



Organització
de les Nacions Unides
per a l'educació,
la ciència i la cultura

Comissió Nacional
Andorrana
per a la UNESCO

Mathématiques

EXPERIMENTALS

experimentals



CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA



Universitat Autònoma
de Barcelona

Mathématiques



Aquesta exposició virtual s'adreça als professors de matemàtiques, als seus alumnes — especialment als d'educació secundària — i a totes aquelles persones interessades en les matemàtiques i la ciència en general.

Com l'exposició itinerant internacional «**Per què les matemàtiques?**», ha estat concebuda i realitzada per iniciativa i amb la col·laboració de la UNESCO pel Centre•Sciences* i l'Adecum*

Aquesta exposició virtual mostra **més de 200 situacions matemàtiques** que proposen als estudiants experimentar, temptejar, fer hipòtesis, provar-les, intentar validar-les, provar de demostrar i debatre sobre propietats matemàtiques.

Com en l'exposició «**Per què les matemàtiques?**», aquesta exposició proposa "**experiments de taula**" fàcils de realitzar amb material molt simple: el cap i les mans, paper i llapis, plaques de cartró, de fusta o plexiglàs, filferro i xinxetes... Per a la seva aproximació numèrica proposa també "**experiments d'ordinador**" que es poden realitzar amb un clic.

A cadascun del temes trobareu:

- una introducció interactiva (aperitiu),
- experiments que poden ser realitzats pels estudiants,
- algunes explicacions i referències històriques,
- algunes aplicacions on s'usen aquestes matemàtiques,
- un recull de paraules clau per buscar a Internet,
- un dossier pdf per imprimir amb algunes indicacions.

Dirigida especialment als professors dels països del sud, aquesta exposició, tot i que virtual, no pretén accentuar en cap cas la **fractura digital**. Per aquest motiu ofereix l'oportunitat a tots aquells que no tinguin ordinador o Internet la possibilitat d'imprimir o fer imprimir aquestes pantalles – en blanc i negre o en color- a partir dels documents pdf creats especialment amb aquesta finalitat.

* Centre•Sciences: Centre de cultura científica, tècnica de la regió Centre – Orléans.

* Adecum : Associació per al desenvolupament de la cultura matemàtica – Orléans.

SUMARI

1. Llegir la natura	4
Espirals en la natura	5
Un món fractal	6
Còniques de l'espai	8
2. Enrajolar el terra	12
L'art de l'enrajolat	13
Calidoscopis	16
On sóc?	18
3. Omplir l'espai	34
Apilar taronges	35
Poliedres	37
Problemes complexos	38
4. Conectar-se	52
D'un sol traç	53
Quatre colors basten	54
Hola, ets tu?	55
5. Calcular	69
Amb el cap i les mans	70
Nombres primers	75
Imatges digitals	77
6. Construir	82
Corbes i velocitats	83
Corbes i volums	84
Corbes suaus	86
7. Estimar – Preveure	95
2 boles vermelles?	96
Bingo!	97
I el guanyador és?	98
8. Optimitzar	102
Bombolles de sabó	103
El camí més curt	104
La forma òptima	105
9. Demostrar	106
Pitàgoras	107
Nombres i Figures	109
És veritat?	111
10. Concloure	117
Experimenteu	118
Formuleu hipòtesis	119
Demostreu!	120
Crèdits	127

1. Llegir la natura



Espirals en la natura



Un món fractal



Còniques de l'espai

1. Llegir la natura

Espirals en la natura



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 retolador i a escollir: 1 pinya (fruita), 1 pinya (del pi), 1 maduixa, 1 flor de gira-sol...

Quantes espirals hi ha a cada sentit?



1, 1, 2, 3, 5, 8...

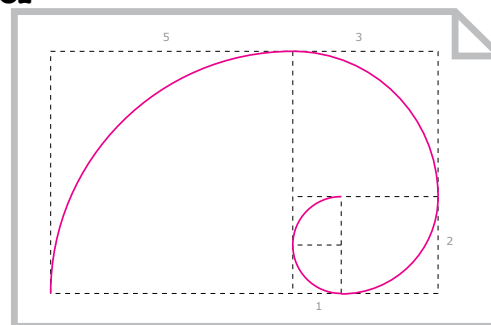
- Localitzeu els elements que segueixen d'aquesta successió de nombres.
- Observeu un dels objectes, apareixen espirals, en un sentit i en l'altre.
- Compteu-les.
- Trobeu altres fruits, flors, fulles... que tinguin la mateixa propietat.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 full de paper, 1 regle, 1 compàs, 1 llapis, 1 tisores

Dibuixeu una espiral de Fibonacci

- Agafeu un full de paper.
- Dibuixeu quadrats de costat 1, 1, 2, 3, 5, 8...
- Traceu un quart de cercle sobre cada quadrat com s'indica aquí.
- Retalleu els quadrats i col·loqueu-los en espiral com s'indica.



Què recordar?

**1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,
21, 34, 55, 89, ...,
233, ...**

Les llavors de certes fruites, els pètals de certes flors, les fulles de certs arbres, sempre es reparteixen seguint aquesta successió de nombres: cada nombre de la successió és la suma dels dos que el precedeixen. Així és a les pinyes del pi, la pinya tropical, la flor de gira-sol, però també en els troncs de les palmeres, en les figues de moro (i en les seves fulles), les xirimoies... els nombres d'espirals en cada sentit són termes consecutius d'aquesta successió nomenada successió de **Fibonacci**.

Per anar més lluny

Successions de Fibonacci:

Són successions de nombres enters on cada terme és igual a la suma dels dos precedents. Aquestes successions van ser descobertes per un italià, Leonardo de Pisa, també anomenat Fibonacci, fa 8 segles.

Denotem per F_n el n -èssim terme d'aquesta successió, la successió té moltes propietats. F_{n+1}/F_n té un límit: $(1 + \sqrt{5})/2$ que és el nombre d'or,

F_n i F_{n+1} són primers entre si

i la suma dels seus quadrats torna a aparèixer en la mateixa successió:

$$(F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2n+1}$$

Aplicacions de les matemàtiques

Després de **Fibonacci**, molts s'han interessat en aquestes propietats de les plantes. Recentment dos investigadors francesos, **Stéphan Douady** i **Yves Couder**, han demostrat experimentalment que el creixement d'aquestes plantes correspon a propietats de sistemes dinàmics de la física. L'estudi de la forma i de les propietats físiques de les plantes s'anomena fil·lotaxi. Interessa a botànics i biòlegs.

LLOCS WEB:

<http://www.lps.ens.fr/~douady/>

<http://maven.smith.edu/~phylo/>

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Fibonacci – Successions – Fil·lotaxi – Nombre d'or – Espiral d'or



Feu-ho vosaltres mateixos

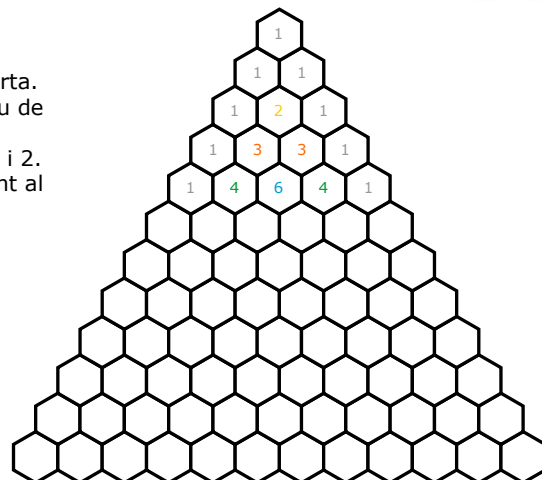
MATERIAL: 1 graella quadriculada o hexagonal, 4 o 5 llapis o retoladors de colors.

10

11

Triangle de Pascal mòdul p

- Completeu la graella segons la regla establerta.
- Canvieu el nombre de cada casella pel residu de la divisió euclidiana del nombre entre 3.
- Associeu 3 colors diferents als nombres 0, 1 i 2.
- Pinteu cada casella amb el color corresponent al seu residu (0, 1 o 2).



Observeu la figura obtinguda.

Quines propietats té?

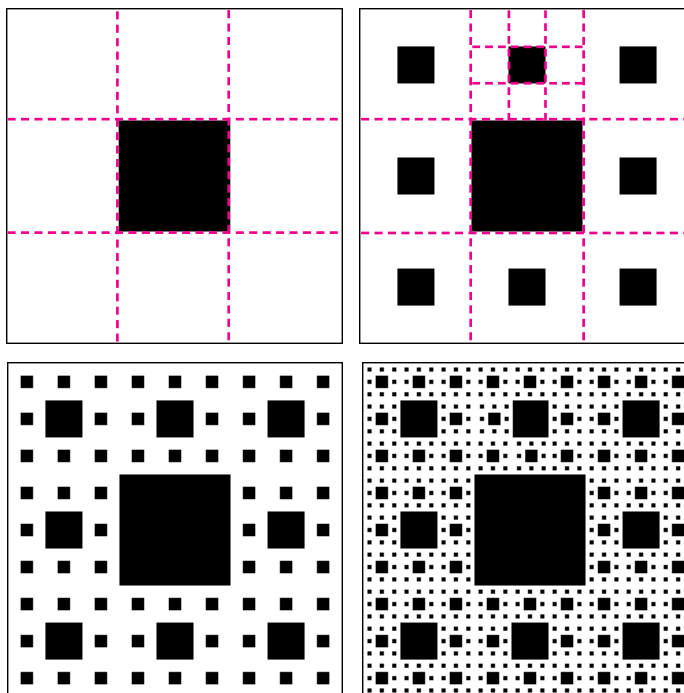
Torneu a començar escollint un altre divisor entre 2 i 7.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 full de paper gran, 1 llapis o un retolador

Successions de figures i successions de nombres

- Partiu d'un quadrat gran dibuixat en el full de paper.
- Talleu en tres parts en cada sentit i enfosquiu-ne algunes parts.
- Torneu a començar el procediment amb les parts blanques restants...



Què recordar?

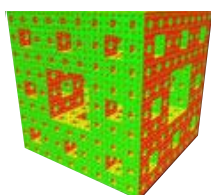
El triangle de Pascal de mòdul 2

El triangle de nombres s'anomena **triangle de Pascal**. A cada línia horitzontal els nombres que hi figuren són els coeficients que apareixen a la cèlebre **fórmula de Newton**: $(a + b)^n$.

Aquests nombres juguen un rol important en diverses branques de les matemàtiques (àlgebra, probabilitat,...).

Canviant aquests nombres pel residu de la divisió entre 2, es veu aparèixer una imatge que es reproduïx a escales més i més grans. Aquesta imatge és un **objecte fractal** anomenat "**Tapís de Sierpinski**".

La regularitat en l'acoloriment permet posar de manifest fàcilment els errors de càlcul. Aquesta tècnica es troba en els codis correctors d'errors.



Fractals en 3 dimensions:

Construiu de la mateixa manera que a dalt un cub fractal.

Un món fractal



Feu-ho vosaltres mateixos

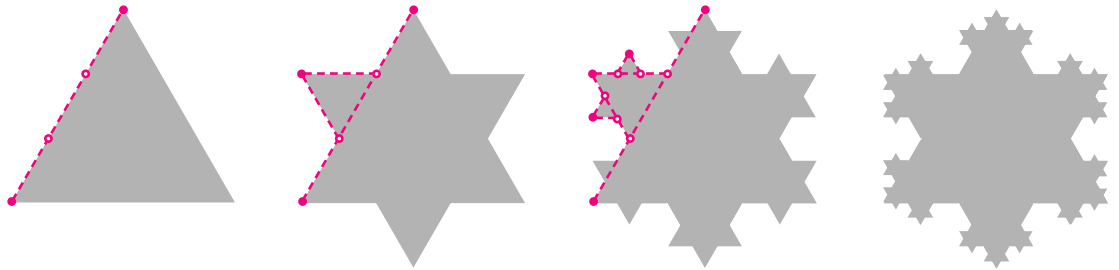
MATERIAL: 1 full de paper, 1 llapis, 1 regle

Dibuixeu d'altres successions de figures fractals

- Traceu un triangle equilàter.
- Talleu cada costat en 3 segments iguals.
- Canvieu cada segment del mig per dos de la mateixa longitud.
- Torneu a començar en cadascun dels segments nous obtinguts.

Una altra activitat al voltant d'aquestes figures fractals:

En cada etapa calculeu el perímetre i l'àrea de la superfície i calculeu-ne els límits.



I en la natura



Aplicacions de les matemàtiques

Els objectes fractals apareixen o són utilitzats en molts camps: meteorologia, economia, compressió d'imatges, medicina i fins i tot en l'art... fractal.

