître la probabilité d'arriver dans chacune des cases, il suffit de compter le nombre de chemins qui y conduisent ! On retrouve les nombres du triangle de **Pascal**. Toutes ces cases n'ont pas la même chance de vous faire gagner ! Le propriétaire de ce type de jeu est-il celui qui gagne le plus souvent ?

Métiers des maths

Probabilités et statistiques sont des outils qui permettent le traitement de données et de l'information. Elles se retrouvent non seulement dans le domaine des technologies de l'information (traitement statistique du signal et des images), mais aussi dans la gestion des risques (assurance), le contrôle qualité, l'économie, la santé, de l'ingénierie financière (finances quantitatives), le conseil stratégique (analyses de marchés, études de faisabilité)...

On peut ainsi utiliser une courbe de **Gauss** pour modéliser la gestion des ventes et des stocks dans une entreprise, un commerce.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Courbe de Gauss - Statistiques - Probabilités - Distribution - Espérance de gain

Et le gagnant est ?



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 joueurs

Feuille, caillou, ciseaux...



En même temps, les deux joueurs présentent leur choix avec une main.

La feuille enveloppe le caillou qui émousse les ciseaux qui coupent la feuille !

- Comment gagner plus souvent à ce jeu appelé aussi Chifoumi ?

Réponse : en jouant chaque coup au hasard.

- Mais peut-on jouer au hasard ?



Variante : On rajoute un puits !

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 joueurs puis 2 groupes de joueurs, tableau, craie

La course à 20

Le premier joueur dit 1 ou 2. Chacun, à son tour, ajoute 1 ou 2 au nombre de l'autre joueur. Les nombres successifs sont inscrits au tableau. Gagne le premier qui dit 20.

- 1^{ère} phase : Faire jouer les élèves un contre un.
- 2^{de} phase : Faire jouer 2 groupes d'élèves en laissant un temps de concertation entre chaque coup. Chaque élève du groupe joue à son tour.
- 3^{ème} phase : Chaque groupe énonce des éléments de la stratégie gagnante. L'autre groupe accepte ou réfute l'énoncé. Gagne l'équipe qui a le plus d'énoncés acceptés.

Prolongements :

- Faire la course à 30.
- Faire la course à 2010.
- Faire la course à 20 ou 30, mais en ajoutant 1, 2 ou 3.

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 joueurs puis 2 groupes de joueurs, tableau, craie, 1 grille

101

La plaque de chocolat



Chacun, à son tour, désigne une case et barre toutes les cases non encore barrées qui sont à la gauche et en dessous de la case barrée.

- Perd celui qui barre la dernière case en haut à droite.
- On peut faire jouer les élèves comme pour la course à 20.

Prolongements :

- Faire jouer sur des grilles plus petites ou plus grandes.

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 joueurs puis 2 groupes de joueurs, tableau, craie, 3 dés



Jeux, hasard et stratégies

Chacun, à son tour, jette les deux dés.

- Gagne celui dont la somme est la plus grande.
- Quels sont les nombres qui ont le plus de chance de sortir ?

Prolongements :

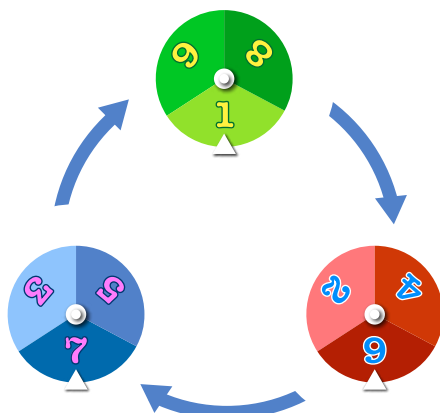
- Jouer avec 3 dés.

Et le gagnant est ?



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 joueur, 3 roulettes



Faites vos jeux !

- Choisissez une roulette, je choisis la suivante et je gagne plus souvent que vous !
- Pourquoi ?

En fait, chaque roulette "gagne" plus souvent que la précédente.

Que retenir ?

Ces jeux sont des exemples simples de la théorie des jeux.

Dans les deux premiers cas, le jeu est à information complète et a une fin. Il y a toujours un gagnant et un perdant et donc une stratégie gagnante et, ici, gagne celui qui joue en premier (et qui joue bien !). Mais dans le second jeu, la stratégie gagnante n'est pas facile à trouver !

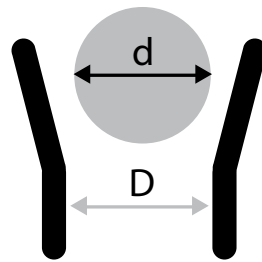
Le troisième jeu a participé à la naissance de la théorie des jeux au 17ème siècle grâce aux travaux de **Blaise Pascal** et du **Chevalier de Méré**. Elle a été développée au 20ème siècle par **Von Neumann** et **Oskar Morgenstern**. Les derniers jeux montrent que le hasard peut parfois être maîtrisé. Des situations analogues au jeu des roulettes ont permis, en particulier, à **Condorcet** (1743-1794) de montrer qu'en démocratie, il n'y a pas de système d'élections "meilleur" qu'un autre !

Métiers des maths

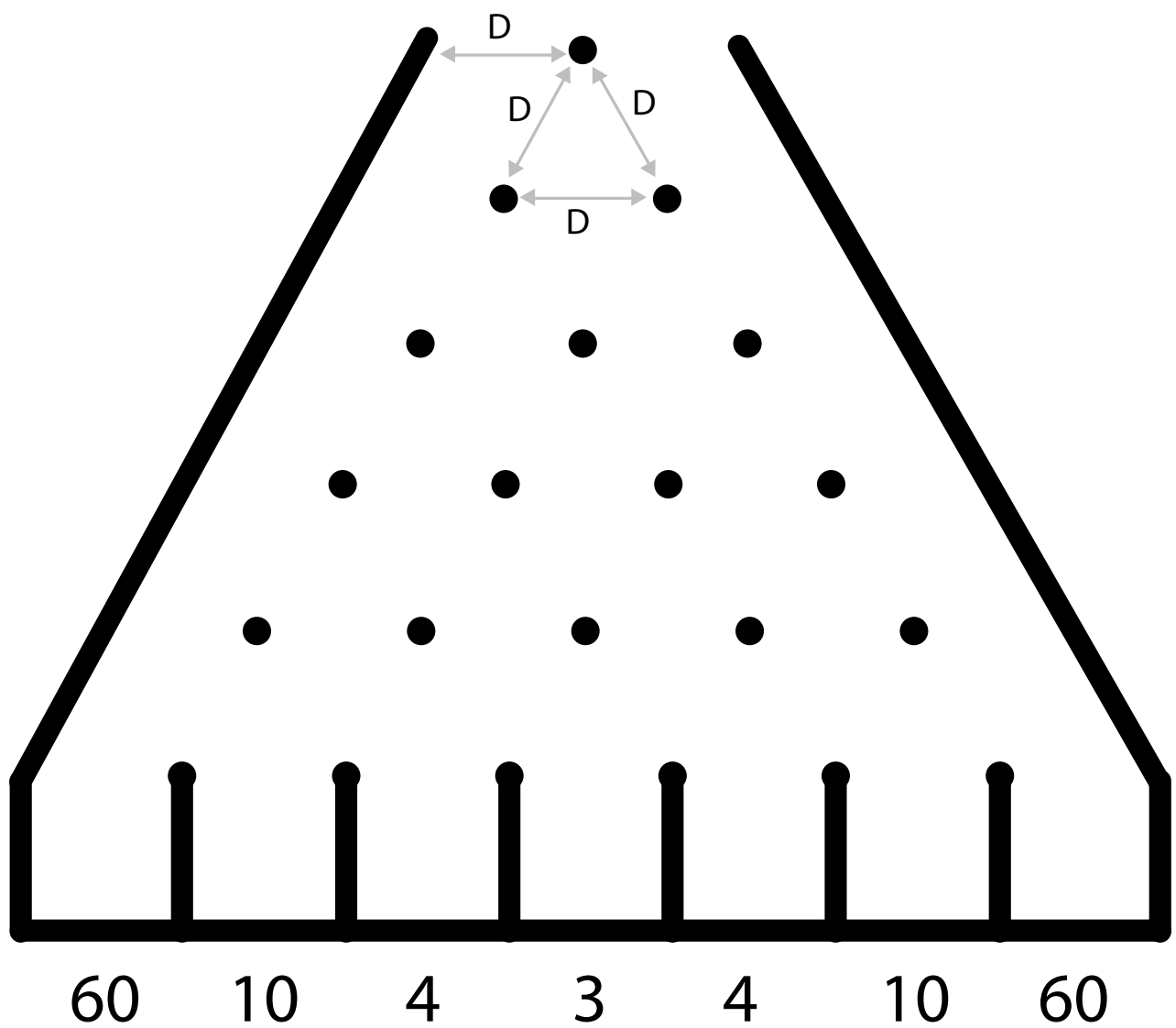
La théorie des jeux, avec le concours des probabilités et des statistiques, est très présente aujourd'hui dans toutes les situations qui font appel à la stratégie, la décision, la compétition et la coopération. On la trouve bien sûr dans les jeux mais aussi dans les luttes ou les conflits politiques (les sciences politiques) ou les stratégies militaires et surtout en économie, dans le commerce et le marketing. Elle est aussi utilisée en informatique et en algorithmique.

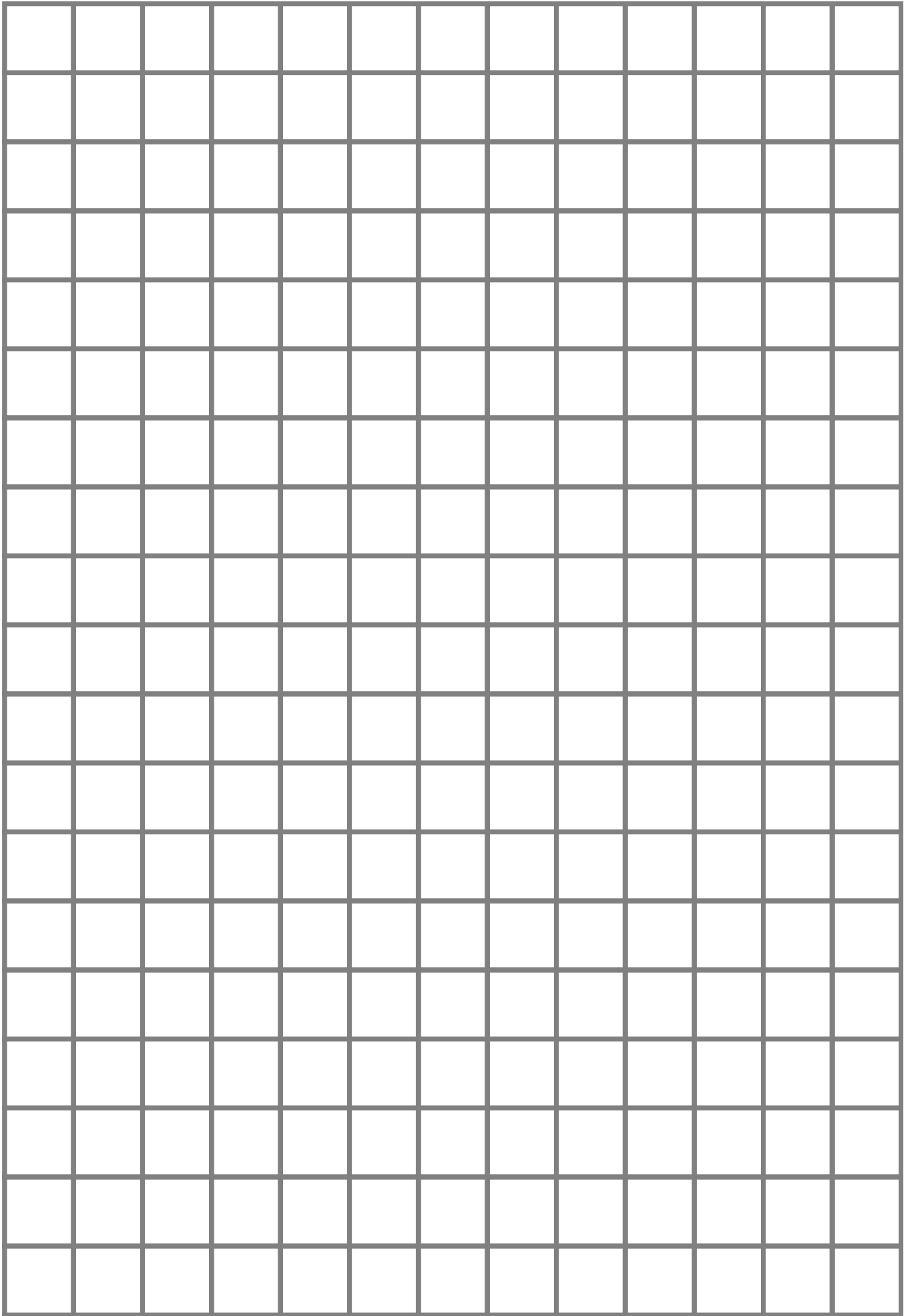
MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Théorie des jeux - Stratégie - Von Neumann - Nash - Théorie de l'Information



$d = 30 \text{ mm}$
 $D = 35 \text{ mm}$





8.Optimiser



Bulles de savon



Le plus court chemin



La meilleure forme





Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Du fil de fer ou des pailles, 1 cuvette d'eau savonneuse

La nature est paresseuse

- Fabriquez un tétraèdre, un cube, un octaèdre, une hélice...
- Avant de les plonger dans l'eau, imaginez comment vont se répartir les surfaces savonneuses.
- Plongez les et observez les surfaces savonneuses.
- Combien y a-t-il de faces autour des arêtes ? d'arêtes autour des sommets ?