LLOCS WEB:

<http://commons.wikimedia.org/wiki/Fractal>

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Fractal – Successió de figures fractals – Dimensió fractal – Mandelbrot

Còniques de l'espai

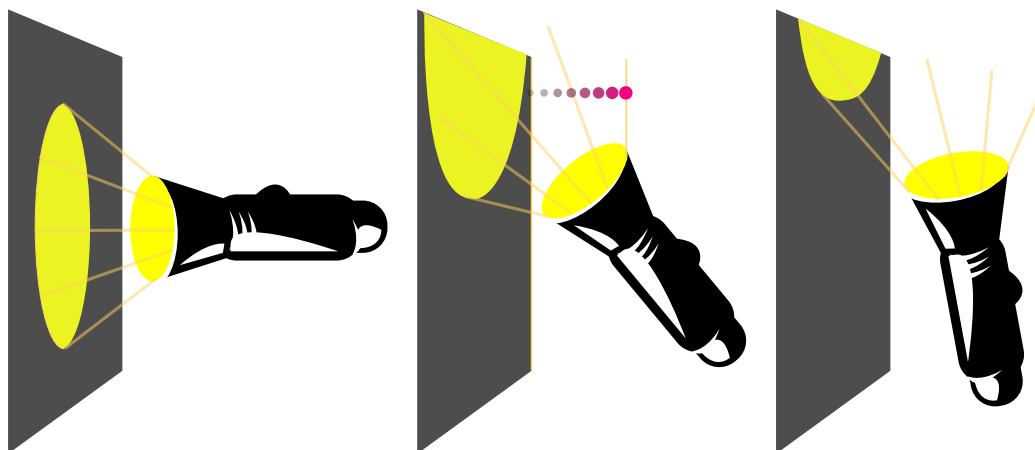


Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 làmpada elèctrica o 1 llanterna, una paret blanca o una pantalla blanca

Llums i còniques

- Il·lumineu la paret o la pantalla amb la làmpada.
 - Apareix una taca de llum.
- Quina forma té? La podeu canviar? Com?



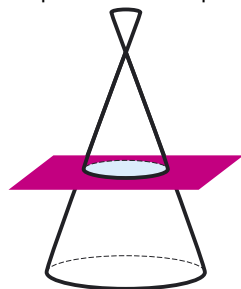
Què recordar?

Les còniques són les corbes obtingudes per la intersecció d'un con i un pla. Segons l'orientació del pla respecte l'eix del con s'obtenen els diferents tipus de còniques.

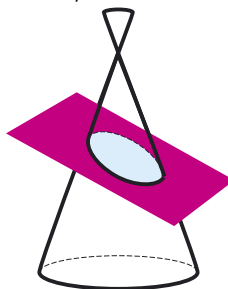
Quan la pantalla és perpendicular a l'eix del con, s'obté un cercle.

Quan l'angle canvia, s'obtenen successivament una el·lipse, una paràbola (quan un costat del con de llum és paral·lel a la pantalla) i, finalment, una o dues branques d'hipèrbola.

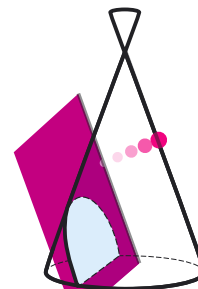
Es pot obtenir un punt, una recta, o dues rectes?



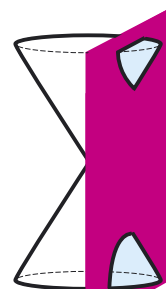
CERCLE



EL·LIPSE



PARÀBOLA



HIPÈRBOLA



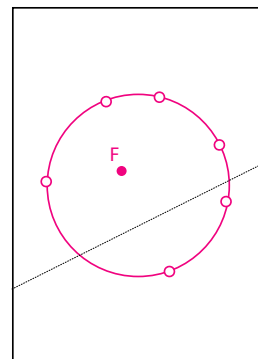
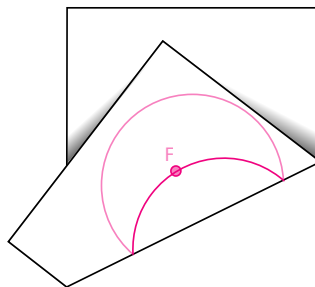
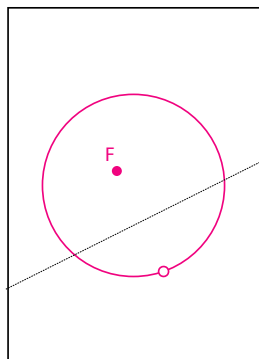
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 full de paper, 1 regle, 1 compàs, 1 llapis

Construïu còniques fent plecs

Què recordar?

- Si el punt F està a l'interior del cercle els plecs marcats envolten una corba, una el·lipse.
- Si F està a l'exterior, l'envolvent és una hipèrbola. Què s'obté si es canvia el cercle per una recta?



Per anar més lluny

Les còniques apareixen en un gran nombre de fenòmens naturals.

La paràbola: des del brollador d'aigua fins a la trajectòria descrita per un objecte llançat endavant. Es troba també en els fars dels cotxes i en un cert tipus de forns solars.

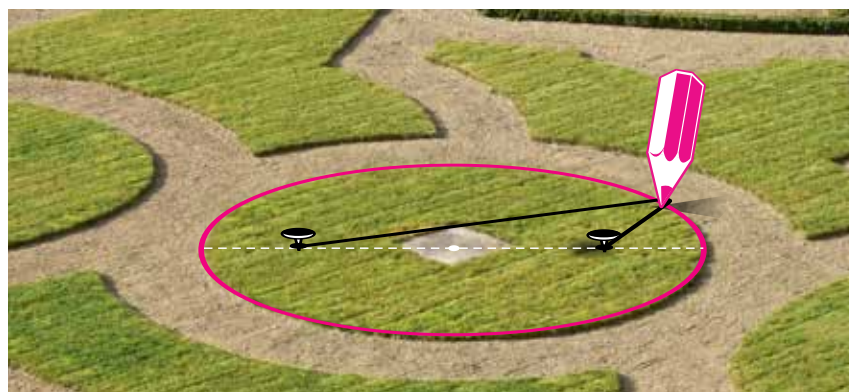
L'el·lipse es troba en l'arquitectura i en els dibuixos en perspectiva de cercles.

Les lleis de **Kepler** (1619) i després la llei de la gravitació de **Newton** (1687), van demostrar que les òrbites dels cossos celestes, naturals o artificials, són còniques (en absència de perturbacions).

Aplicacions de les matemàtiques

Qui utilitza les còniques?

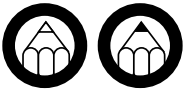
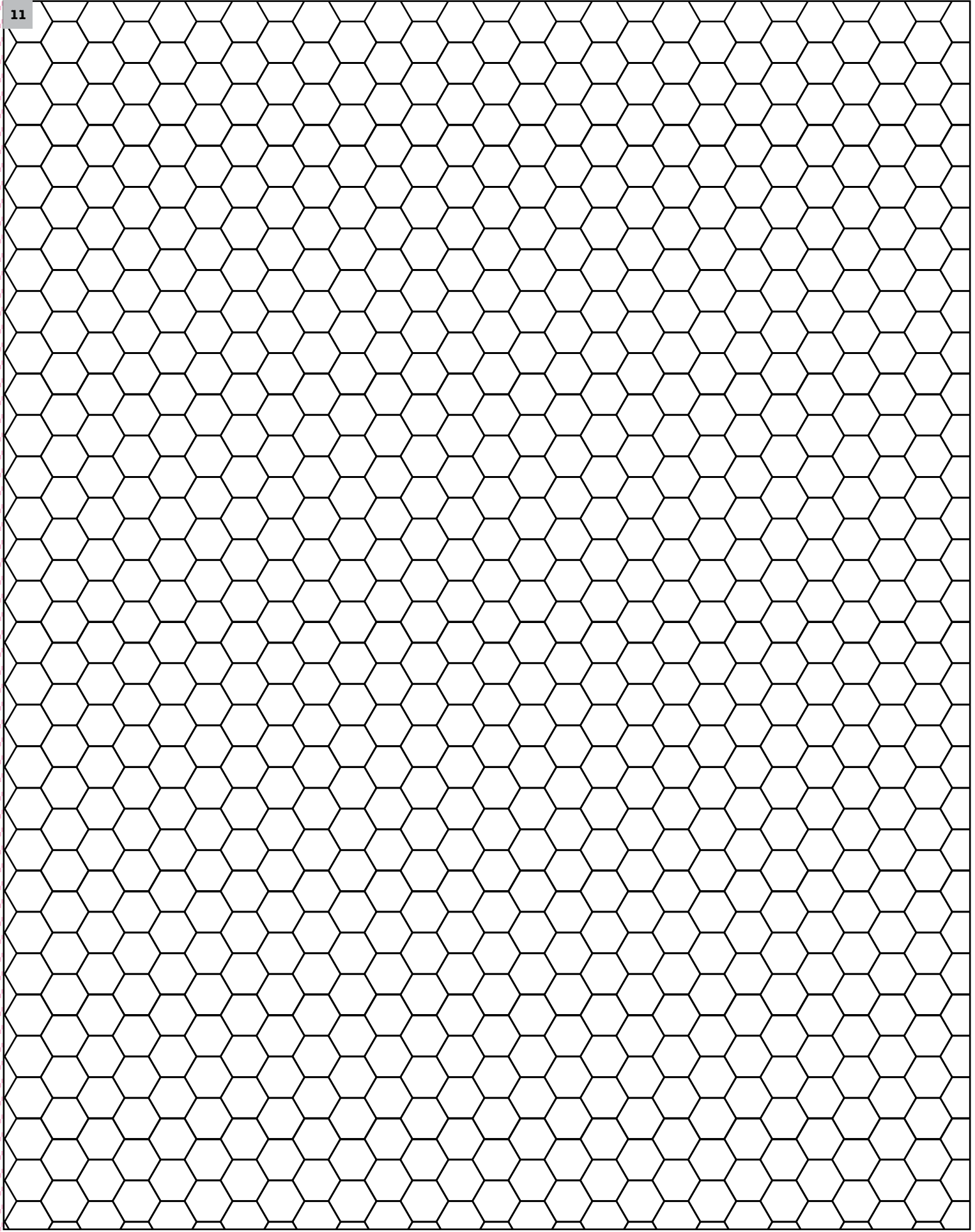
Els enginyers, sobretot a la indústria espacial, i òbviament els astrònoms. Els arquitectes que construeixen els ponts penjants i els estadis d'esports. Els jardineros, els tècnics de llum al teatre i al cinema i també els dissenyadors gràfics.



PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Cònica – El·lipse – Paràbola – Hipèrbola – Corba envolvent







2. Enrajolar el terra



L'art de l'enrajolat



Calidoscopis



On sóc?

L'art de l'enrajolat



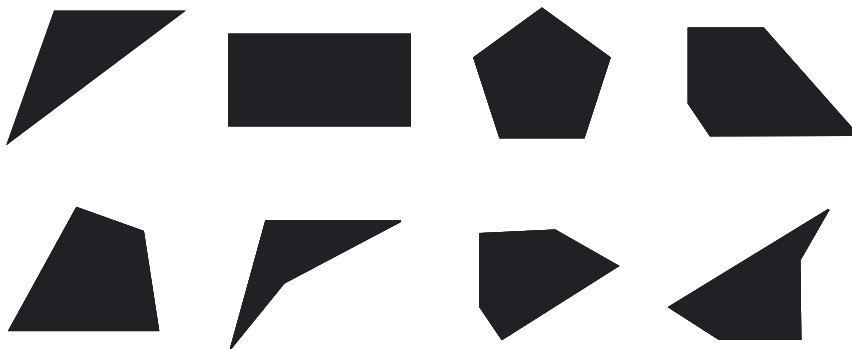
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 plantilla amb formes per retallar, 4 o 5 llapis o retoladors de colors, 1 cúter

19

Creeu l'enrajolat més bonic amb una forma

Escolliu una forma i intenteu crear un enrajolat del pla, sense forats ni superposicions. Podeu pintar-lo. Per a cada enrajolat que heu creat intenteu trobar a quin grup d'enrajolats regulars pertany (entre els 17 mostrats a la pàgina 15).



Què recordar?

Es pot recobrir un terra amb peces de qualsevol forma, sense forats ni superposicions?

Moltes formes geomètriques o figuratives permeten realitzar un enrajolat del pla, però no totes, com el pentàgon regular, per exemple.

Els enrajolats regulars d'un pla es repeteixen periòdicament per translacions, en dues direccions. Alguns d'aquests enrajolats també es conserven per rotacions o simetries axials.

Aquestes translacions, rotacions i simetries en permeten distingir 17 grups. El seu estudi es basa en la teoria de grups, deguda a **Evariste Galois** (1811-1832). Els enrajolats tenen aplicacions en matemàtiques, en cristal·lografia, en teoria de codificació, en física de partícules...

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 full de formes geomètriques per retallar, 4 o 5 llapis o retoladors de colors, 1 cúter o unes tisores

20

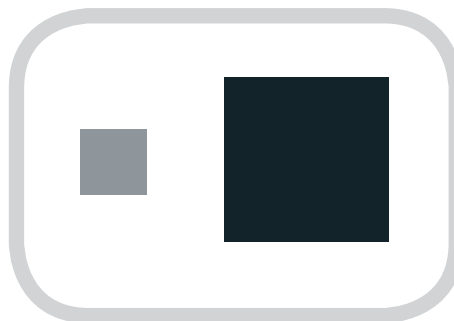
21

22

23

Creeu un enrajolat amb dues formes

- Escolliu un d'aquests parells de formes.
 - Intenteu crear un enrajolat del pla, sense forats ni superposicions.
 - És regular? Si no ho és, podeu dir per què?
- * Feu coincidir els arcs de cercle.



L'art de l'enrajolat



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 3 graelles geomètriques, 4 o 5 llapis o retoladors de colors

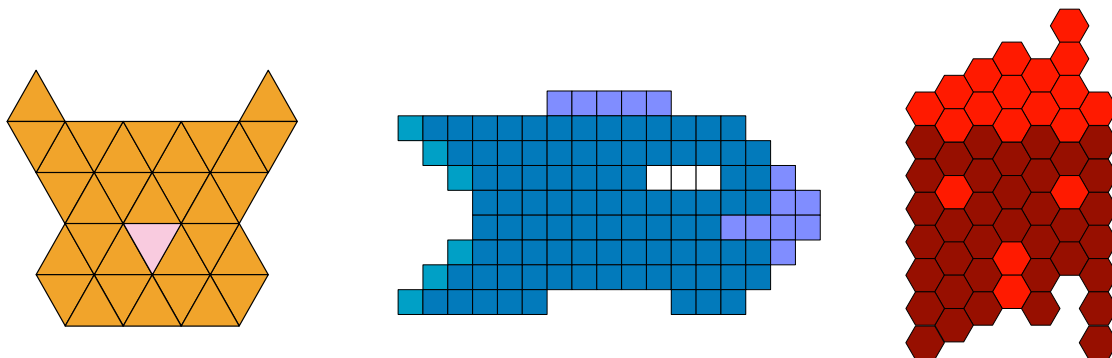
24

25

26

Gat, peix, casa...

Transformeu una forma simple (triangle, quadrat,...) en una motiu figuratiu que enrajola. Per ajudar-vos, comenceu amb les graelles que teniu a la vostra disposició.

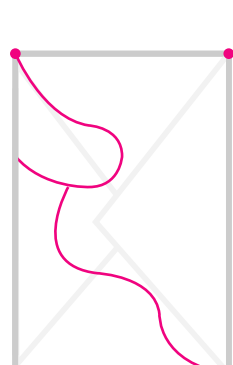


Feu-ho vosaltres mateixos

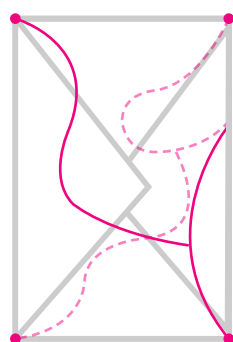
MATERIAL: 1 sobre tancat, 1 llapis, 1 cúter o unes tisores

La tècnica dels sobres

- Fabriqueu un sobre tancat, quadrat, rectangular, triangular,...
- Traceu un camí que uneixi les cantonades del sobre. Podeu fer passar el recorregut per una cara o per les dues.
- Retalleu el sobre seguint el camí.
- Desplegueu i enrajoleu.



Cara del davant



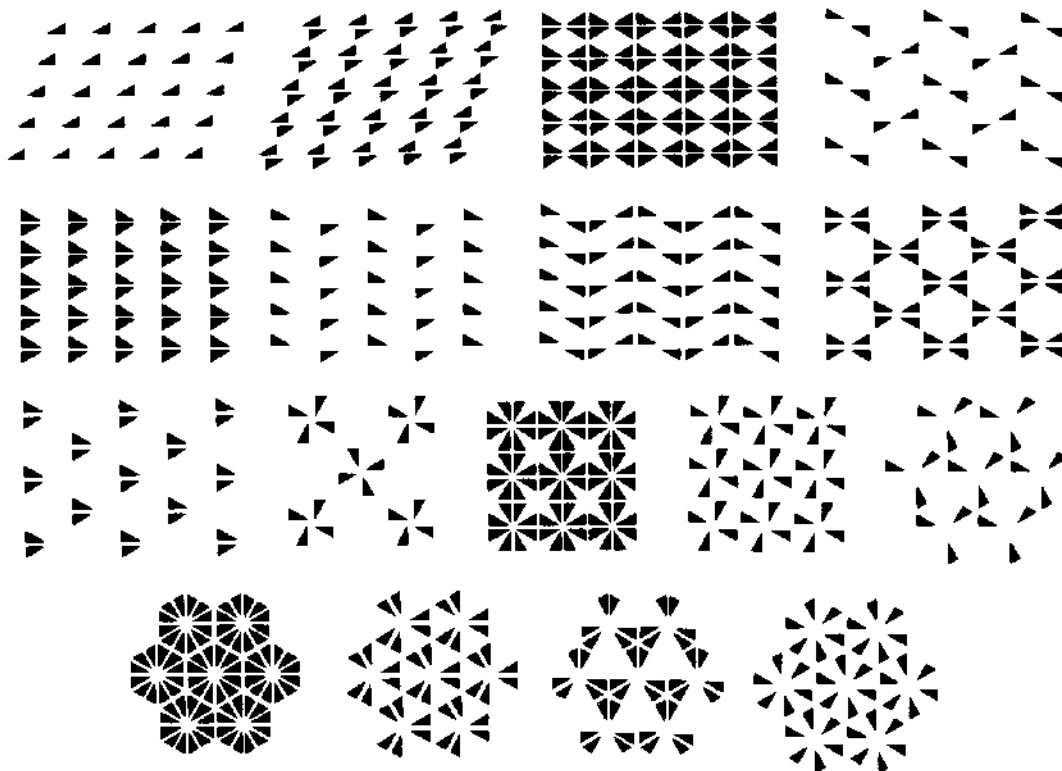
Cara del darrera





Per anar més lluny

Els 17 grups d'enrajolats regulars



Aplicacions de les matemàtiques

Els enrajolats s'apliquen en feines que van des del paper pintat de les parets a les rajoles del terra (cuina, banys,...) , des de teles pels vestits a teixits africans.

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Tessel·lació - grups de tessel·lacions - Evariste Galois – Escher

Calidoscopis



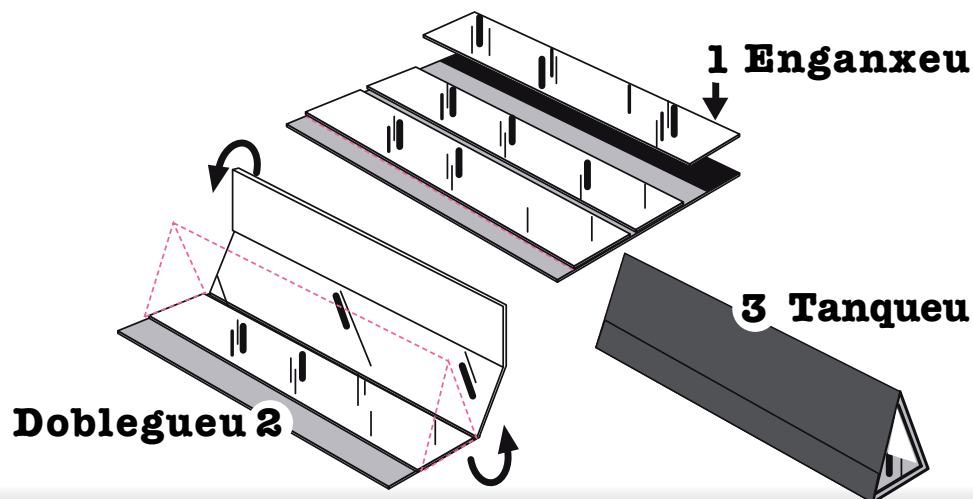
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 models de calidoscopis, 3 miralls, 1 cartolina, 1 tub de cola, cinta adhesiva

27

Fabriqueu dos calidoscopis

Construïu dos models, un sobre la base d'un triangle equilàter i el segon sobre la base d'un triangle rectangle isòsceles.



Feu-ho vosaltres mateixos

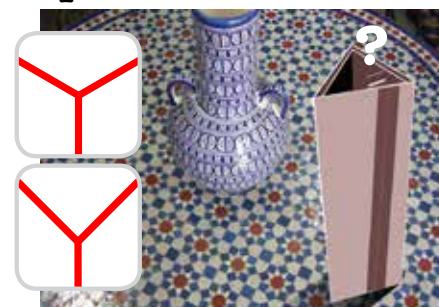
MATERIAL: Exemples de mosaics per observar, 2 calidoscopis

28

29

Observeu les simetries en el calidoscopi

- Escolliu un mosaic i col·loqueu el calidoscopi adequat al lloc correcte. Recupereu, engrandit, el mosaic.
- Col·loqueu un dels miralls sobre les línies vermelles. Veureu un enrajolat del terra d'una casa.



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 càmera fotogràfica, 1 tisoires o 1 cúter

Qui hi ha darrera el mirall?

- Feu una fotografia d'un rostre.
- Tal·leu-la en dos simètricament i realitzeu aquests efectes de mirall!

Quina és la cara correcta?



Què recordar?

Les tessellacions regulars són repeticions fins a l'infinit del mateix motiu.

Aquí, per simetries especulars, la figura es va reproduint fins a generar un enrajolat de quadrats, hexàgons o qualsevol altre conjunt de polígons amb un nombre parell de costats. Artistes com ara **Escher** han utilitzat la mateixa tècnica amb motius més figuratius.



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 3 patrons de piràmide, 1 cúter o unes tisores, 3 miralls triangulars, 1 tub de cola.

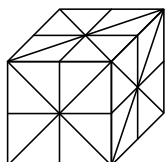
30

31

32

Piràmides-mirall

- Construïu una piràmide-mirall amb l'ajut dels models proporcionats.
- Col·loqueu objectes o un líquid de la vostra elecció al fons del calidoscopi.
- Què observeu?



Per anar més lluny

Si es talla un poliedre regular (cub, tetraedre...) seguint tots els seus plans de simetria, s'obtenen piràmides que, transformades en calidoscopis, permeten retrobar el poliedre de partida i tota una família de volums que tenen les mateixes simetries de base.

Aplicacions de les matemàtiques

- Artesans creant un mosaic a partir de zelij (petites rajoles marroquines treballades a mà) (Fez - Marroc)

- Tècnica creant un nou enrajolat per ordinador (Super Céram, Kentira - Marroc)



PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Calidoscopi - Mosaic - Tessel·lació - Simetries - Escher



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 esfera de poliestirè o una pilota, 1 retolador

Enrajolar l'esfera

Observeu els enrajolats de l'esfera. En podeu imaginar d'altres?

Proveu de dibuixar-los sobre la pilota.

Per a cada enrajolat calculeu els angles del (o dels) polígon usat en l'enrajolat.

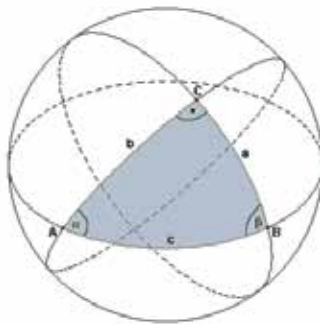


Què recordar?

Com en el pla, els enrajolats de l'esfera són recobriments sense forats ni superposicions usant un o varis polígons esfèrics (és a dir, que s'apliquen sobre l'esfera).

L'enrajolat és regular si s'utilitza una sola forma (triangle equilàter, quadrat...) que es reparteix de la mateixa manera al voltant de cada vèrtex. Els enrajolats regulars de l'esfera són deformacions esfèriques de poliedres regulars. Enrajolar l'esfera permet definir, per exemple, el nombre òptim de satèl·lits que són necessaris per cobrir tots els punts de la Terra.

Per anar més lluny



Calculant els angles dels polígons dibuixats sobre l'esfera descobrireu propietats de la geometria esfèrica:

- Quina és la suma dels angles d'un triangle esfèric?
- Es pot construir un triangle que tingui 3 angles rectes?
- Quina relació hi ha entre la suma dels angles d'un polígon esfèric i la seva àrea?