Que retenir ?

Mathématiques savonneuses

Une bulle de savon est sphérique. Pourquoi ? À aire constante, le cercle délimite la surface de plus petit périmètre. À volume constant, la sphère a la plus petite surface. Dans la nature, les efforts tendent à être les plus faibles. Ces formes correspondent à des minima de l'énergie potentielle qui est proportionnelle à la surface des corps. Les molécules de savon créent une tension superficielle qui minimise les surfaces savonneuses.

Le Belge **Ferdinand Plateau** étudia le premier ces formes dans les années 1860.

Il remarqua que :

- Quand une bulle s'appuie sur une surface, elle lui est perpendiculaire.
- Quand des surfaces savonneuses se rencontrent, elles le font : 3 par 3 le long d'une ligne avec des angles égaux de 120° , 4 par 4 autour d'un point avec des angles constants ($109^\circ 28'$...).

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Du fil de fer, des pailles, une plaque, de l'eau savonneuse

Bulle à bulle

- À l'intérieur d'un cadre carré de fil de fer de 15 cm de côté (environ), placez une ficelle fermée de 25 cm (environ), reliée aux 4 coins du carré par de la ficelle. Plongez le tout dans l'eau et ressortez-le. Quelle forme va prendre la ficelle intérieure si vous la trouez avec un doigt sec ?
- Faites une bulle dans l'air. Quelle forme a-t-elle ?
- Posez une bulle sur la plaque. Comment la bulle s'appuie-t-elle sur la plaque ?
- Posez une grosse bulle et une petite bulle sur la plaque sans qu'elles se touchent. Introduisez une paille entre les deux. Que se passe-t-il ?
- Sur un fil de fer en U, placez une ficelle non tendue et plongez le tout dans l'eau savonneuse. Tirez un peu sur le fil. Quelle forme prend-il ?

Métiers des maths

Ces formes se retrouvent dans la nature et en architecture.

Les problèmes de surfaces minimales intéressent mathématiciens et physiciens depuis plus de trois siècles et, depuis une cinquantaine d'années, physiciens, chimistes, biologistes, architectes...

Nid d'abeille, squelettes, toiles d'araignées... L'évolution de la nature a optimisée de nombreuses formes. De même, dans l'industrie automobile, l'aéronautique, le bâtiment, l'architecture des ponts... les ingénieurs cherchent des solutions optimales pour diminuer le poids, l'encombrement, la consommation d'énergie, le coût environnemental des objets qu'ils conçoivent.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Bulles de savon - Surfaces minimales - Tension superficielle

Le plus court chemin

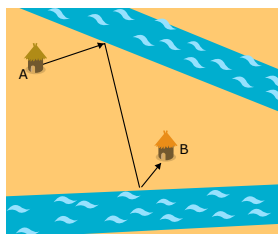


Faites-le vous-même

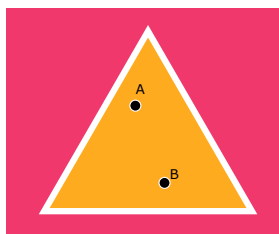
MATÉRIEL : Papier - Crayon

Le plus court chemin

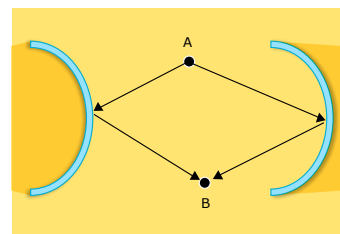
Quel est le plus court chemin de A et B ?



- en passant par l'une des rivières ?
- en passant par les deux rivières ?



- en passant par les 3 côtés d'un triangle ?



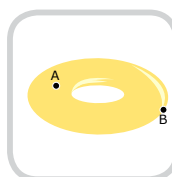
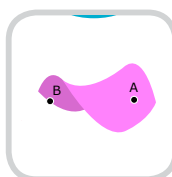
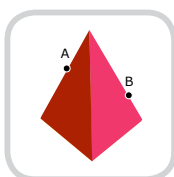
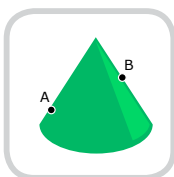
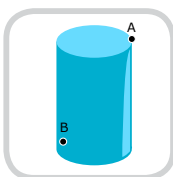
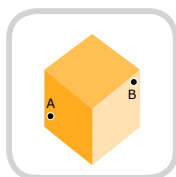
- par un miroir convexe ?
- par un miroir concave ?

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier, crayon, 1 cube - 1 cylindre - 1 cône - 1 pyramide 1 "selle de cheval" - 1 tore

Le plus court chemin sur une surface

Quel est le plus court chemin de A et B ?



Que retenir ?

La ligne droite n'est pas le plus court chemin ... en général ! Le plus court chemin sur une surface s'appelle une **géodésique**.

- Sur une **surface plane**, en géométrie euclidienne, c'est la ligne droite.
- Sur une **surface développable**, un cylindre, un cône, un polyèdre..., c'est aussi le segment de droite qui joint les deux points en restant sur la surface mise à plat.
- Ce n'est plus une ligne droite lorsque la surface n'a pas une courbure nulle en chaque point. C'est le cas de la « **selle de cheval** » à courbure négative et de la sphère à courbure positive.
- Sur la **sphère**, c'est un arc de grand cercle, cercle centré au centre de la Terre.

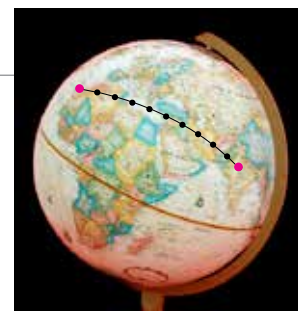
Ces problèmes ont été développés par **Gauss** au 19^{ème} siècle.

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 globe terrestre, 1 ficelle ou 1 élastique

Et sur la Terre ?

- Choisissez deux points sur le 30^e ou le 40^e parallèle : Paris et Montréal ou Le Cap et Santiago...
- Quel est le plus court chemin pour aller d'une ville à l'autre ?
- Vérifiez avec la ficelle.
- À quoi correspond cette ligne sur le globe ?



Métiers des maths

Sur la Terre, ces problèmes de plus court chemin intéressent tous les gestionnaires de réseaux de fluides, électricité, gaz, pétrole, eau mais aussi communications terrestres.

Ils peuvent être résolus par les mathématiques ou l'algorithmique.

À la surface de la Terre, ils sont utilisés depuis très longtemps par les marins. Ils le sont aujourd'hui par les aviateurs, même pour les vols longues distances. Pour les vols spatiaux, ces problèmes deviennent plus complexes et font appel à l'attraction gravitationnelle des planètes.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Plus court chemin - Minima - Courbure - Gauss - Surface développable

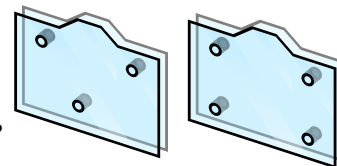


Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 plaques en plexiglas reliées par 3, 4 ou 5 tiges, 1 cuvette d'eau savonneuse

Plus court chemin entre 3 points

- Placez 3 tiges entre les 2 plaques*.
 - Plongez le tout. Ressortez le et observez.
 - Combien y a-t-il de points ? d'arêtes ? Quel angle font-elles ?
 - Placez 4 tiges entre les 2 plaques.
 - Avant de plonger le tout, imaginez comment vont se répartir les liaisons savonneuses.
- En X ? en U ? en Z ? H ???
- Plongez et observez : combien y a-t-il de points ? d'arêtes ?

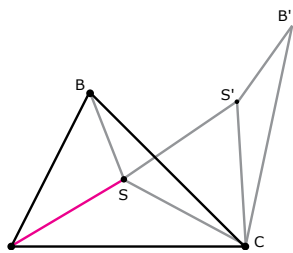


* Que se passe-t-il si l'un des angles du triangle est supérieur à 120° ?

Que retenir

Solution savonneuse et mathématique

La solution savonneuse montre le plus court chemin joignant 3 points, 4 points et plus. Le problème fut résolu pour 3 points par le Suisse **Joseph Steiner** au 19^{ème} siècle.



En voici une solution simple :
On construit le triangle CS'B',
obtenu par une rotation de 60°
à partir du triangle CSB.

On a

$$SA + SB + SC = SA + SS' + S'B'$$

Cette quantité est minimum lorsque les points A-S-S'-B' sont alignés. Dans ce cas, les angles BSC et CS'B' valent 120° . Et le problème est résolu !

Une école pour 3 villages

Les 3, 4 ou 5 points peuvent être remplacés par des villages, des fermes..., le point de Steiner par une école, un hôpital...
La réponse est donnée par l'eau savonneuse.
Comment résoudre ce problème si les nombres d'habitants sont différents ?

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 plaques en plexiglas, 1 paille

Les nids d'abeilles

- Faites une bulle entre les deux plaques. Un cylindre va se former.
- Placez une succession de petites bulles, les unes à côté des autres. Comment se raccordent-elles les unes aux autres ?
- Introduisez une lame perpendiculaire aux 2 plaques et observez.
- Si les bulles sont de même taille, quelles formes prennent-elles ? Comment s'assemblent-elles ?

En savoir plus

Un empilement de disques laisse des espaces vides. C'est l'hexagone régulier qui occupe la plus grande surface sans laisser de trous. On le retrouve dans les nids d'abeilles. Les abeilles ont-elles trouvé la solution optimale ? Le fond des cellules d'un nid d'abeille n'est pourtant pas la forme la plus économique pour occuper un volume donné. On a depuis trouvé mieux sans connaître encore la meilleure forme.

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : en fil de fer : 2 cercles - 4 tiges



Surfaces minimales

entre 2 cercles, 2 droites, 4 droites...

- Sortez les deux cercles de la cuve et éloignez-les un peu l'un de l'autre. Où retrouve-t-on cette surface ?
- Sortez deux barres de la cuve, éloignez un peu l'une de l'autre et tournez-les un peu l'une par rapport à l'autre. Où retrouve-t-on cette surface ?
- Refaites l'expérience avec 4 barres reliées.

Métiers des maths

Ces surfaces minimales se retrouvent dans la physico-chimie des matériaux, en biologie et en architecture (structures en voile ou même en béton).

Les formes en nid d'abeille ont comme propriétés avantageuses d'être légères, résistantes et rigides. De telles formes, faites en aluminium, sont employées dans les structures des Airbus A380 et des TGV, les parois de satellites...

En carton ou polyvinyle, elles sont couramment utilisées dans les portes, les palettes de transport...

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Optimisation - Surfaces minimales - Nid d'abeille - Structure tendue

9. Prouver



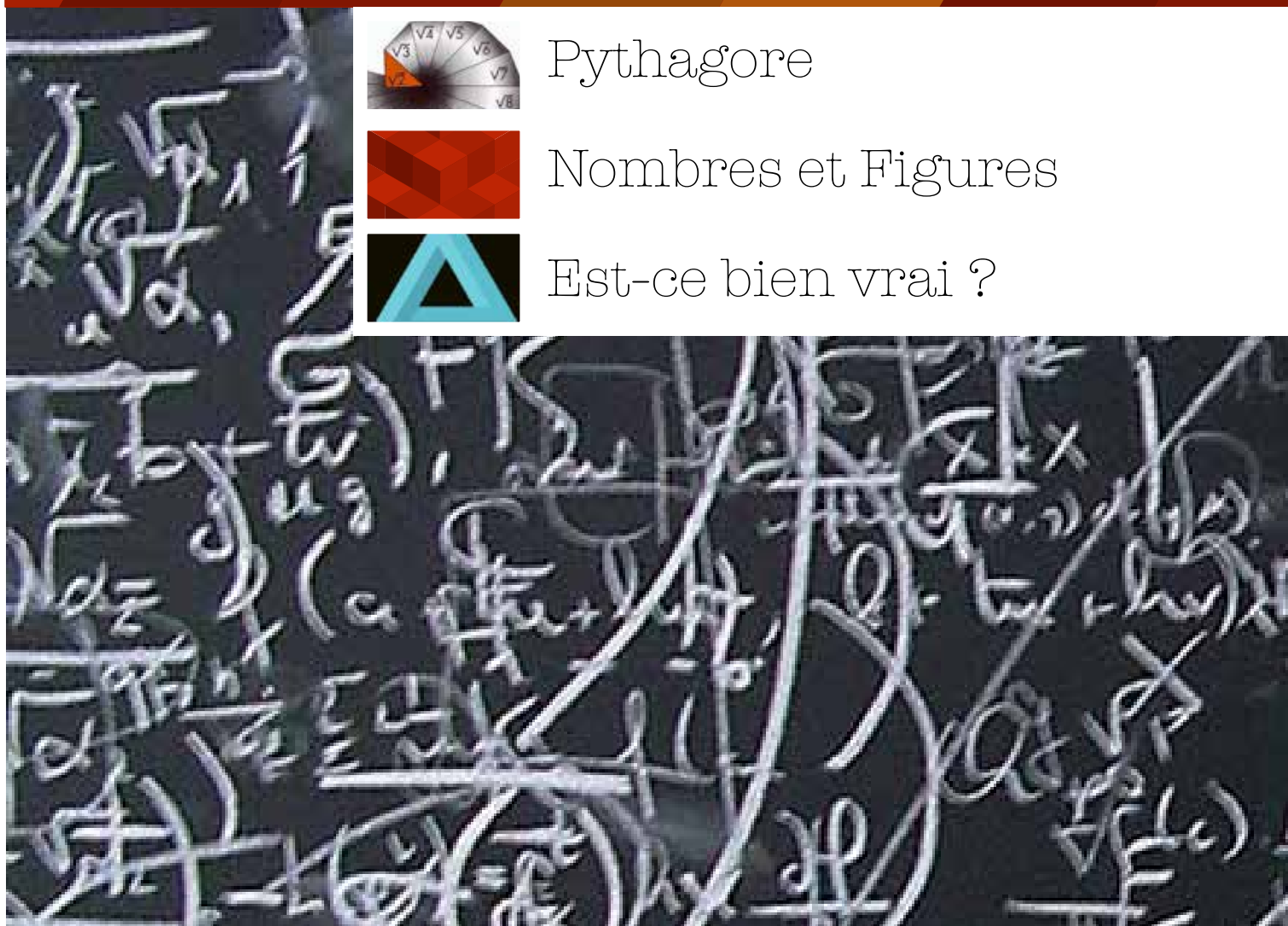
Pythagore



Nombres et Figures



Est-ce bien vrai ?