La història del caçador d'ossos

Aquesta és la història d'un caçador que seguia el rastre d'un ós. Camina recte cap el sud durant una hora fins que s'adona que l'ós ha girat cap a l'est. Ell fa el mateix i camina cap a l'est durant una hora fins arribar a un punt on l'ós ha girat cap al nord. Ell fa el mateix i segueix el rastre durant una altra hora. I aleshores? S'adona que ha tornat al punt... del començament!

Pregunta 1: De quin color pot ser l'ós?

Pregunta 2: Quantes solucions hi por haver?

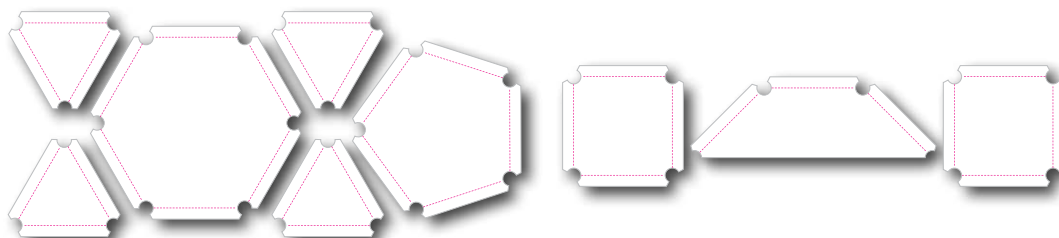
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 full de patrons de polígons regulars, 2 o 3 cartolines, gomes elàstiques

33

Construïu una pilota de cartró

Construïu amb aquests polígons regulars una pilota que s'acosti tant com sigui possible a l'esfera.



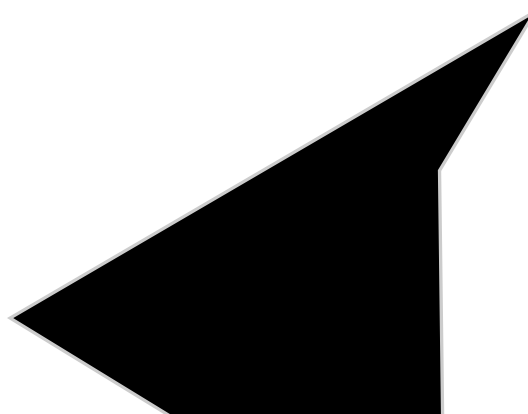
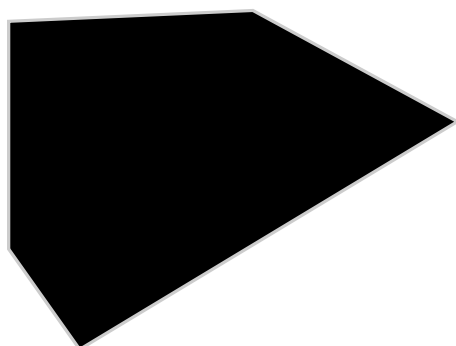
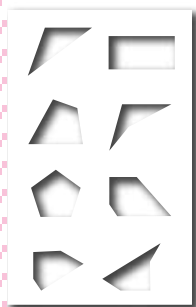
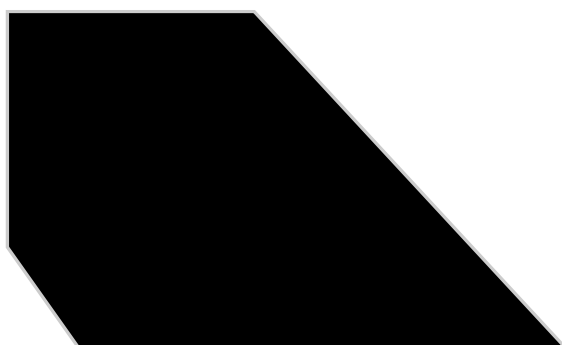
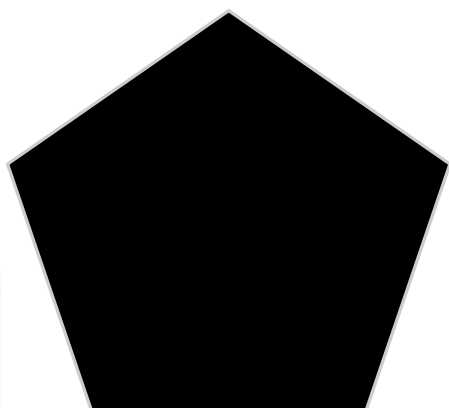
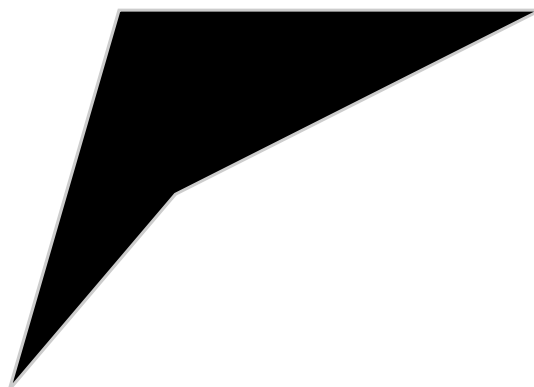
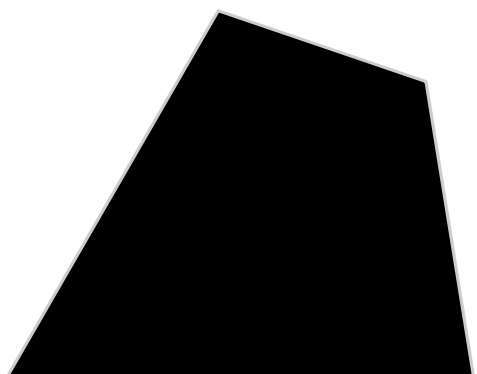
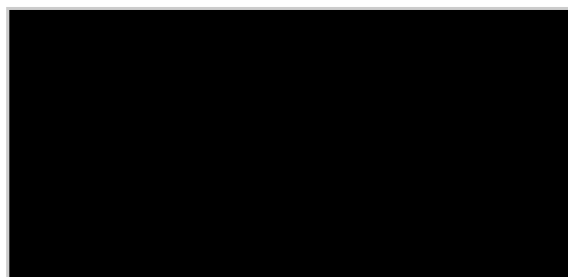
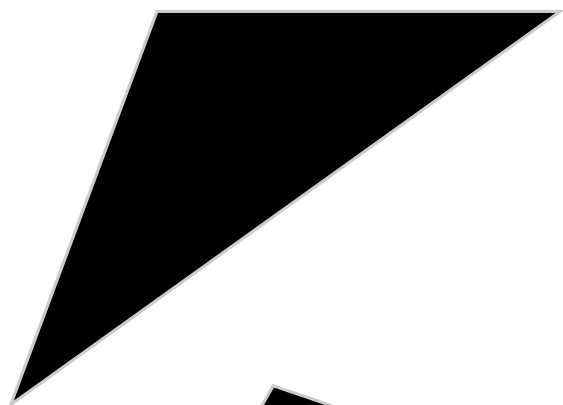
Aplicacions de les matemàtiques

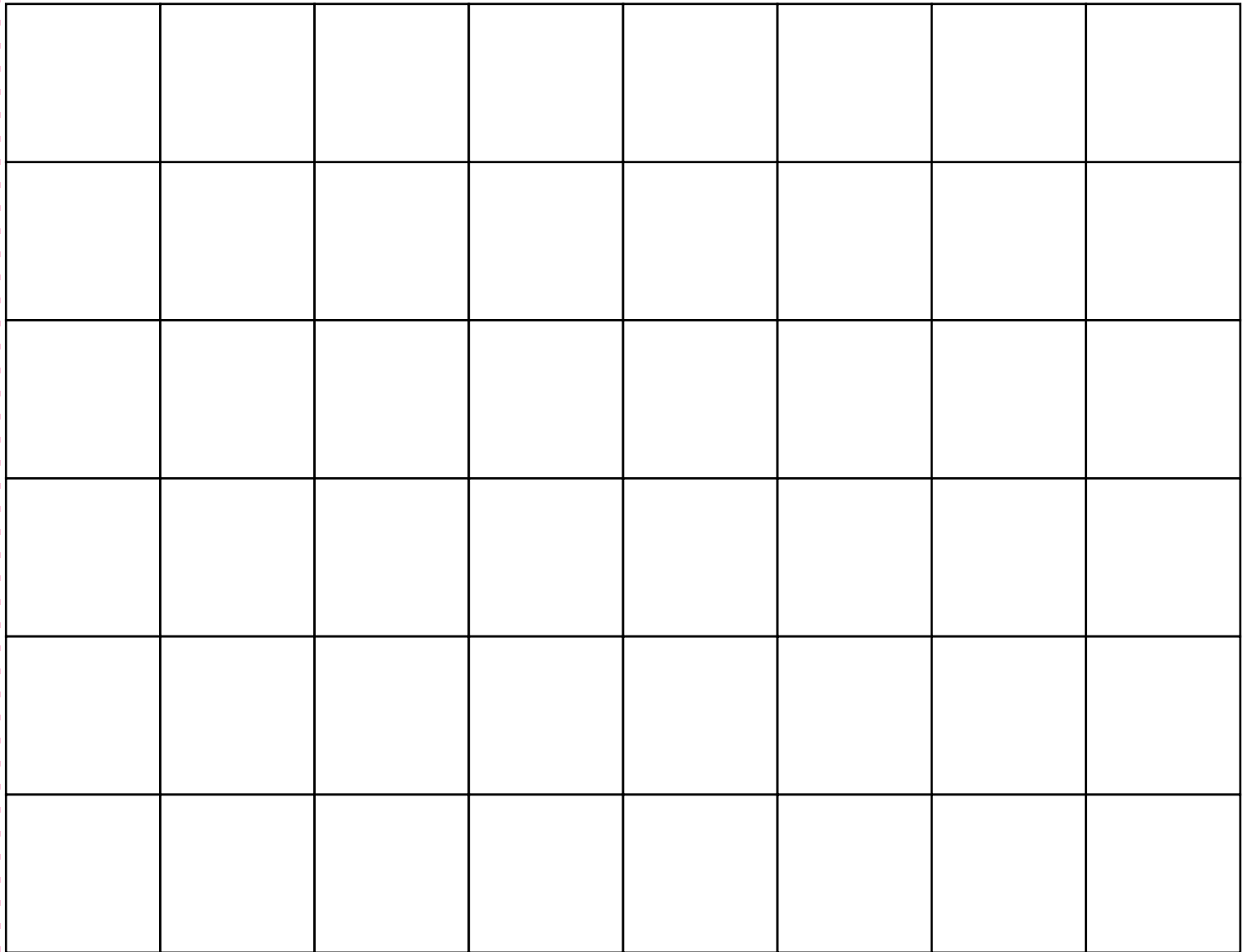
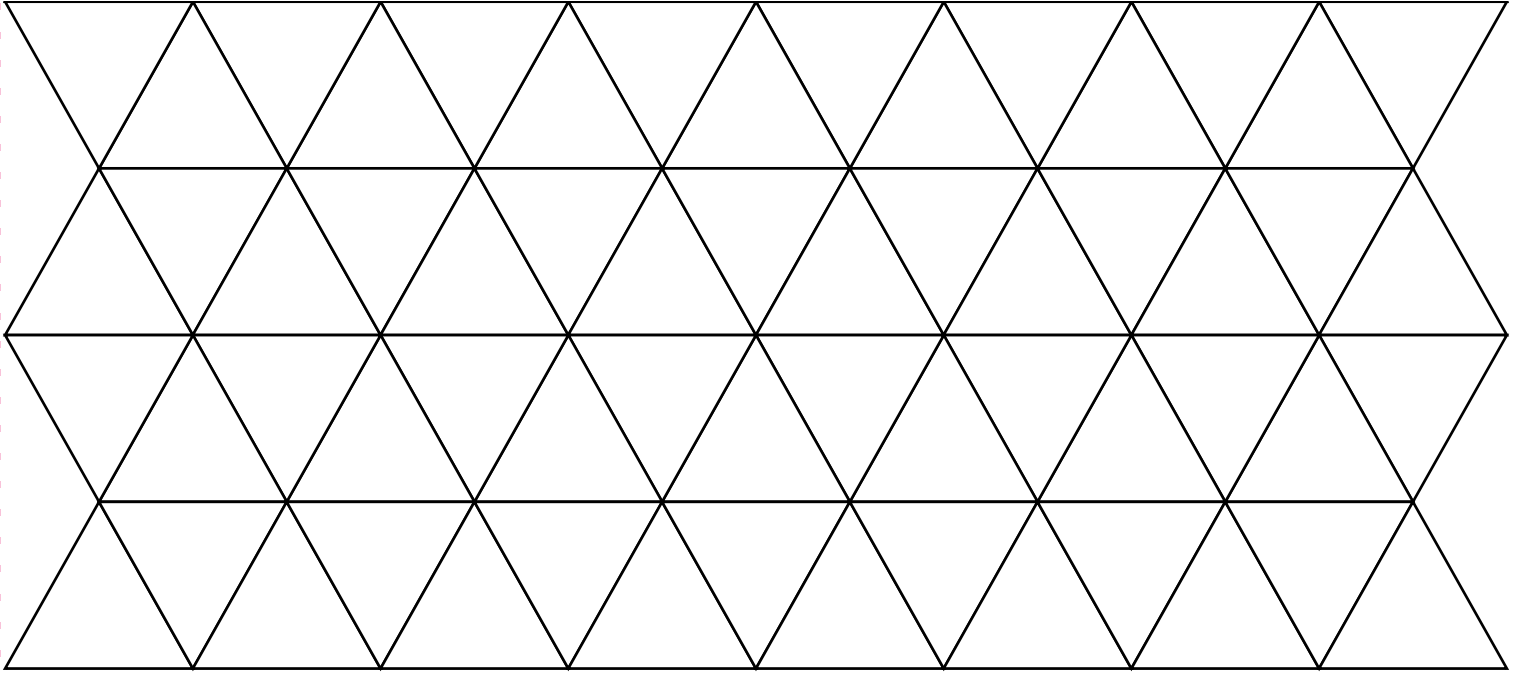
Els arquitectes s'inspiren a vegades en estructures esfèriques.