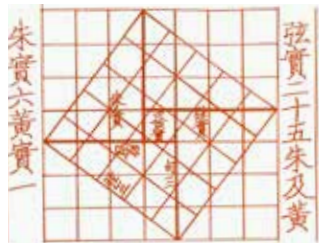
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 puzzles à découper

113

114

Que retenir



Chou-pei Suan-King

(1105 avt J.-C.) - Chine.

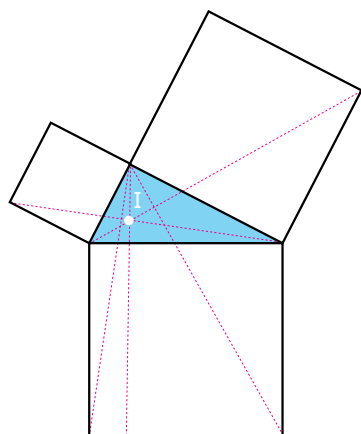
3000 ans de recherche

Les anciens, savants d'Égypte ou de Chine, connaissaient déjà beaucoup de résultats formulés avec des nombres entiers (comme $3^2 + 4^2 = 5^2$).

Les Grecs ont été les premiers à essayer de prouver ces résultats de manière générale.

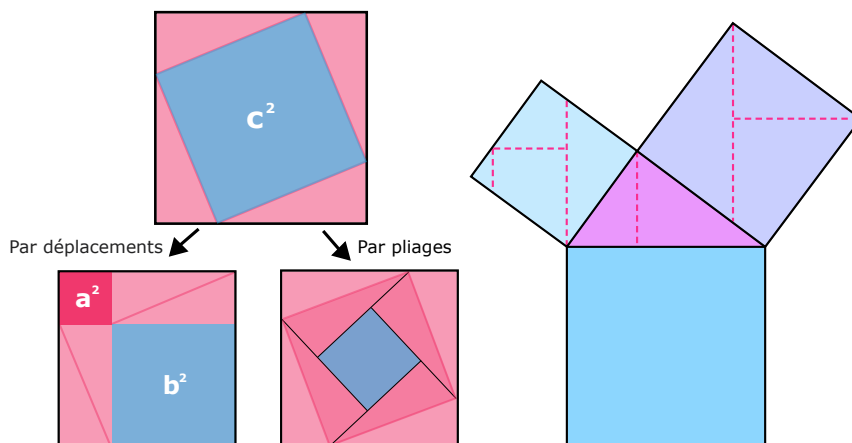
Ainsi, **Pythagore** (6^e s. avt J.-C.) donna son nom au théorème sur « Le carré de l'hypoténuse... » dont **Euclide** (3^e s. avt J.-C.) a fourni la plus ancienne preuve connue.

Il existe près de 400 démonstrations différentes ! Ces preuves ont débouché sur de nouveaux problèmes et de nouveaux résultats comme la nature non rationnelle de la diagonale des carrés de longueur entière.



Le théorème de Pythagore

En déplaçant les pièces de chaque puzzle, faites apparaître une démonstration du théorème de Pythagore.



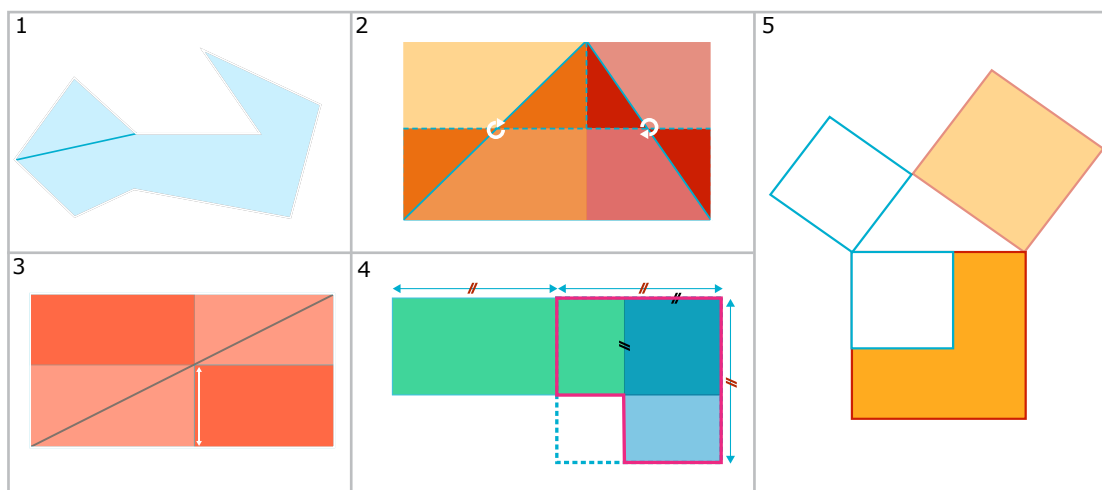
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier, crayon, ciseaux

D'un polygone au carré de même aire

Par découpage, retrouvez des démonstrations d'Euclide :

- 1. Tout polygone peut être découpé en une somme de triangles.
- 2. Tout triangle peut être découpé pour reconstruire un rectangle de même aire.
- 3. Tout rectangle peut être découpé en un autre rectangle de même aire dont la largeur est fixée.
- 4. Tout rectangle peut être considéré comme la différence de 2 carrés.
- 5. Grâce au théorème de Pythagore, on peut construire un carré égal à la différence de 2 carrés !



Conclusion

Tout polygone peut être découpé pour reconstituer un carré de même aire. Depuis les Grecs, le calcul d'aire se ramène à comparer la surface à celle d'un carré. On dit que la surface est **quarrable**. Remarquez qu'elle est mesurée en « **cm², m², km²...** ».

Pythagore



Faites-le vous-même

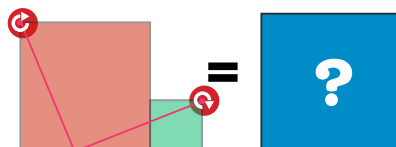
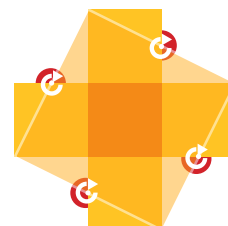
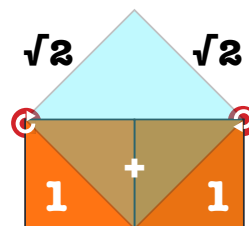
MATÉRIEL : Papier, crayon, ciseaux

Dupliquez, tripliquez...

Construisez par découpage un carré :

- égal à la somme de deux carrés,
- égal à deux fois un carré donné,
- égal à 3 fois, 5 fois... un carré donné.

Utilisez pour cela le minimum de découpages.



Que retenir

Les Chinois considéraient les problèmes mathématiques, arithmétiques comme géométriques, comme des puzzles. Pour **les Grecs**, ces problèmes de quadrature et de duplication ont débouché sur de célèbres problèmes :

- l'irrationalité de la diagonale du carré de côté 1,
- la duplication du cube,
- la quadrature du cercle.

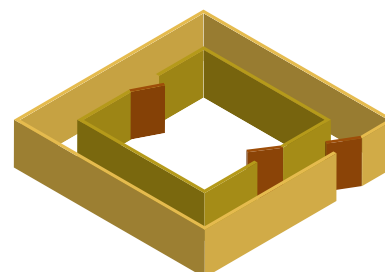
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier, crayon

Le divan

- Quelles sont les dimensions maximales d'un divan qui doit passer par un couloir d'un mètre de large et tournant à angle droit ?
- Peut-il entrer dans la pièce centrale ?
- Et si c'était simplement une planche (ou une échelle) ?

NB : les portes font 80 x 210 cm !



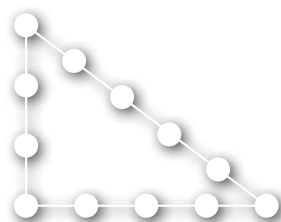
Métiers des maths

La recherche de preuves, de démonstrations mettant en œuvre des résultats mathématiques déjà acquis est à la base de l'activité du mathématicien et en fait son originalité.

Le théorème de Pythagore trouve son utilité pratique pour construire des longueurs irrationnelles comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... mais est aussi utilisée encore aujourd'hui par les maçons, les architectes et les déménageurs de gros objets !

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Pythagore - Euclide - Hypoténuse - Nombre irrationnel - Duplication - Quadrature





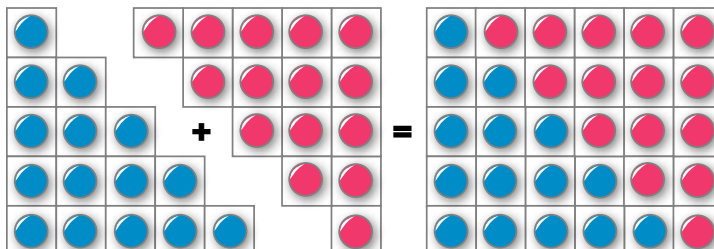
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Des jetons ronds ou carrés

Les nombres triangulaires : 1, 3, 6, 10, 15...

Ce sont les sommes des premiers nombres entiers.

Deux méthodes pour ces nombres T :



ou :

$$\begin{aligned}
 &01 + 02 + 03 + 04 + 05 + 06 + 07 + 08 + 09 + 10 + 11 + 12 \\
 &+ 12 + 11 + 10 + 09 + 08 + 07 + 06 + 05 + 04 + 03 + 02 + 01 \\
 &= 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 \\
 &= 12 \times 13 \\
 &\text{d'où } T = \frac{12 \times 13}{2}
 \end{aligned}$$

et prouvez, plus généralement, que : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$

Vérifiez sur les premiers nombres entiers que chacun s'écrit comme somme d'au plus 3 nombres triangulaires.

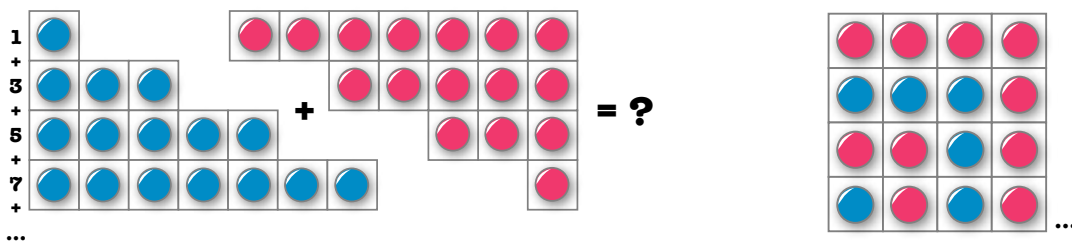
Que retenir ?

Des premières preuves simples, compréhensibles par un collégien et réalisées avec des figures géométriques, nous sommes passés aujourd'hui à des preuves qui représentent des centaines de pages, qui nécessitent l'utilisation d'ordinateurs et qui ne sont vérifiables que par un petit nombre de spécialistes.

Ces suites de nombres, figurés par des points - ont été étudiées par **Pythagore**, **Diophante** mais aussi **Pascal**. En dimension 3, on trouve aussi les nombres pyramidaux, cubiques...

Les nombres carrés : 1, 4, 9, 16...

Ce sont les sommes des premiers nombres impairs. Deux méthodes pour calculer ces sommes :

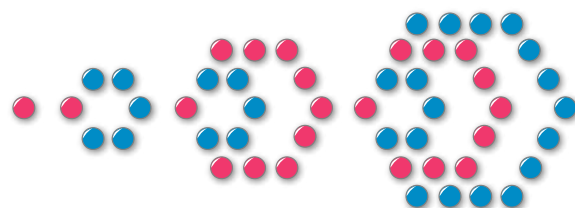


Et prouvez, plus généralement, que : $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$
c'est-à-dire que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n au carré.

Vérifiez sur les premiers nombres entiers que chacun s'écrit comme somme d'au plus 4 nombres carrés.

Les nombres pentagonaux, hexagonaux...

Ce sont les sommes des premiers nombres représentés sur un pentagone, un hexagone... Trouvez-les et trouvez leur formule générale.



Vérifiez sur les premiers nombres entiers que chacun s'écrit comme somme d'au plus 5 nombres pentagonaux, 6 nombres hexagonaux...