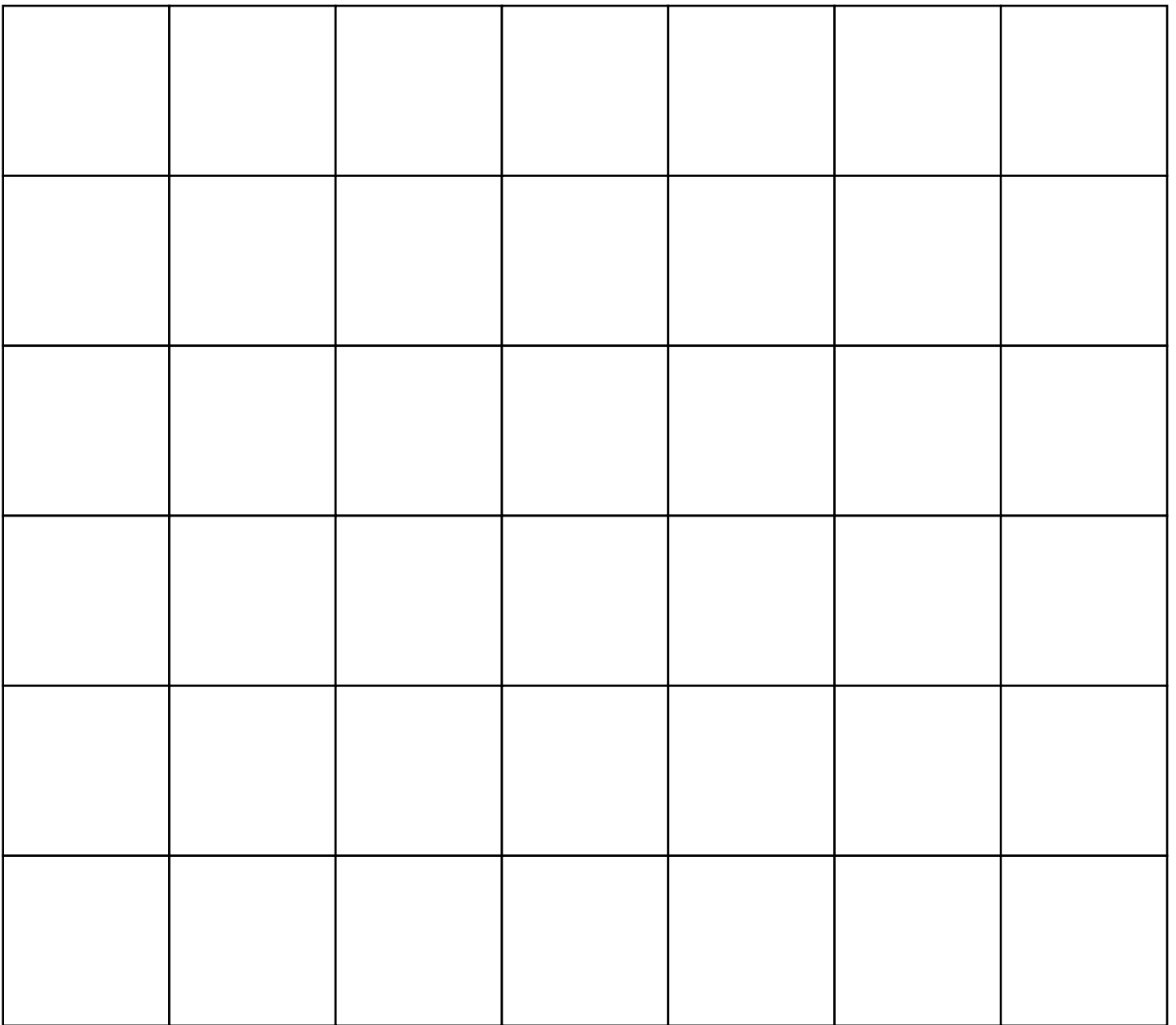
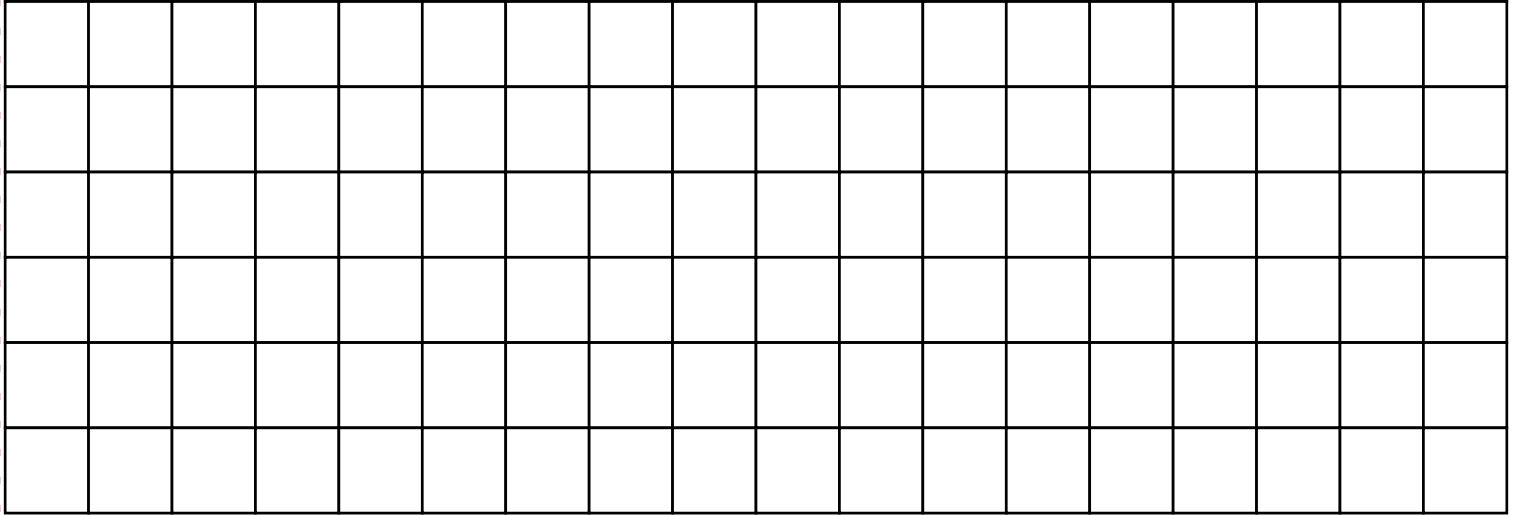
S'usen en les comunicacions via satèl·lit i en els sistemes de posicionament per satèl·lit (GPS o Galileu) que intenten recobrir la Terra amb el menor nombre possible de satèl·lits.

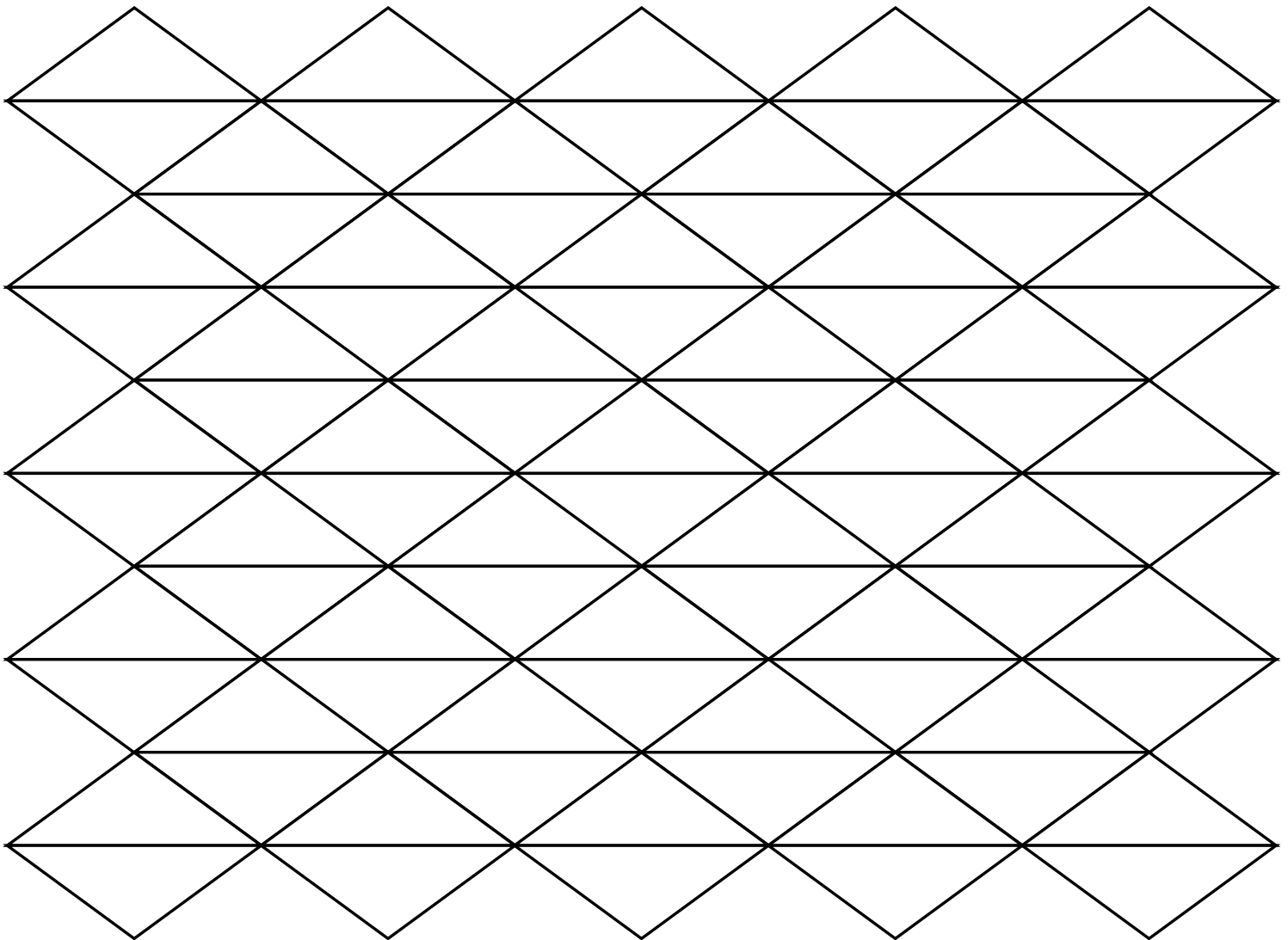
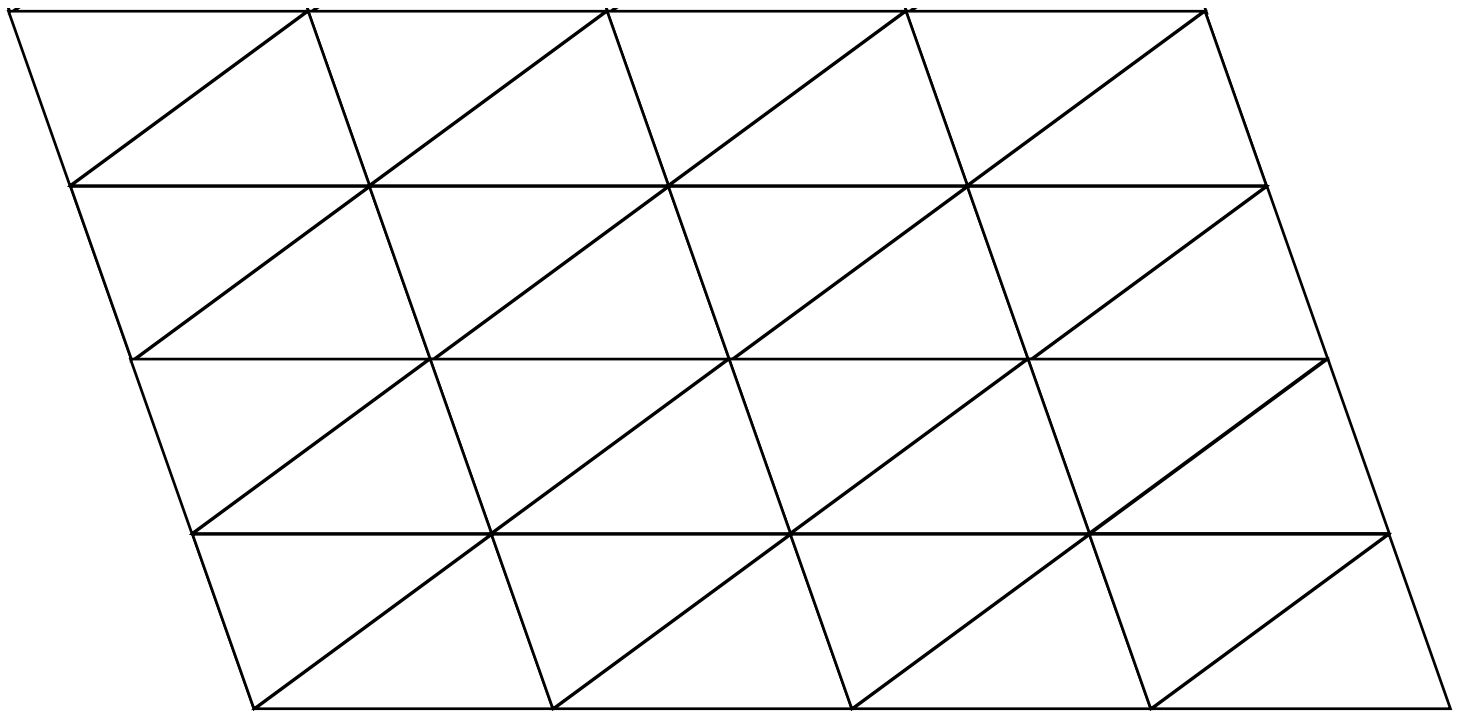
PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