Faites-le vous-même

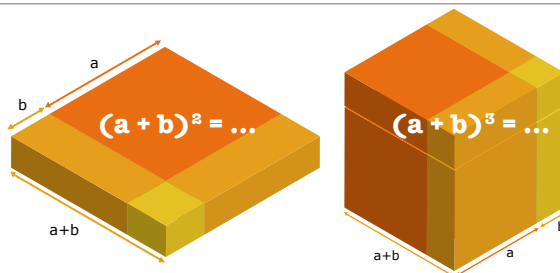
MATÉRIEL : Blocs de bois ou pièces en carton

Algèbre et géométrie

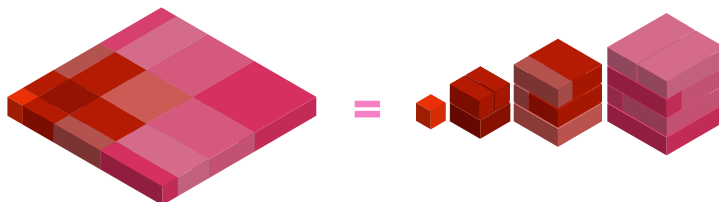
Avec ces pavés retrouvez les formules :

Et retrouvez de même les formules :

$$(a - b)^2 = \dots \quad a^2 - b^2 = \dots$$

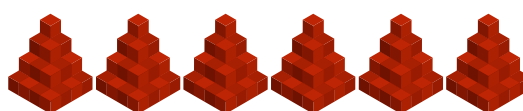


Avec ces blocs, prouvez que :



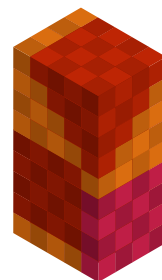
$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots$$

Avec 6 blocs de ce type, construisez une tour compacte.



Et prouvez plus généralement, que pour tout entier n on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier, crayon



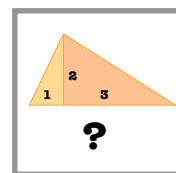
De conjectures en preuves

Les triangles de Pythagore

Trouvez les premiers triangles rectangles dont les longueurs sont des nombres entiers dont deux sont consécutifs (comme 3 - 4 - 5). Essayez d'en déduire tous les triplets qui vérifient cette propriété.

Les carrés de Fermat

Trouvez les premiers nombres premiers qui s'écrivent comme somme des carrés de deux entiers (comme $5 = 1^2 + 2^2$). Essayez d'en déduire tous les nombres premiers qui s'écrivent ainsi.



Métiers des maths

L'activité première d'un scientifique et d'un mathématicien est de trouver et de formuler un « bon » problème.

Qu'est-ce qu'un bon problème ?

C'est comme l'aurait dit **David Hilbert** lors du congrès mondial des mathématiques à Paris en 1900 un problème qui peut être compris par n'importe quel collégien !

Mais c'est aussi un problème qui fait avancer les connaissances, même s'il n'est pas lui-même résolu. Ainsi en a-t-il été de la dernière conjecture de **Fermat** qui a fourni de nombreux résultats avant d'être démontrée par **Andrew Wiles** en 1994, 350 plus tard.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Nombres figurés - Suites d'entiers - Conjecture

Est-ce bien vrai ?



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 2 puzzles de 4 pièces

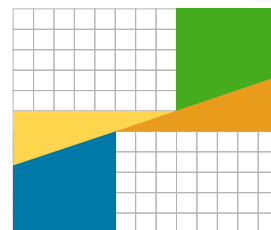
115

$$63 = 64 = 65$$

Avec ces 4 pièces de puzzle, fabriquez un carré puis un rectangle.

- Quelle est l'aire de chacun ?
- Et l'aire de la surface de départ ?

Question : pourquoi les nombres de la suite de **Fibonacci** interviennent-ils ?



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : 1 patron à reconstruire

116

Illusion ou Réalité ?

Ces objets existent-ils ? Pouvez-vous les construire ? La réponse est dans une phrase de l'humoriste français Pierre Dac : « *Tout dépend du point de vue auquel on se place !* »



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier, crayon

De Pythagore à Wiles

- Vérifiez que : $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$ $7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$
- Trouvez d'autres cubes décomposables en 3 cubes.

Que retenir ?

On savait, bien avant **Pythagore**, qu'il existe des nombres entiers qui vérifient :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Trouvez-en d'autres en dehors de (0, 0, 0) et de (3, 4, 5).

Pierre de Fermat émis en 1641 la **conjecture** qu'un cube de côté entier ne pouvait être décomposé en 2 cubes de côtés entiers et, plus généralement, que, pour $n \geq 3$, l'équation :

$$x^n + y^n = z^n$$

n'avait pas de solutions en nombres entiers autres que des solutions en 0 et 1.

Avant d'être prouvée 350 ans plus tard par **Andrew Wiles**, elle fut l'objet de nouvelles conjectures : était-elle vraie ? improuvable ? indécidable ?

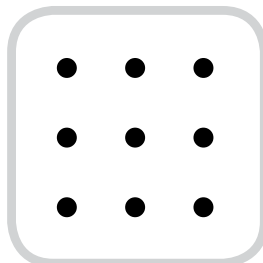
Est-ce bien vrai ?



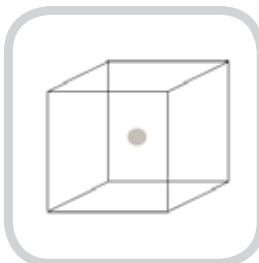
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Papier, crayon, 6 allumettes

Changez de point de vue



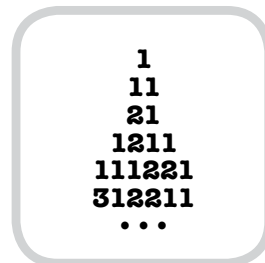
- Reliez ces 9 points par 4 segments sans lever le crayon du papier.



- Dans ce cube à faces transparentes, un trou a été fait. Sur quelle(s) face(s) peut-il être ?



- Faites un triangle avec 3 allumettes, 2 triangles avec 5 allumettes... 4 triangles avec 6 allumettes !



- Trouvez la suite...

Que retenir ?

Utilisées dans les tests psychologiques, ces questions montrent qu'en mathématique, comme dans la vie, il faut savoir être " flexible " et aborder les problèmes sous tous les angles.

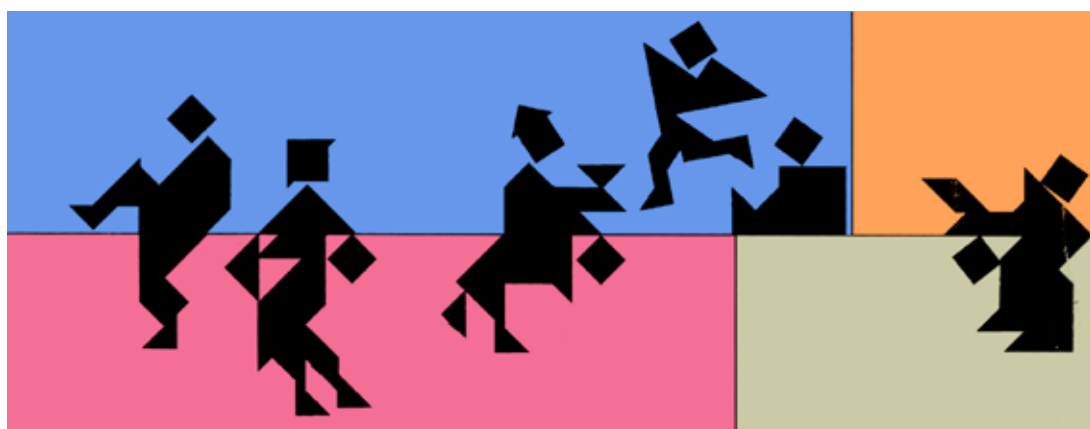
Métiers des maths

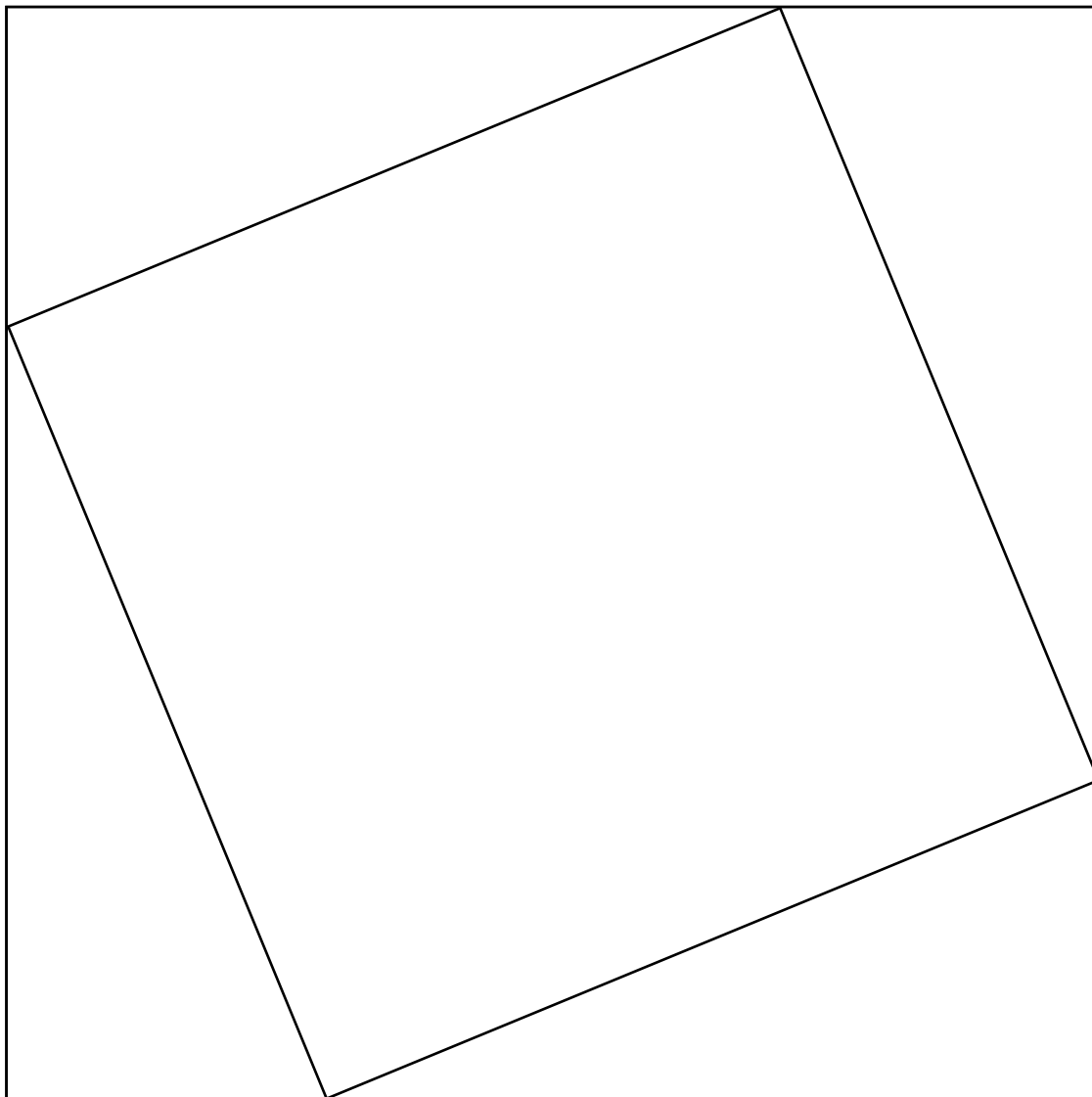
Pouvons-nous toujours démontrer quelque chose que nous savons être vrai ?

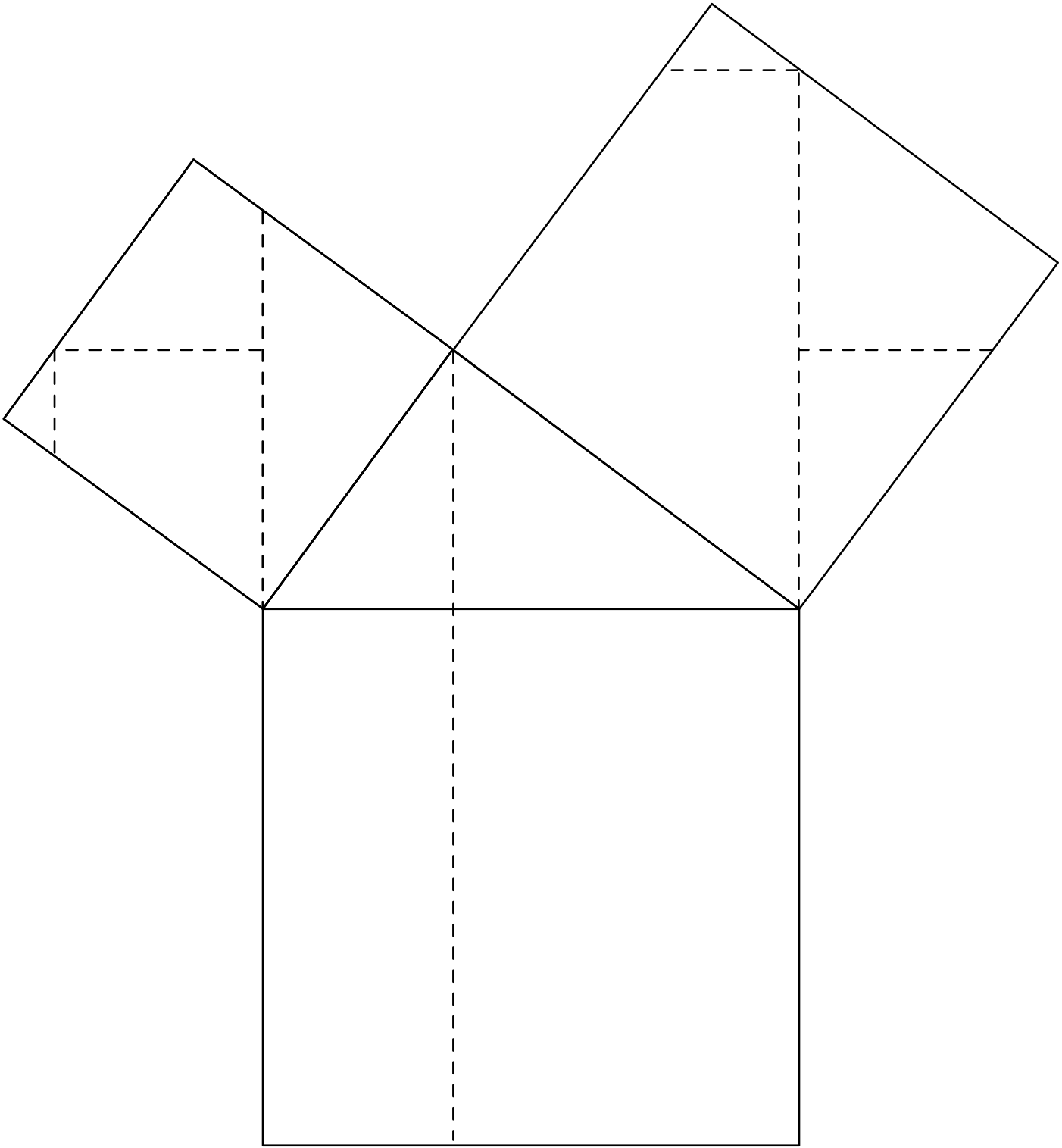
En 1931, **Kurt Gödel** a répondu par la négative avec son fameux théorème dit « d'incomplétude ». Il a prouvé que les deux notions de vérité et de démontrabilité ne coïncident pas en prouvant - sur un exemple d'arithmétique - qu'une conjecture peut être vraie mais aussi indémontrable. Depuis lors, en mathématique comme en informatique, les problèmes jugés jusqu'à présent indécidables sont l'objet de constantes recherches.

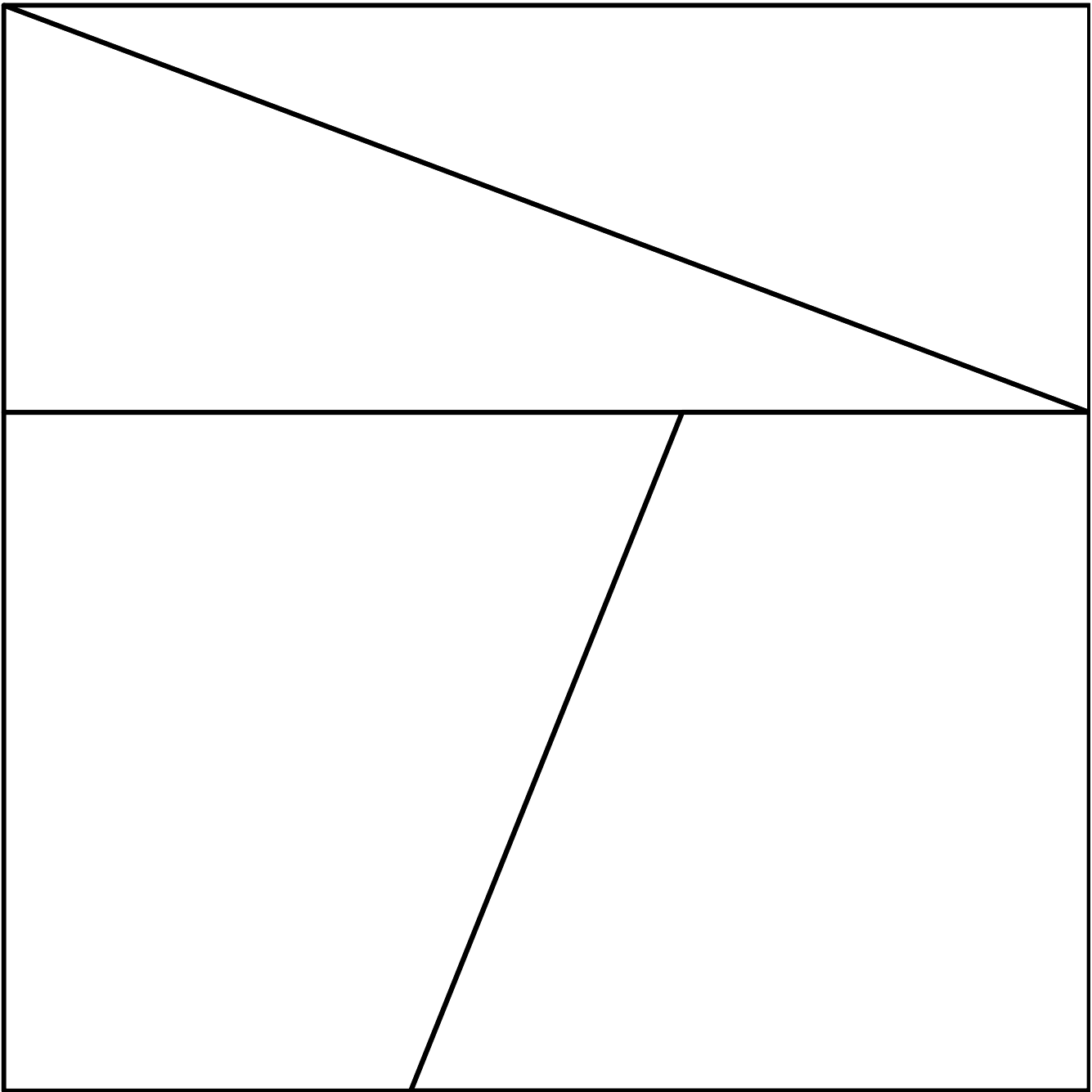
MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Indécidable - Calculable - Godel - Problèmes P-NP

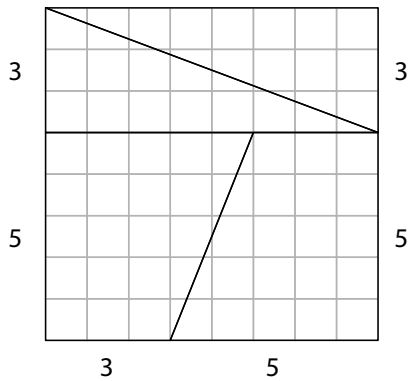




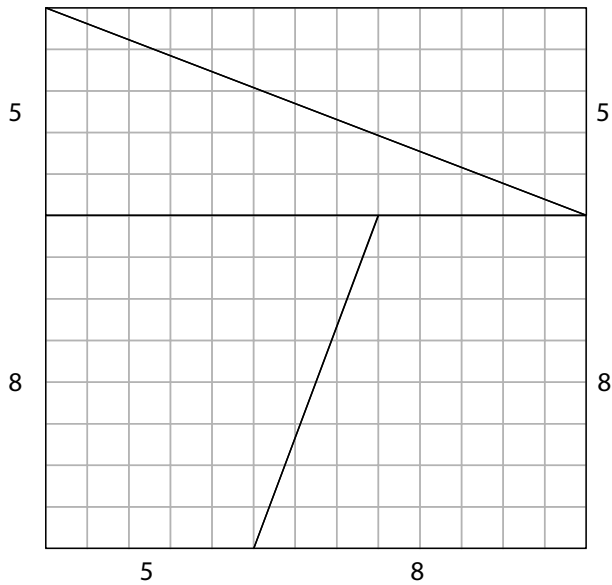


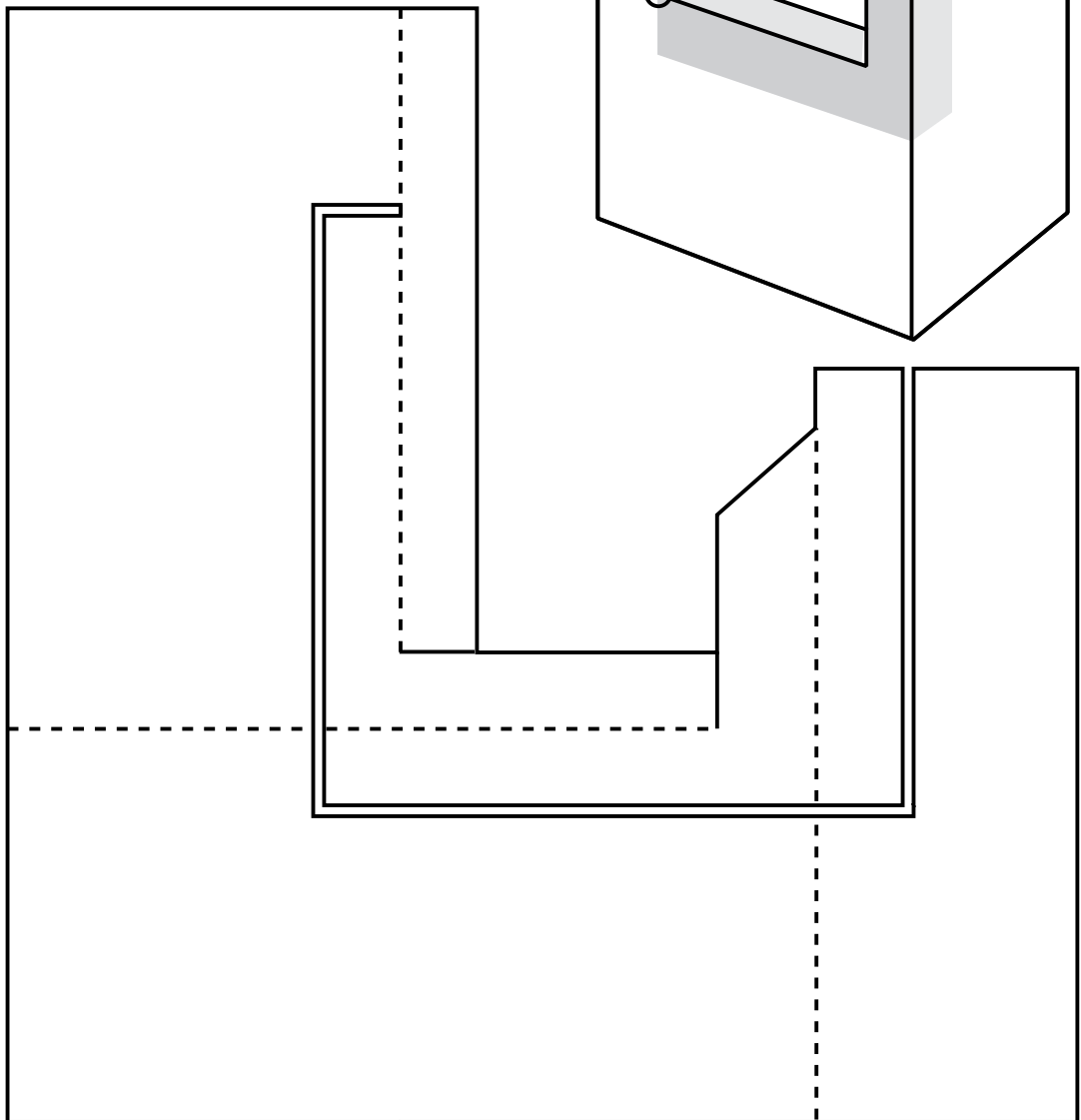
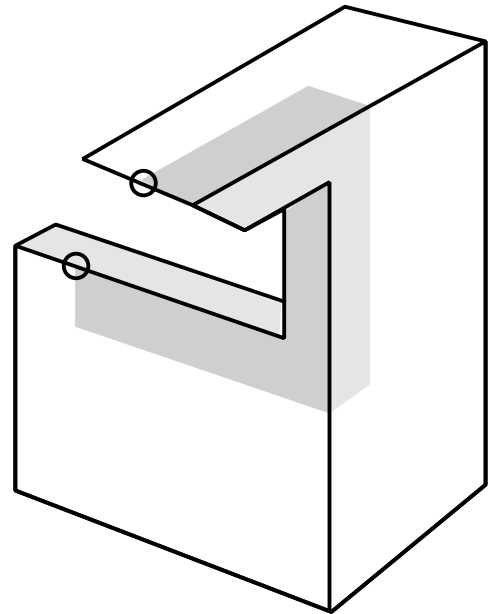


8



13





10. Conclure



Expérimentez



Faites des hypothèses



Prouvez !