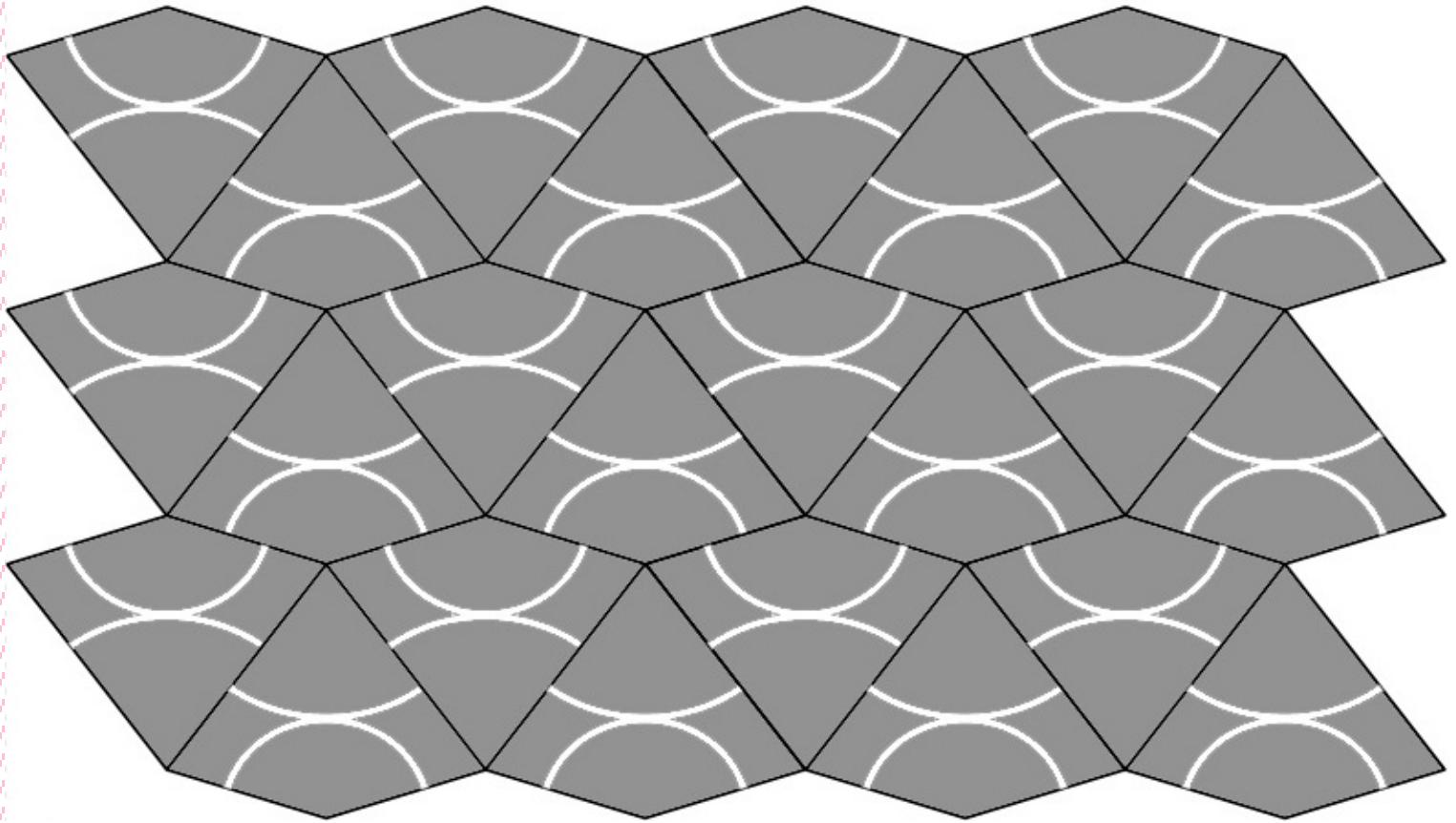
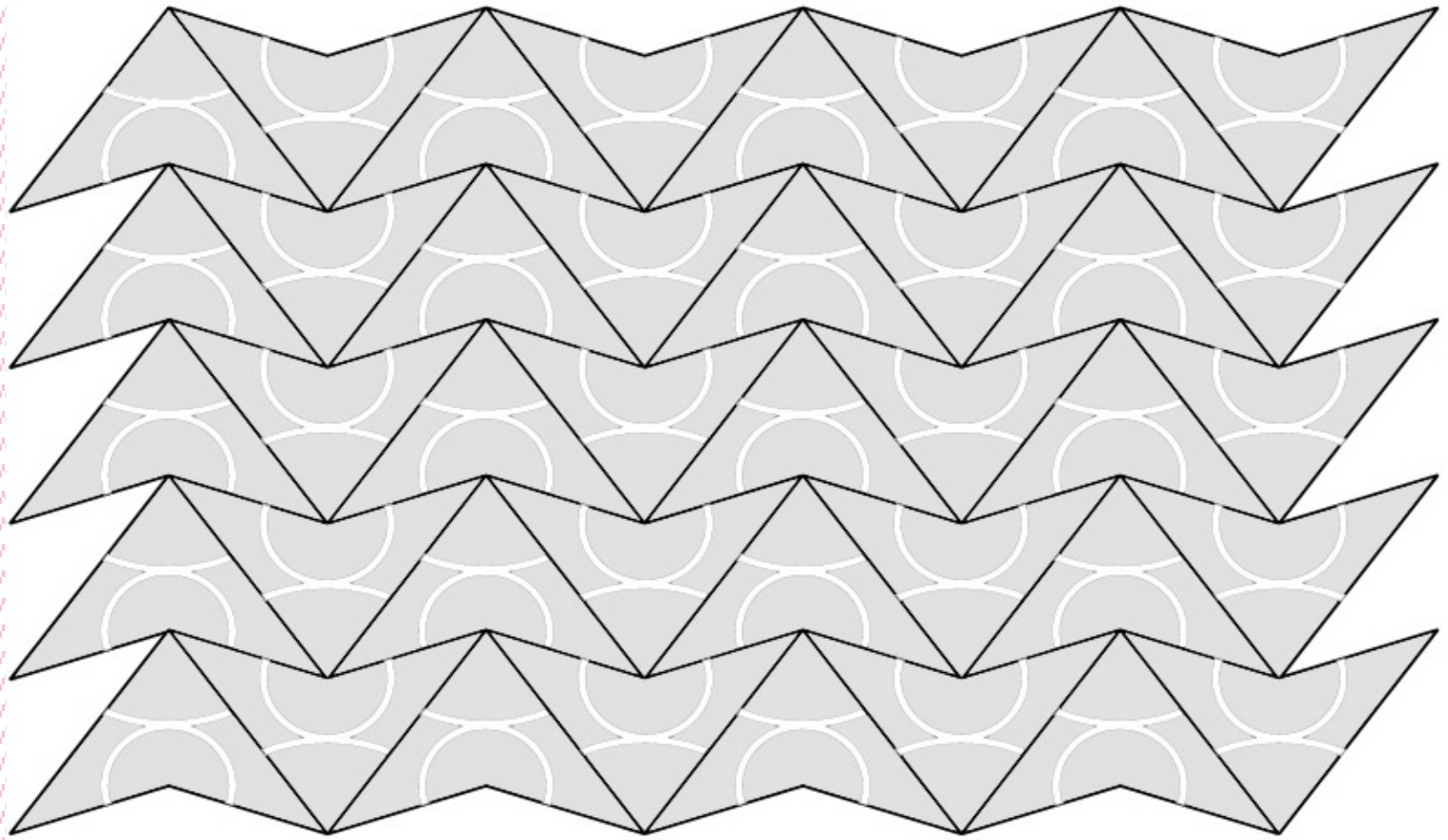
Geometria esfèrica – Tessel·lacions de l'esfera – Escher

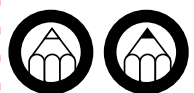


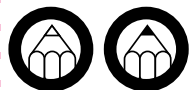


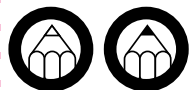


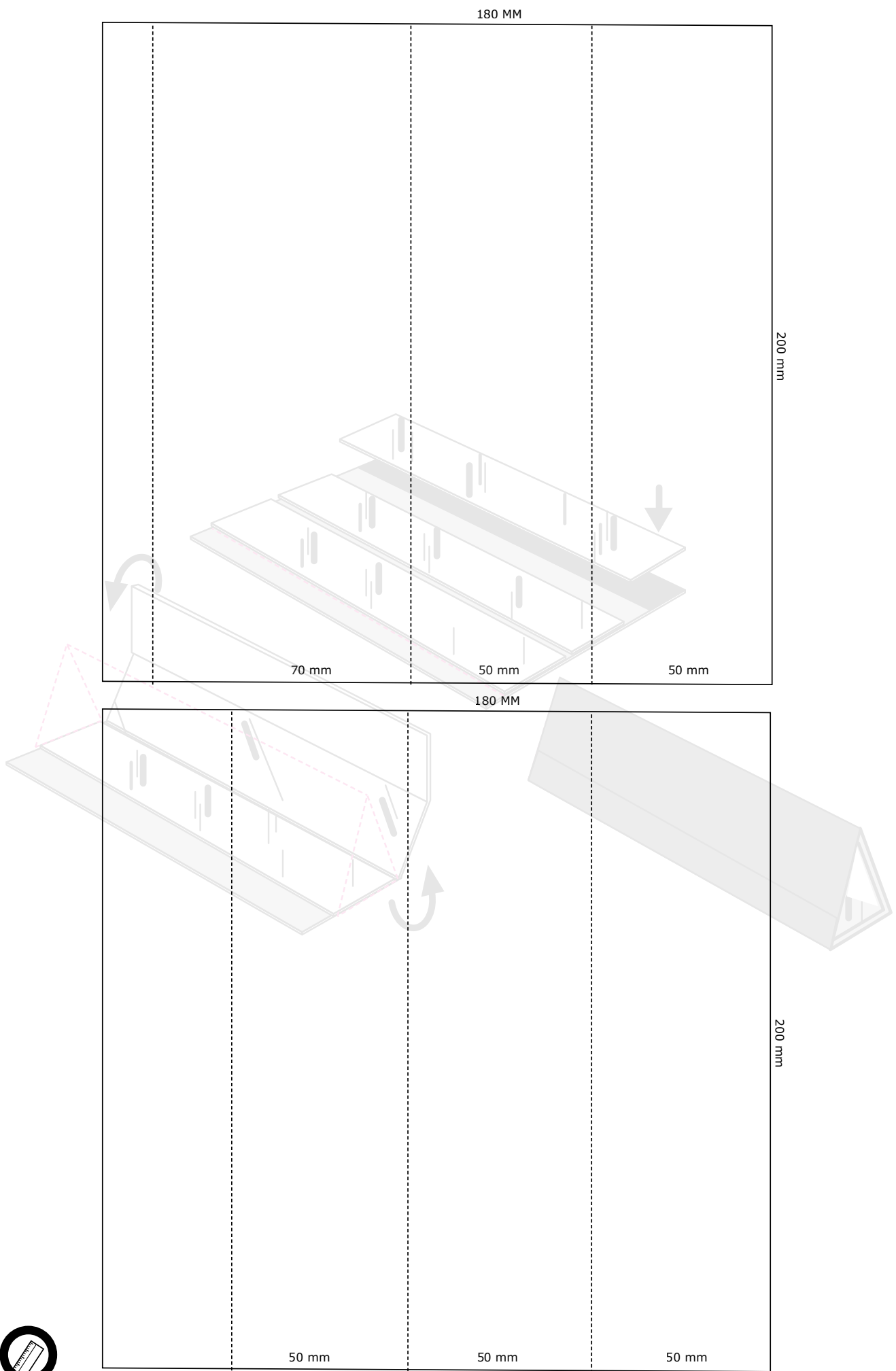


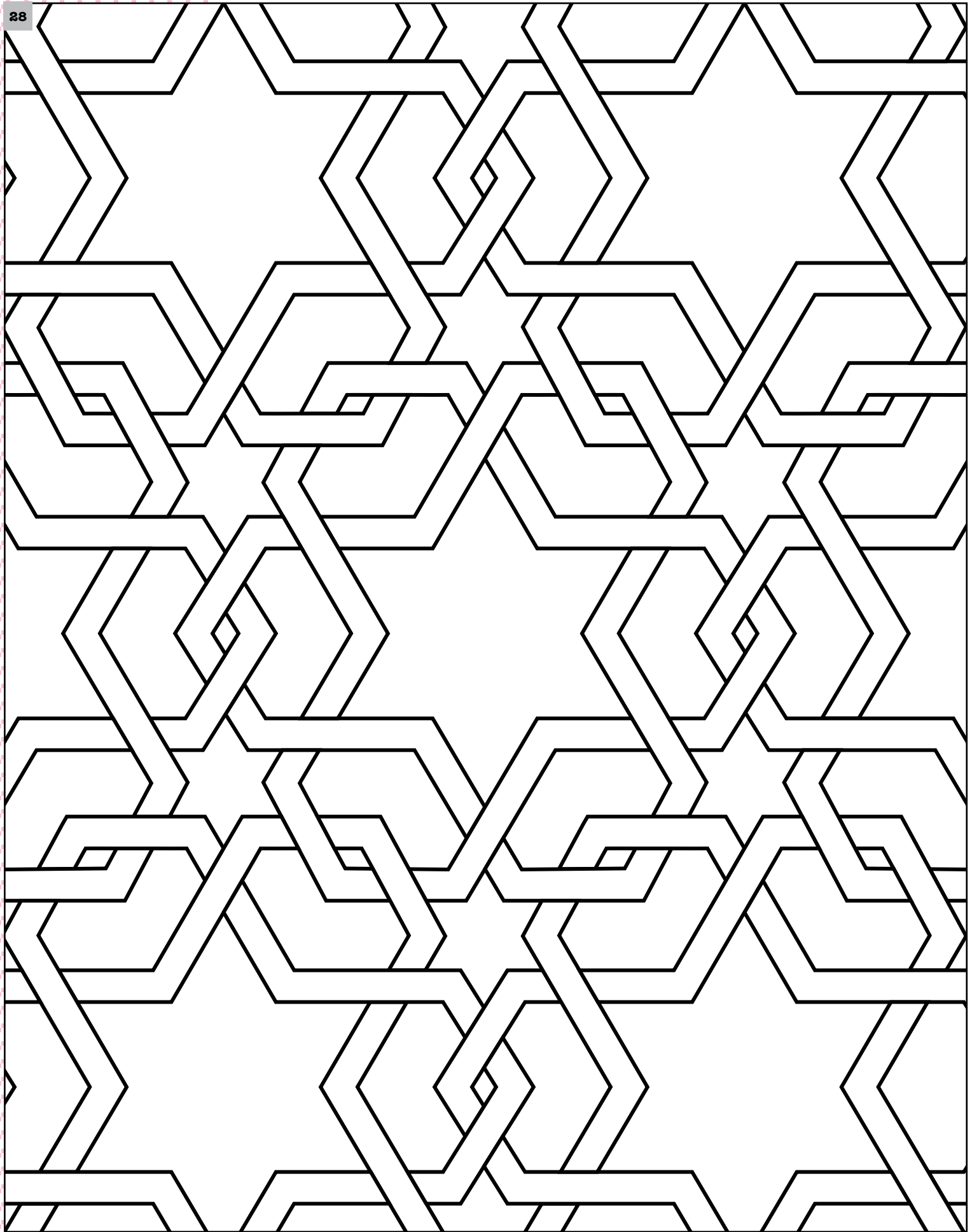


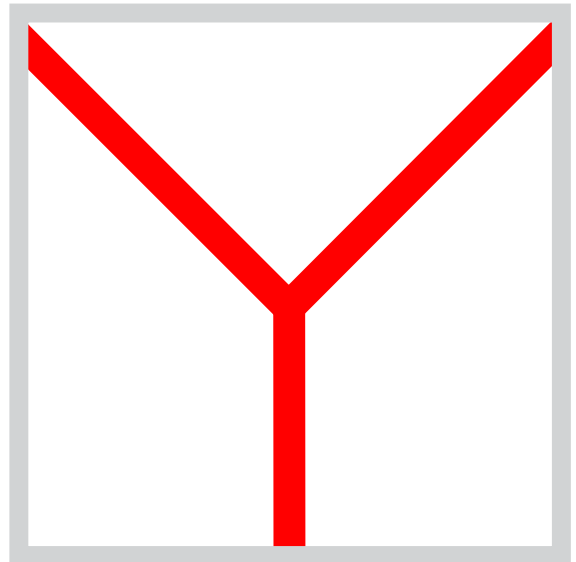
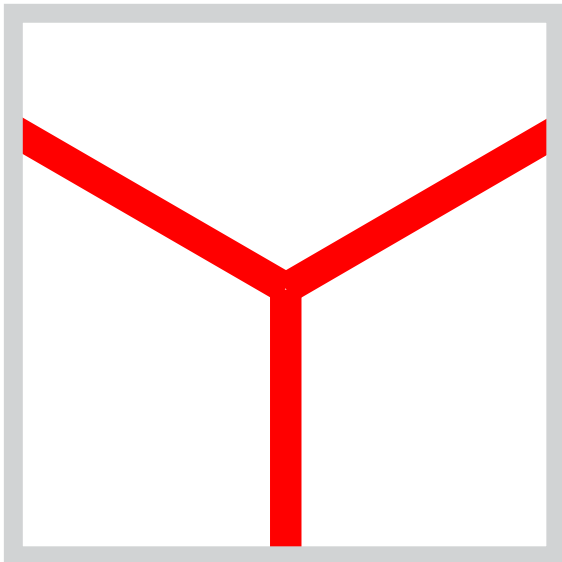