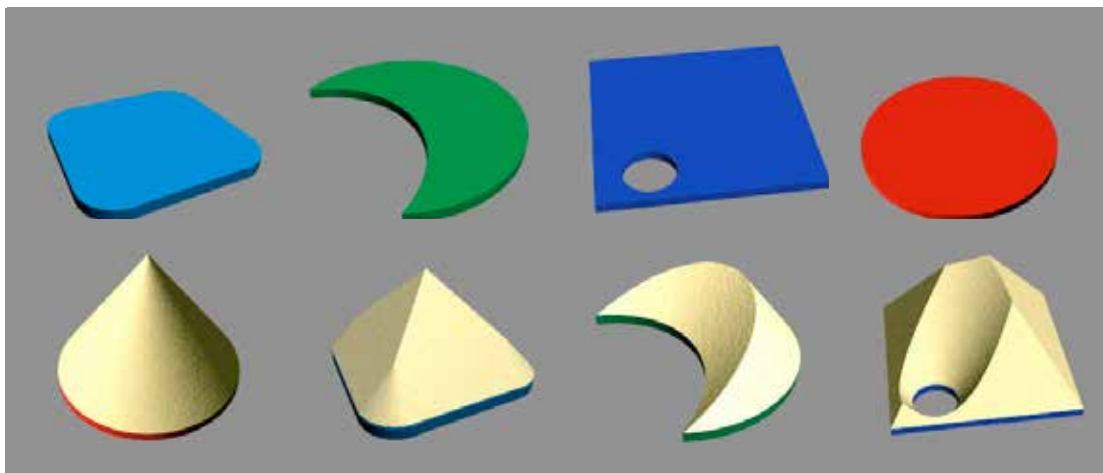
Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Polygones en carton, 1 bac à sable sec et fin

La géométrie des tas de sable

Choisissez une plaque. Versez du sable dessus jusqu'à ce qu'il déborde.

- Quand obtenez-vous une pyramide ? un cône ?
- Où se situe le sommet ?
- Dans les autres cas, quelle est la forme des faces ?
- Comment se situent les arêtes ? les arêtes faîtières ?
- Que se passe-t-il lorsque les plaques ont un trou ?



www.tasdesable.com

Que retenir ?

Tout au long de ce dossier nous vous avons proposé une suite de situations où vous, et surtout vos élèves, êtes invités à expérimenter. Ces situations sont extraites de travaux de mathématiciens, de physiciens, d'enseignants de mathématiques, de pédagogues et de didacticiens, qu'ils en soient tous ici remerciés.

Elles sont aussi extraites des expériences proposées dans l'exposition « **Pourquoi les mathématiques ?** » (en anglais « **Experiencing Mathematics!** »).

Toutes peuvent être expérimentées avec un matériel très simple. Beaucoup peuvent trouver un prolongement en utilisant l'ordinateur.

Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Feuilles de papier A4, **dessins de plisages**

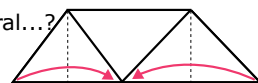
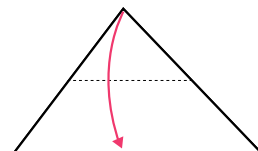
121

122

123

Maths & Plis

- Quelles sont les dimensions d'une feuille de papier ? sa masse ?
- Pliez une feuille en deux. Quelles sont les nouvelles dimensions ?
- Vérifiez qu'elles sont proportionnelles aux précédentes.
- Vérifiez que $L_4/L_4 = L_5/L_5 = \dots = \sqrt{2}$
- Est-ce vrai pour toute feuille de papier ?
- Pourquoi dit-on que c'est du papier 80g (ou 120g, 150g, ... 250g) ?
- Avec ces feuilles, comment faire par pliage un carré ? un triangle équilatéral... ?
- Sont-ils les plus grands ?



La somme des angles d'un triangle est de 180°.

- Vérifiez de même que les bissectrices d'un triangle se coupent en un même point.
- Faites de même pour les hauteurs, les médiatrices...
- Comment faire un pentagone régulier, un hexagone ?



Métiers des maths

La **démarche expérimentale** est une des démarches utilisées par le scientifique. Elle peut aussi être celle du mathématicien qui, s'étant posé une – bonne – question, cherche à lui apporter des réponses. Dans certains domaines des sciences, en astronomie, en physique des particules, en biologie par exemple, elle peut être impossible à réaliser pour des raisons pratiques, éthiques...

La **démarche de l'enseignant** de mathématiques : apprendre à proposer des situations expérimentales où chaque élève va s'approprier une question, la faire sienne et chercher à lui trouver des réponses.

La **démarche de l'élève** en mathématiques : apprendre à formuler des hypothèses, à les tester et à prouver qu'elles sont vraies... ou fausses.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Démarche expérimentale - Méthodes scientifiques



Que retenir ?

Petites questions, grands problèmes

Les mathématiques ont toujours offert des énoncés de problèmes amusants ou étonnants. Parmi tous ces problèmes récréatifs, certains proposent de bonnes questions, c'est-à-dire des questions dont la recherche de réponses, voire les réponses elles-mêmes permettent de mettre en lumière un fait mathématique ou scientifique, ou une démarche de raisonnement importante. Une bonne question peut aussi être une question qui permet de débusquer les **modèles implicites** des élèves et de leur faire constater leur aspect non opératoire. C'est ce que proposent ici ces questions : conservation des quantités pour l'eau et le vin, topologie pour le ruban, modélisation pour le café, échantillonnages pour le riz, logique pour les bâtons,...



De l'eau dans le vin !

Deux verres contiennent le même volume, l'un d'eau, l'autre de vin (ou de café...).

Prenez une cuillerée d'eau, versez-là dans le vin et mélangez.

Prenez une cuillerée de ce mélange, versez-là dans l'eau.

- Y a-t-il plus d'eau dans le vin que de vin dans l'eau ?
- Comment prouver votre hypothèse ?



Le ruban de Möbius

Fabriquez un bracelet avec une bande de papier. En deux coups de ciseaux, vous pouvez en faire 3.

Fabriquez un bracelet de "Möbius" en faisant faire un demi-tour au ruban.

- Combien de coups de ciseaux pour en faire 3 ?



Des nœuds premiers

Fabriquez chacun de ces nœuds.

- Combien ont-ils au minimum de croisements ?
- Essayez de trouver les premiers nœuds à 3, 4... croisements.



Un kilo de café ?

1 kg de billes d'un cm de diamètre.

1 kg de billes d'un mm.

- Quel est celui qui occupe le plus petit volume ?
- Et si l'on remplace les billes par du café en grains et du café moulu ?



Un kilo de riz !

- Combien y a-t-il de grains de riz dans 1 kilo de riz !?

- Trouvez au moins 2 méthodes pour trouver une réponse.



Une heure !

2 bâtons (ou 2 cordes), bien que différents, brûlent chacun en une heure.

- Comment mesurer 1/4h ? 1/2h ? 3/4h ?
- Trouvez au moins une méthode.

Métiers des maths

*Savoir, est-ce seulement prendre conscience de son ignorance ?
(in Le Ménon – Platon)*

En mathématiques, les élèves, surtout dans le secondaire – mais aussi après – montrent une faible habileté à **débattre** et à convaincre avec des arguments mathématiques et logiques.

Ils doivent pour cela apprendre à exprimer les différents points de leur argumentation, à expliquer les relations logiques qui conduisent à leurs conclusions.

Savoir prouver, c'est apprendre à débattre en énonçant des arguments mathématiquement, scientifiquement vrais. Savoir prouver, c'est aussi savoir ce qu'est une preuve, se l'approprier et la réutiliser.

MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

Débattre - Méthode - Logique - Aristote - Platon - Descartes

Prouvez !



Faites-le vous-même

MATÉRIEL : Cartons à découper, Flip books à réaliser

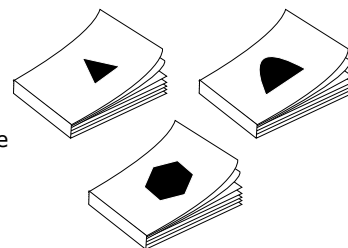
124 125 126

Flatland : un monde plat

Qui suis-je ?

Avec chaque famille de dessins, réalisez un livre animé (flip book).
Chaque flip book montre les traces laissées par un objet qui traverse un écran plat.

- Pour chaque flip book, quel peut-être cet objet ?

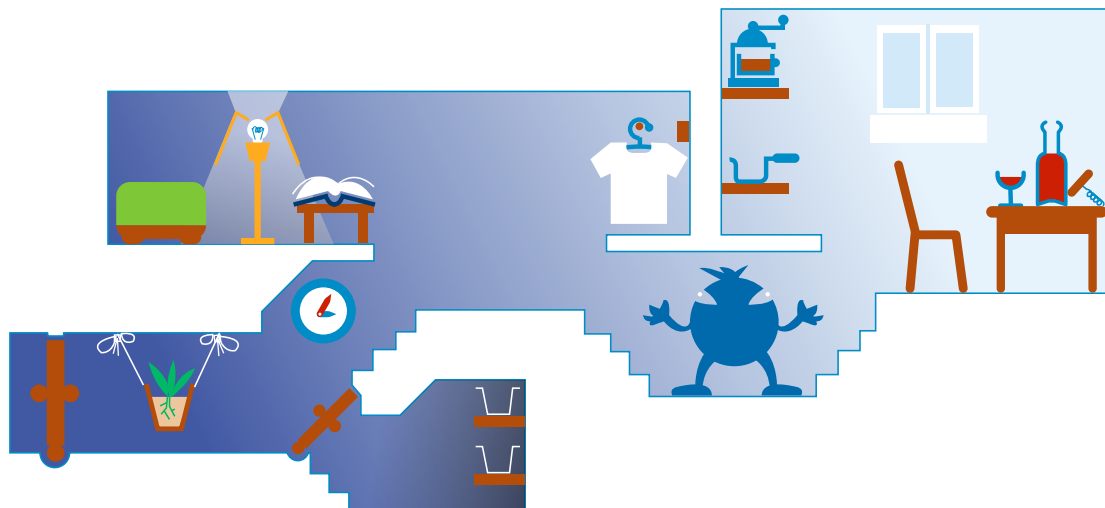


Pour aller plus loin

La vie à Flatland

Ce dessin représente la maison d'un habitant d'une planète imaginaire qui n'aurait que deux dimensions, où tout serait plat !

- Essayez de trouver les 7 erreurs.
- Imaginez d'autres objets qui pourraient exister – ou ne pas exister – dans ce plat pays.



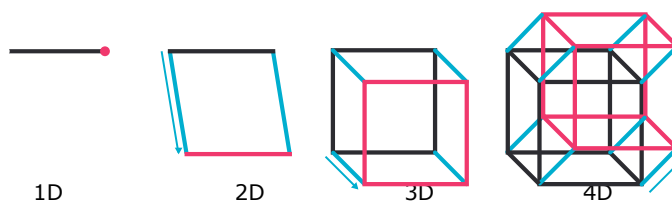
Que retenir ?

Proposer aux élèves une démarche expérimentale en mathématiques ne consiste pas seulement à leur faire manipuler des objets géométriques, des nombres, des lettres.

Ces expériences doivent leur permettre de s'approprier la situation (c'est la **phase d'expérimentation**), d'exprimer oralement ou par écrit des hypothèses (**phase de formulation**) et enfin de valider ces hypothèses (**phase de validation**).

Dans cette approche expérimentale, il restera une dernière phase pour l'enseignant : **mettre en avant les acquisitions mathématiques faites par les élèves**, acquisitions de contenus ou acquisitions de raisonnements.

Vers la 4^{ème} dimension



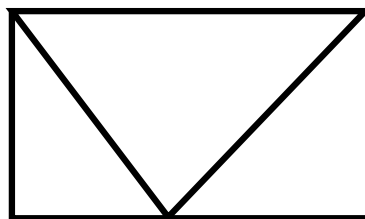
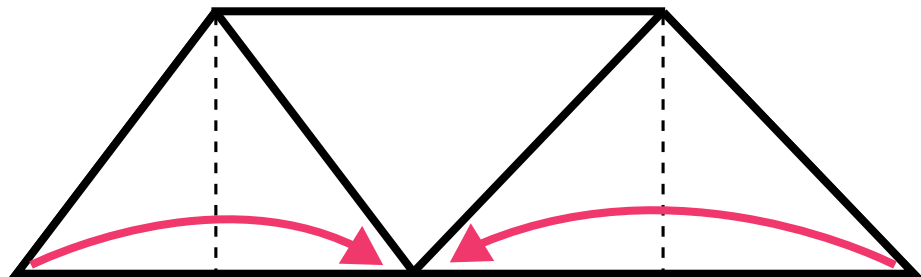
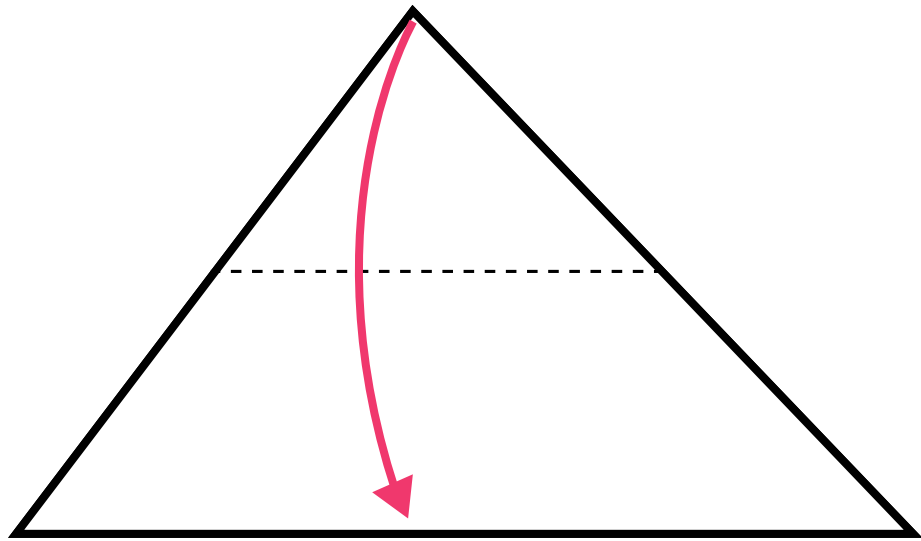
Métiers des maths

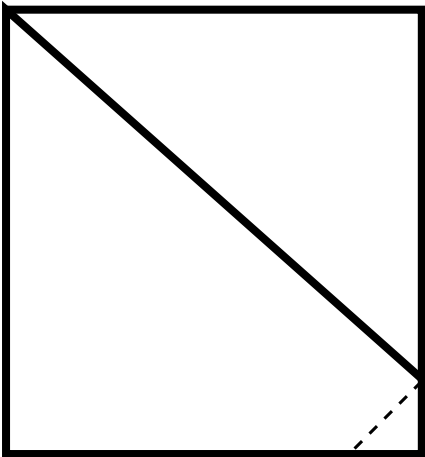
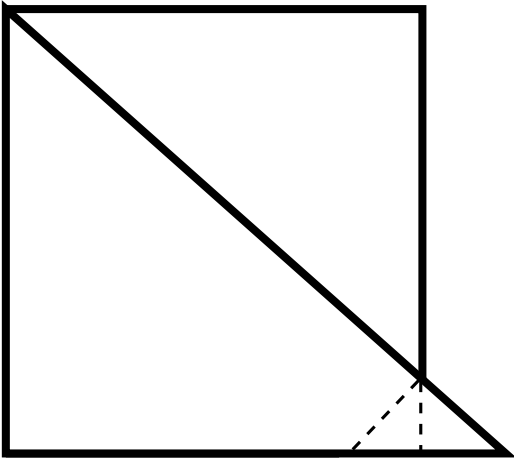
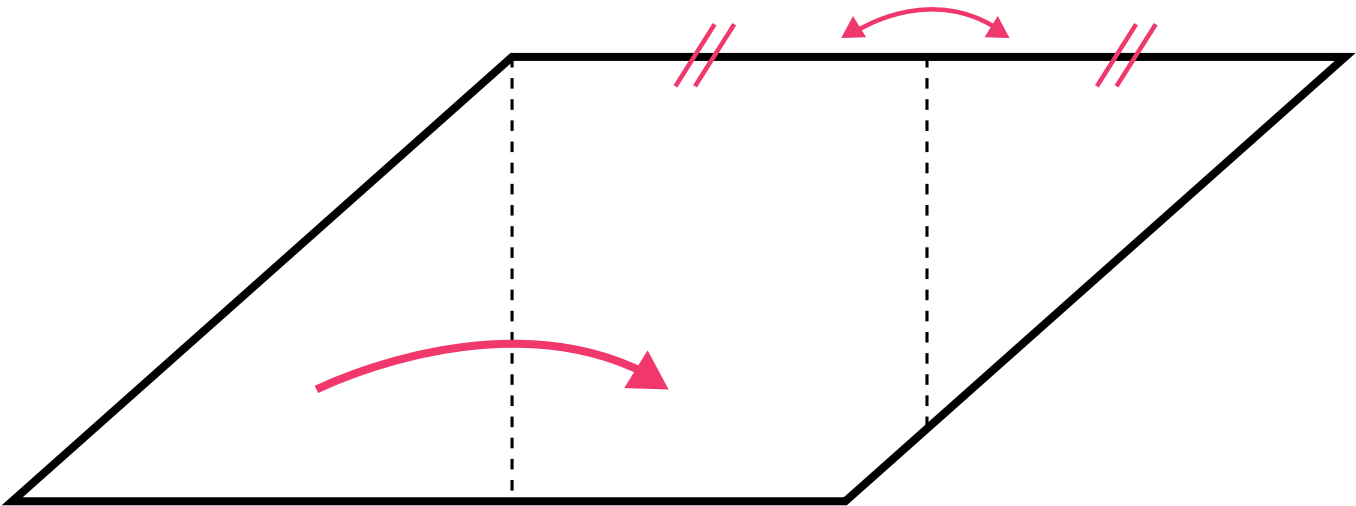
Comme le mathématicien, comme le physicien et tout scientifique, l'enseignant de mathématiques doit apprendre à prouver et surtout apprendre aux élèves à prouver, leur apprendre à débattre et à fournir pour cela des arguments s'appuyant sur les outils mathématiques : les faits mathématiques et la logique mathématique.

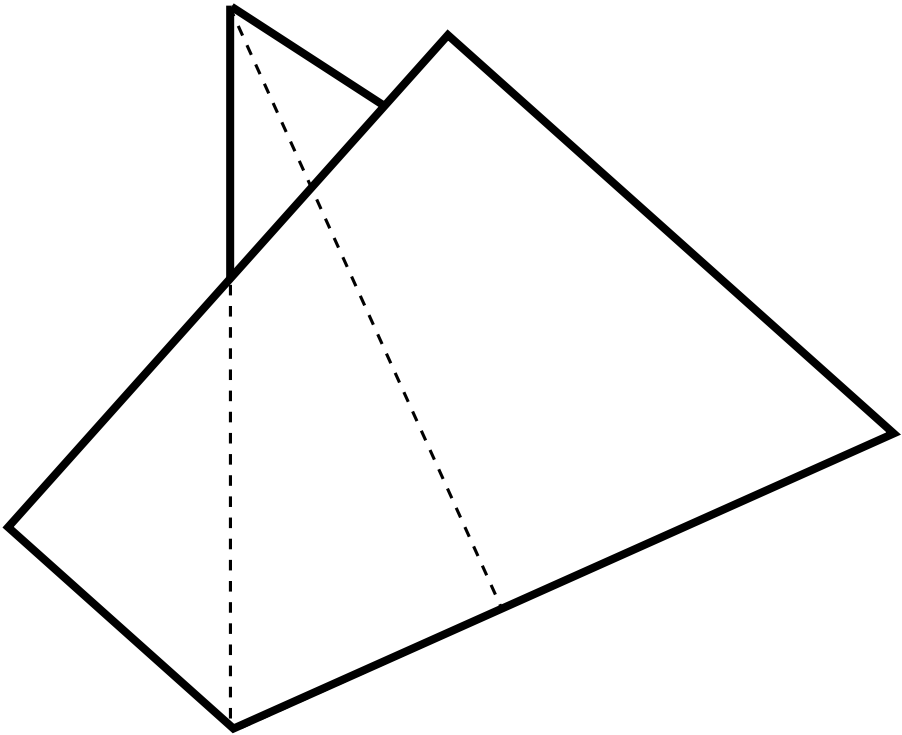
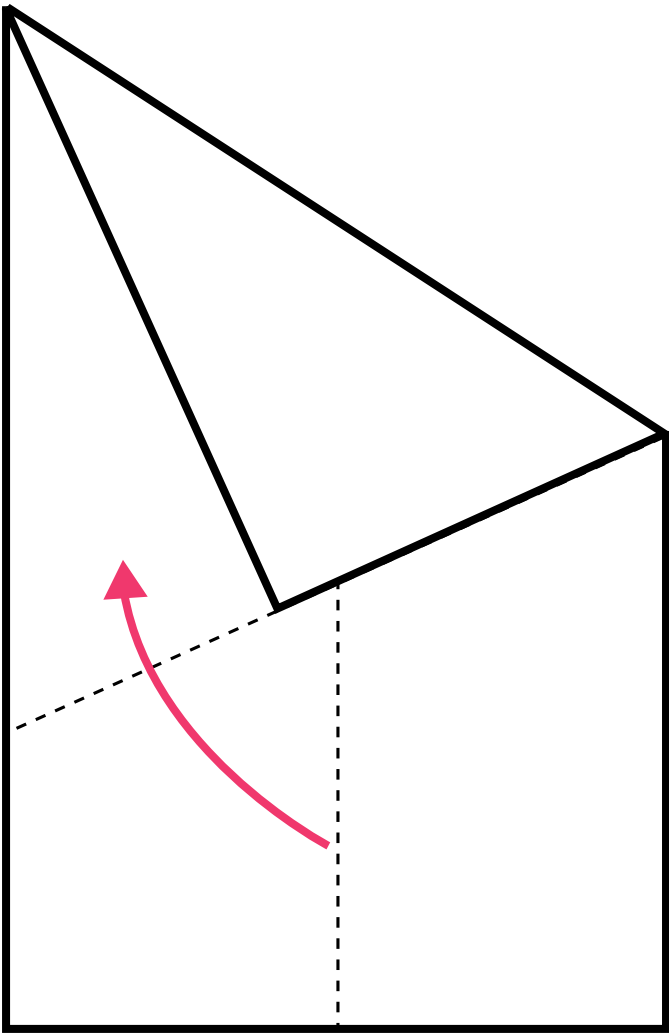
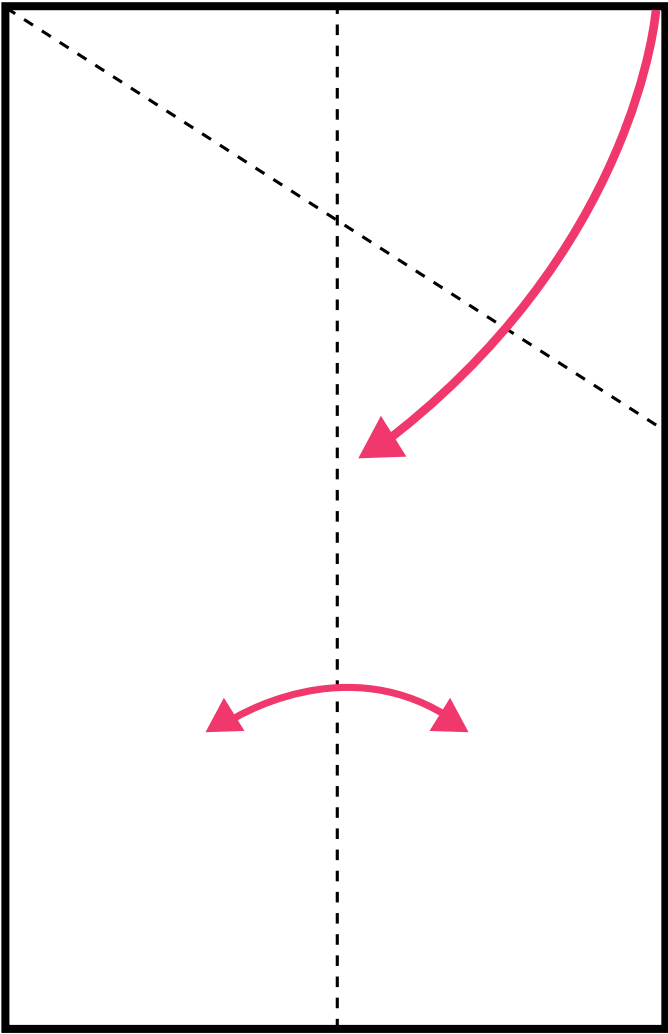
Apprendre à prouver qu'une solution existe ou n'existe pas, qu'un énoncé est vrai ou faux ou – plus dur – qu'il n'est pas possible de le prouver, en tout cas avec les connaissances de l'élève à ce moment-là.

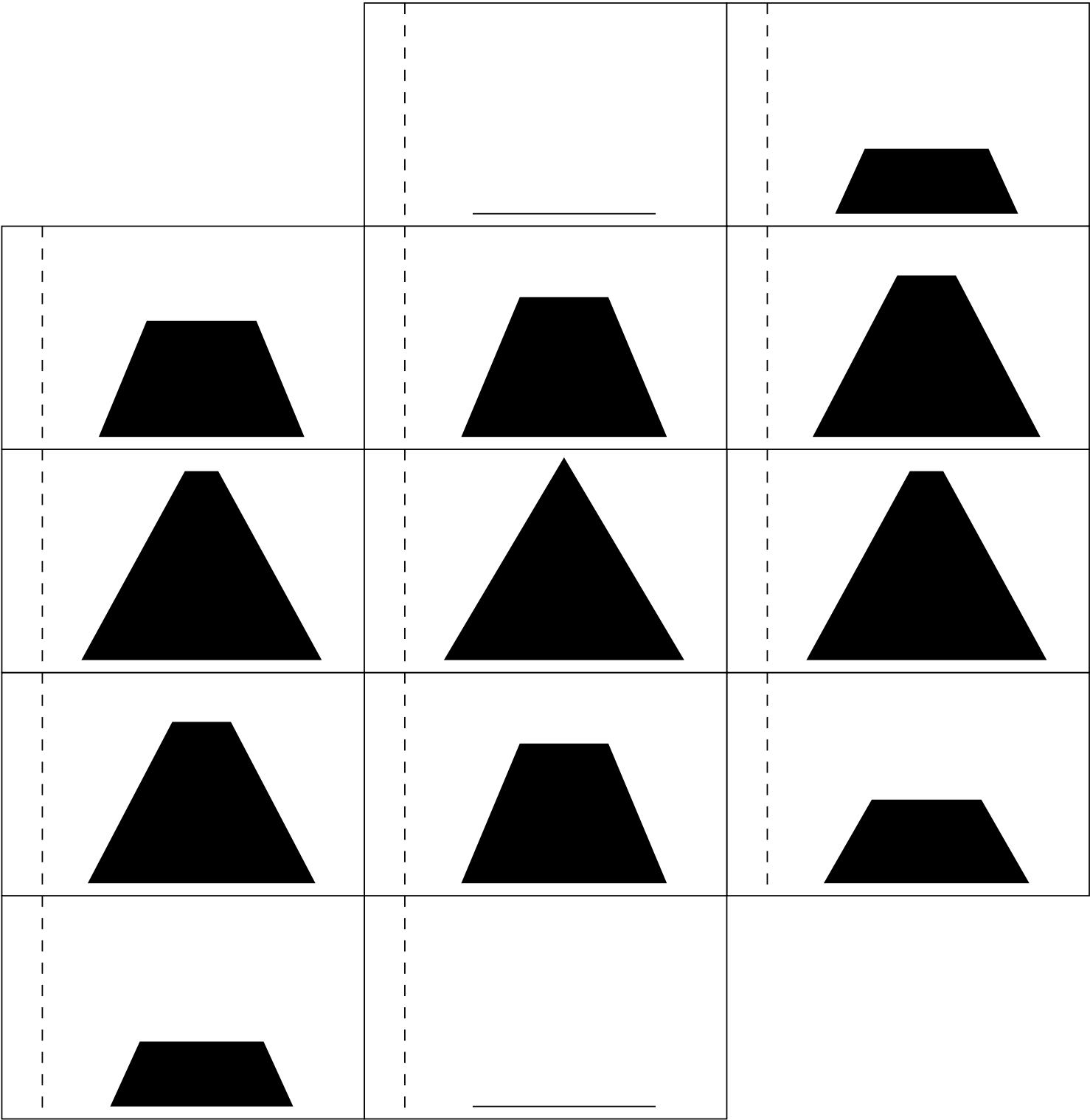
MOTS CLÉS POUR SITES WEB :

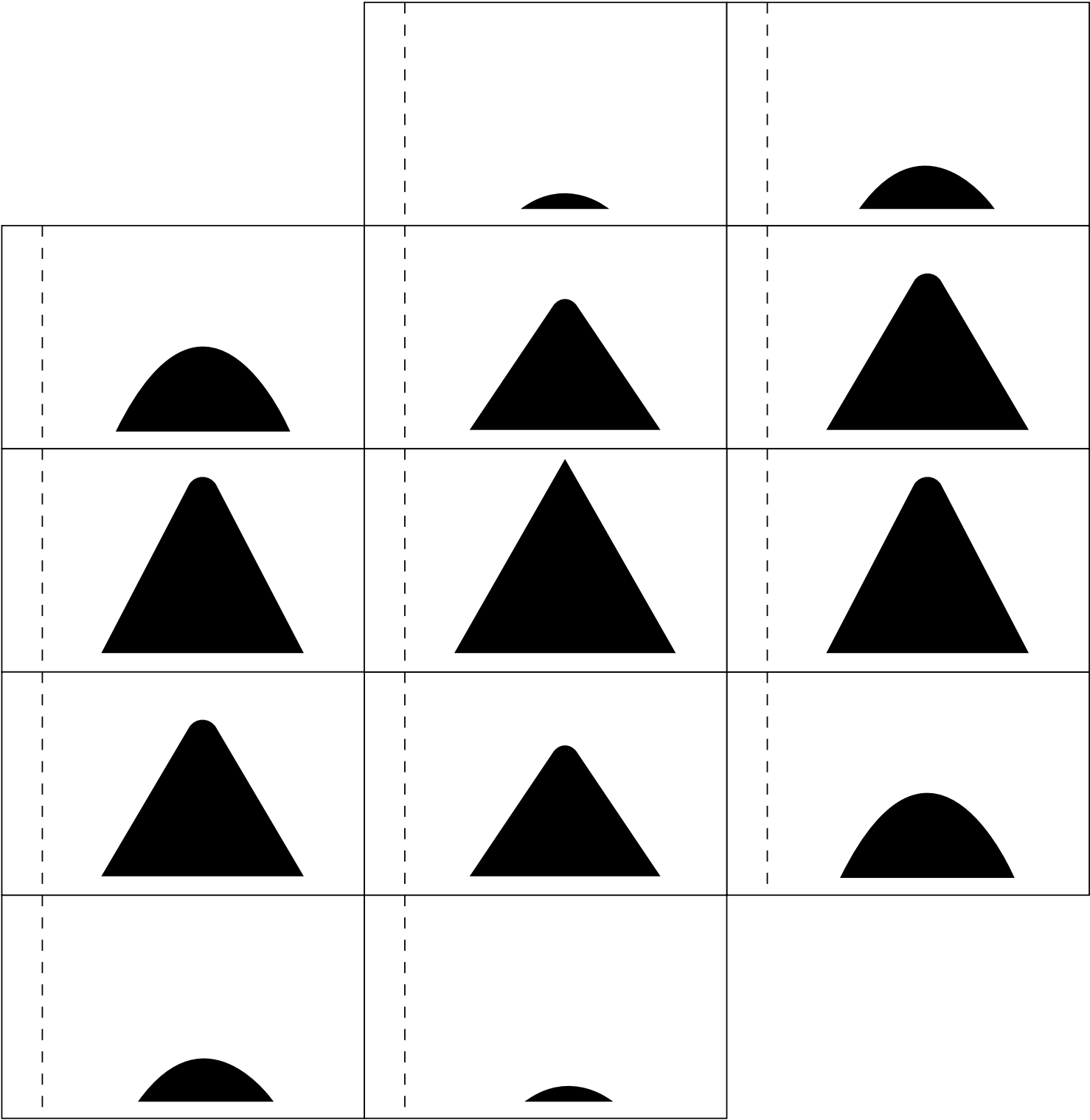
Mathématique - Professeur de mathématique - Mathématicien

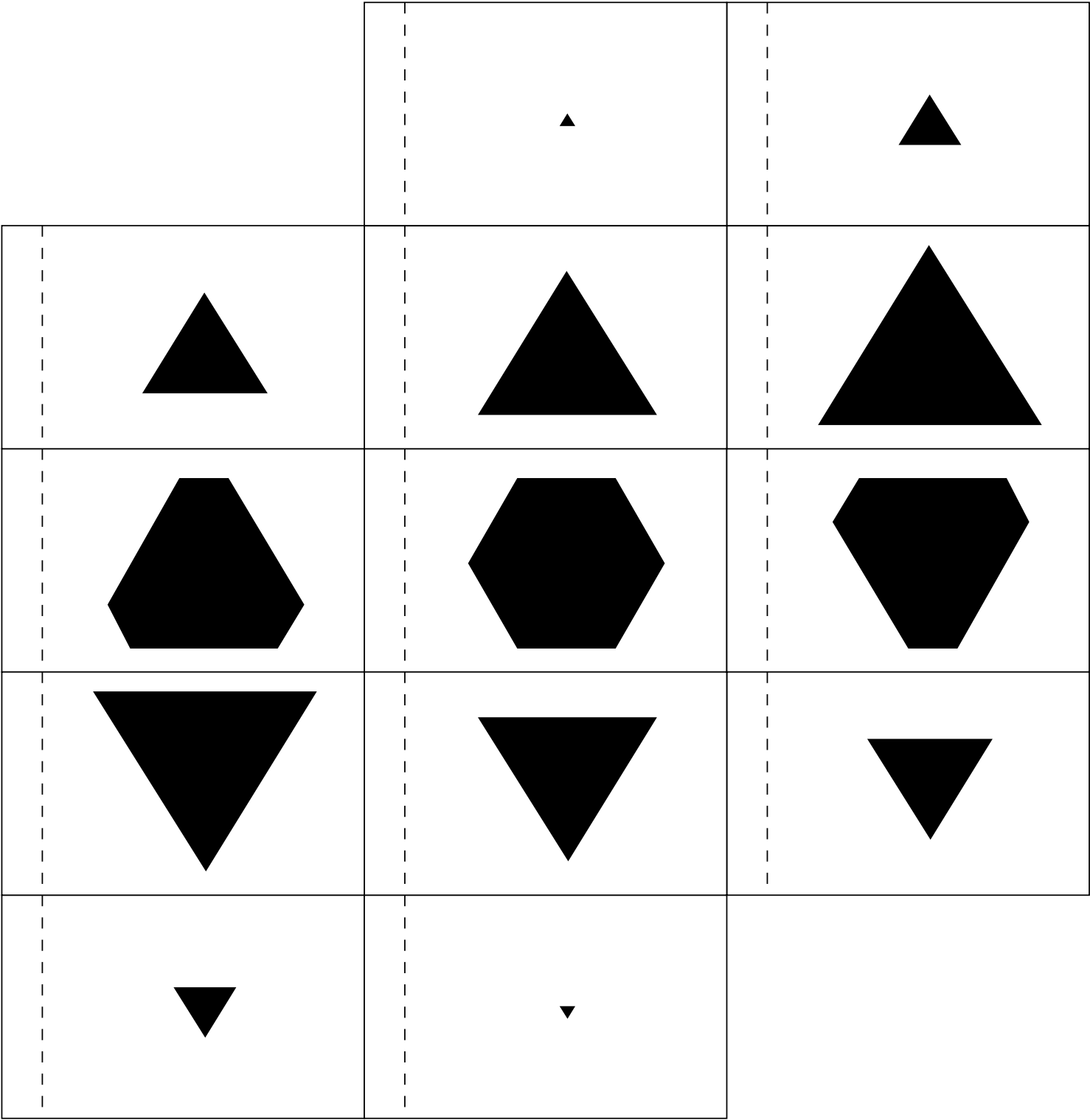














crédits

Cette exposition virtuelle a été conçue et réalisée,
à l'initiative d'Alexandros K. Makarigakis (Unesco – Windhoeck),
par Michel Darche, Centre•Sciences et l'Adecum.

Elle a bénéficié des remarques, critiques et contributions de tous ceux qui y ont directement participé : Sophie Auger-Léger (Orléans), Jean Brette (Paris), Marie Laure Darche-Giorgi (Orléans), Bento Louro (Lisbonne), Marta Macho-Stadler (Bilbao), Boubaker-Khaled Sadallah (Alger), Benoit Matrion (Orléans), Antony Templier (Orléans), mais aussi des travaux en didactique ou en vulgarisation des sciences de Guy Brousseau (Bordeaux), Etienne Guyon (Paris), Claude Janvier & Richard Pallascio (Montréal), Antonio Pérez Sans (Madrid), André Rouchier (Bordeaux), Gérard Vergnaud (Paris) qu'ils en soient tous vivement remerciés.

Elle a été conçue à partir de l'exposition interactive « Pourquoi les mathématiques ? » réalisée sous la direction scientifique de :

Minella Alarcon, responsable des sciences de base à l'Unesco et
Mireille Chaleyat-Maurel, vice-présidente du Comité RPAMaths de l'EMS

avec la collaboration de :

Jin Akiyama, Tokai University, Japan
Michèle Artigue, Présidente de l'ICMI
Jean Brette, Palais de la Découverte, Paris
Michel Darche, Centre•Sciences, Orléans
Mari-Jo Ruiz, Ateneo de Manila University, Philippines
Gérard Tronel, Année mondiale des mathématiques, Paris

Conception et coordination : Michel Darche – Adecum & Centre•Sciences

Programmation et développements interactifs :

Antony Templier – www.sotodesign.org (Orléans)

Graphisme : Benoît Matrion – www.tvwar.org (Orléans)

Traductions : En : Sophie Auger-Léger (Orléans) • Sp : Marta Macho Stadler – Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea - Bilbao

• Pt : Bento Louro – Universidade Nova de Lisboa
• Ct : Armengol Gasull & Gregori Guasp – Universitat Autònoma de Barcelona
• Ar : Boubaker-Khaled Sadallah - Ecole Normale Supérieure - Alger-Kouba

© Crédits photos & illustrations :

• centre sciences • adecum • 99.9 sarcone • wikipedia • Dbenbenn GNU • nasa • antony templier • benoit matrion • **Fotolia.com** : • Remo Liehti • Sandra Carmona • Federico Romano • goce risteski • Julien Eichinger • Udo Kroener • Isabelle Barthe • arnowssr • photo-dave • Denis Pepin • Eric Isselée • VisualField • philippe Devanne • Creativeve99 • Roman Sakhno • Vieloryb • Rich Johnson • Andrzej Tokarski • Marko Plevnjak • Alexey Klementiev • Olga Shelego • Allein • Christophe Villedieu • Jose Gil • Franck Boston • chouchashoot • Marvin Gerste • Tjall • Guillermo lobo • Elena Elisseeva • Forgiss • Francois Doisnel • Mariano Ruiz • Zoran Karapancev • LVI • claudio • Tad Denson • Alx • tdoes • piccaya • Monika Lassaud • Paco Ayala • Emilia Kun • Peterfactors • thierry burot • martine wagner • Philip Lange • Sascha Burkard • Terry Morris • Detlef Gwinner • Kenneth Groms • Paul Bodea • Guy Pracros • Eric Gevaert • Emin Ozkan • imagine • Khayel • Michael Drager • Gabriel Moisa • Tatiana • sébastien lagrée • Caroline Duhamel • sam richter • Pawel Bielecki • Alexandre Quillet • Stanisa Martinovic • Yurok Aleksandrovich • Martina Misar • Steven Pepple • Edouard Hardy • Danielle Bonardelle • Mauro Rodrigues • sébastien russier • Orlando Florin Rosu • Francois Doisnel • Leonid Karchevsky • Rob Byron • Natalia Pavlova • mrkeenan0 • daniimages • Gérard.Kremmer • Petr Gnuskin • Udo Kroener • trialart.info • Joel Bramley • Steve Thompson • Stephen Sweet • shocky • Nikontofeur • Eric Isselée • auris • David G • Jordi Soro • Jason Stitt • Indigo • milosluz • AndreasG • Bruce Shippee • Zimon • jimmythecure • claudio calcagno • Stephen Coburn • cmapuk_Online • Martine Lefebvre • ordus

Contact : centre.sciences@wanadoo.fr

Mathématiques

EXPERIMENTALES
expérimentales