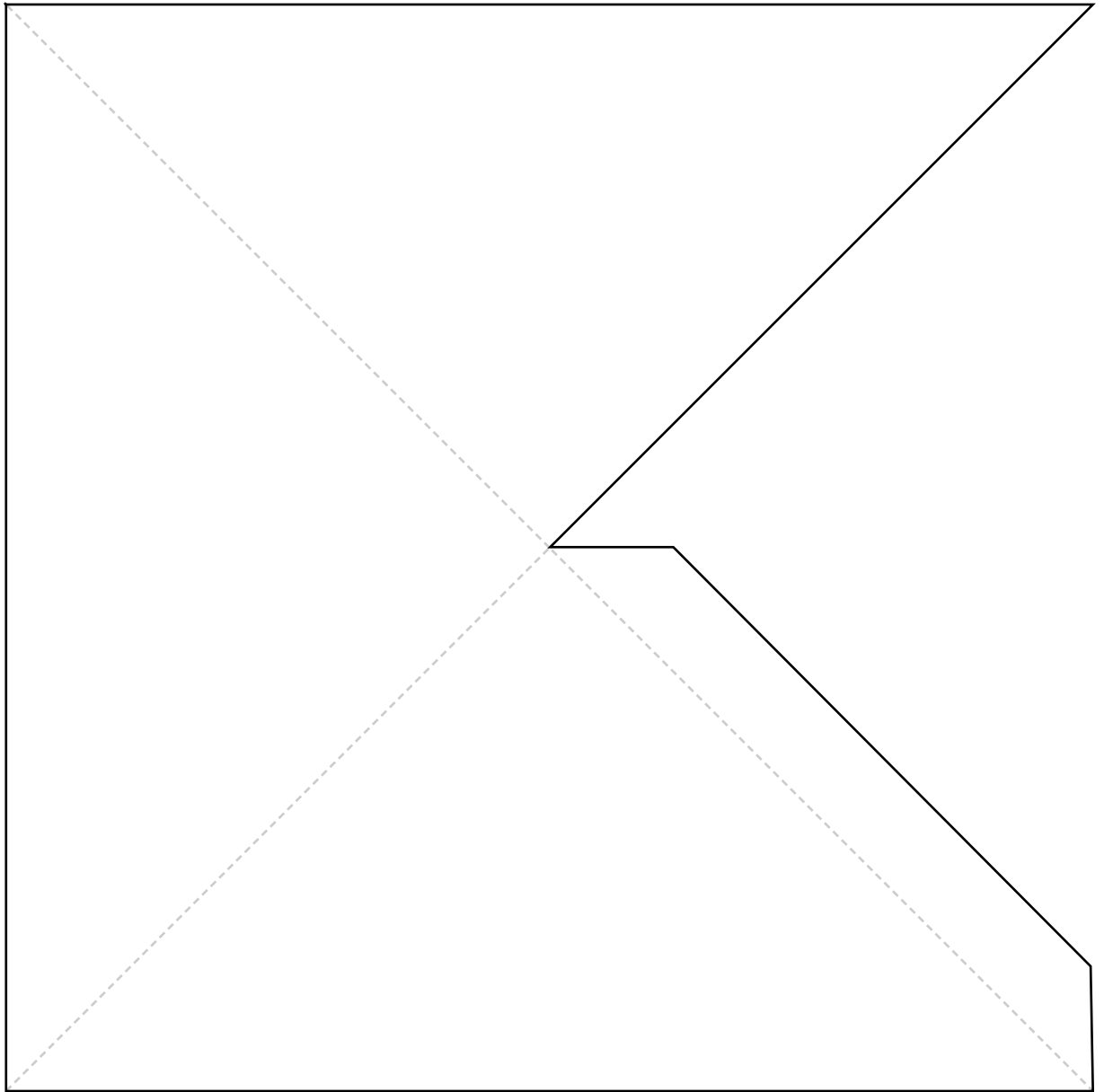




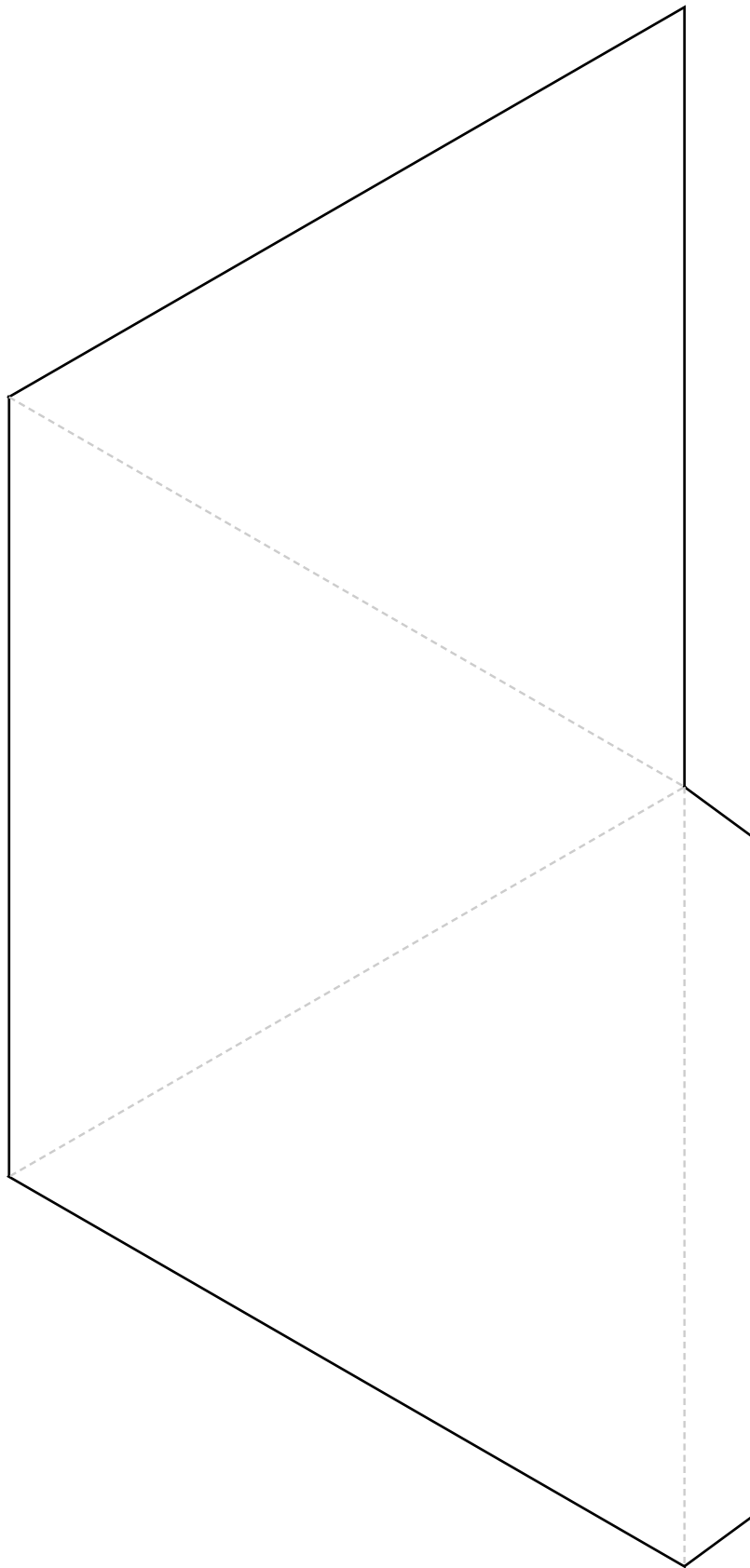




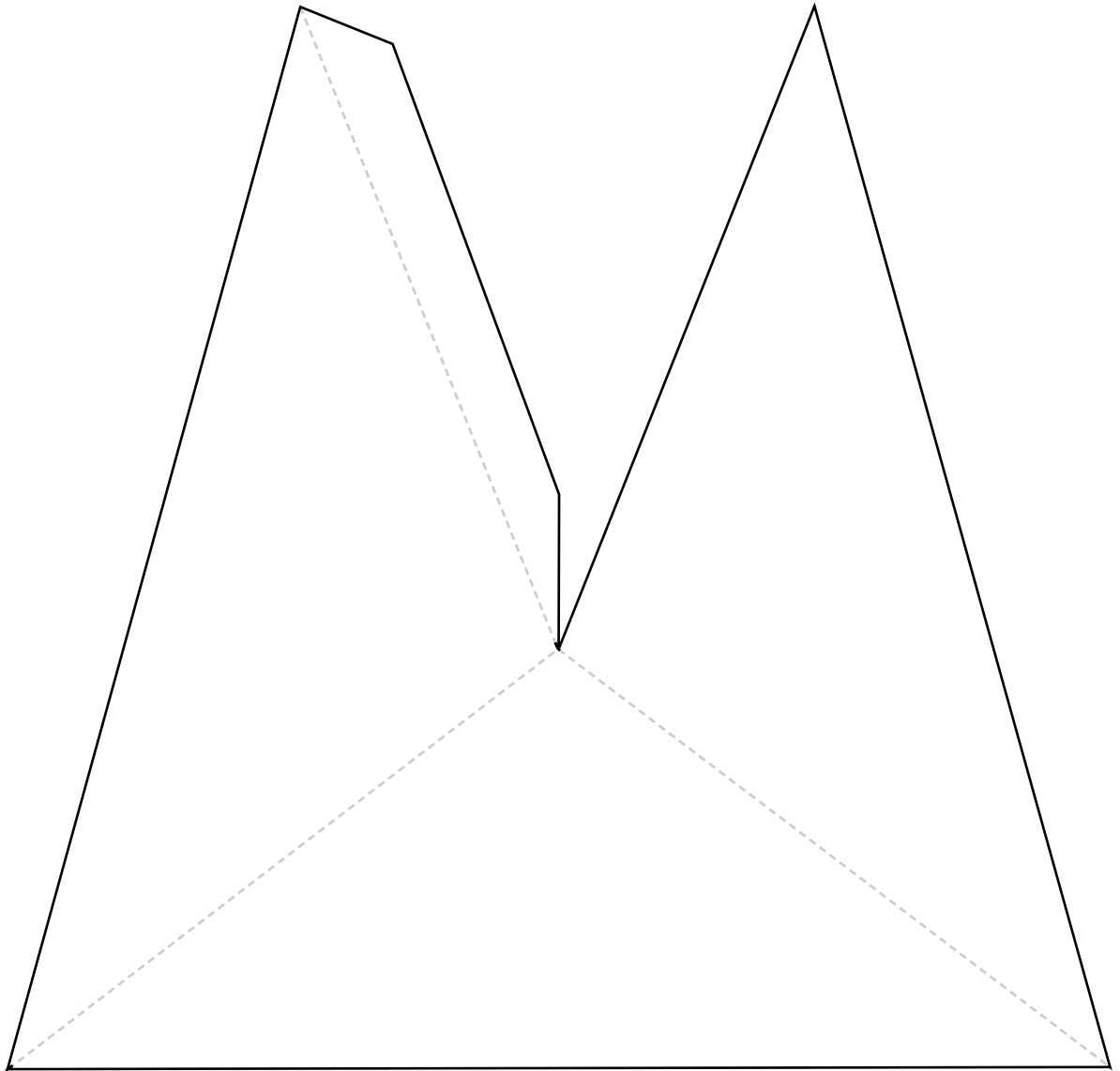


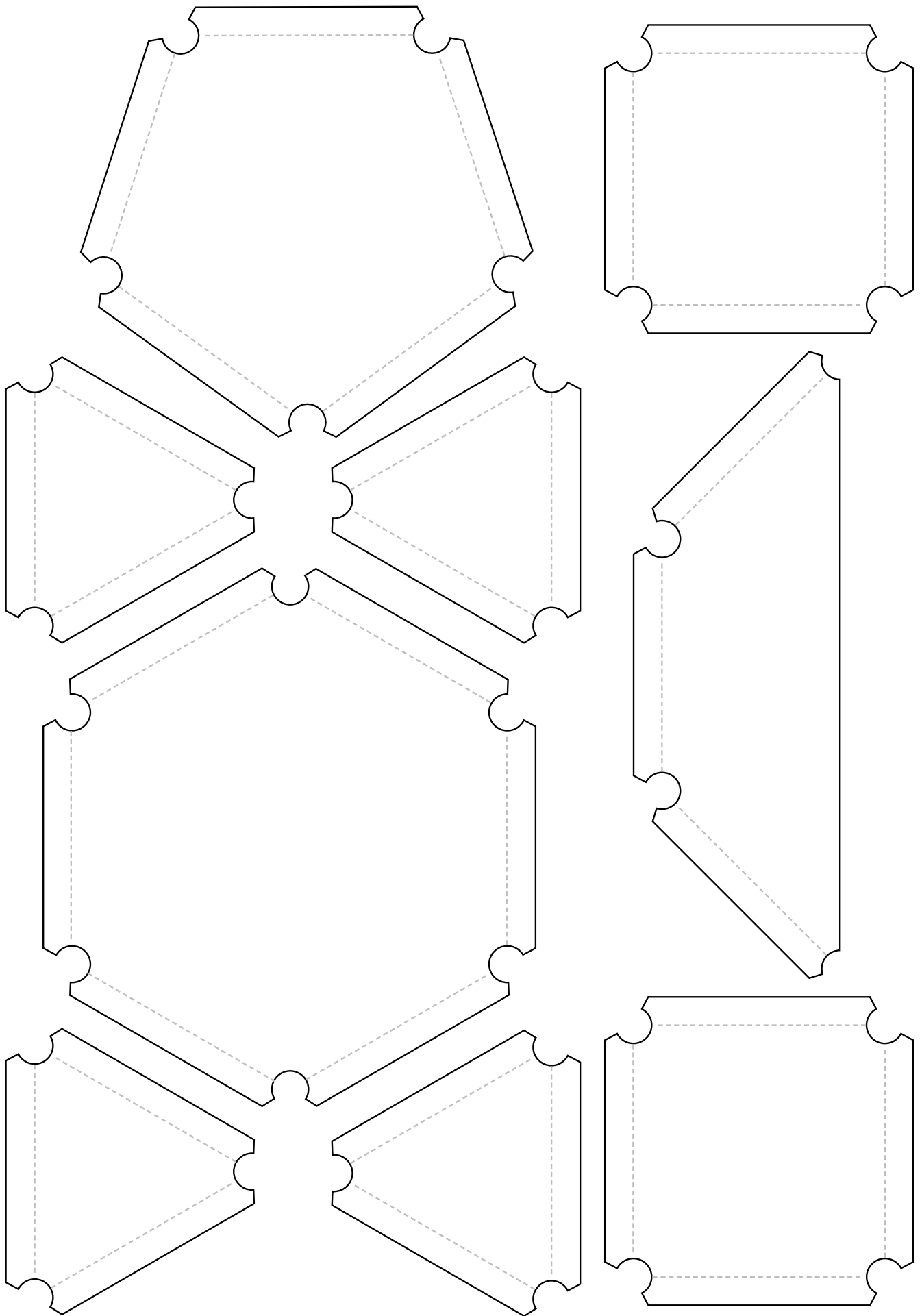


2



3





3. Omplir l'espai



Apilar taronges



Poliedres



Problemes complexos



Apilar taronges



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 full quadriculat, monedes, bales o taronges...

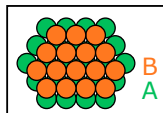
39

Apileu, apileu...

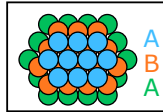
- Col·loqueu el nombre màxim de peces idèntiques dins un quadrat de costat 1, de costat 2, 3 ... 10 unitats.
 - Col·loqueu el màxim de boles unitat dins un cub de costat 10 unitats.
- Calculeu la densitat de cada empaquetament.



Què recordar?



Dins un quadrat de costat 10, podeu posar-hi més de 100 discs!
En quin grau és més gran el nombre de discs que el quadrat del costat?
En el pla, la densitat* màxima obtinguda amb discs idèntics és del 90,6%. És a dir, que hi ha menys del 10% d'espai buit.

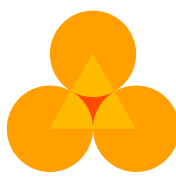
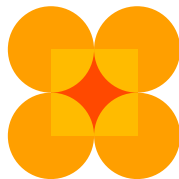


A l'espai, quan l'empaquetament és regular, la densitat* màxima s'obté (com per a les xarxes cristal·lines) quan les boles són als vèrtexs i als centres de les cares d'un empaquetament de cubs. Aquest empaquetament s'anomena "cúbic amb cares centrades". La seva densitat és del 74%.

Per als empaquetaments de boles de diàmetres diferents o de formes aplanades, el problema de la densitat màxima encara no està resolt.

* la densitat és la proporció de la superfície o el volum ocupat per les boles a l'interior de l'embolcall que les conté (aquí el quadrat, la piràmide o el cub).

Per anar més lluny



Calcular la densitat d'aquests empaquetaments de discs consisteix en comparar dins el quadrat (o el triangle), l'àrea de la part ocupada pels discs amb l'àrea del quadrat (o del triangle).



Calcular la densitat d'aquests empaquetaments de boles consisteix en comparar dins el cub (o dins el tetraedre), el volum de la part ocupada per les boles amb el volum de la piràmide (o del tetraedre).

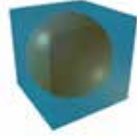
Apilar taronges



Per anar més lluny

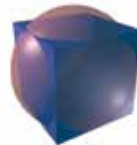
Pregunta 1

Entre un kilogram de cafè mòlt i un de cafè en gra, quin ocupa un volum més petit?



Pregunta 2

Dins un cub, col·loqueu una esfera que sigui tangent a les sis cares del cub. Quin és, segons vosaltres, la relació entre els volums (sense fer el càlcul). Feu la mateixa estimació amb la relació d'àrees. Comproveu fent el càlcul que **les dues proporcions són iguals!** Aquest és un dels mètodes que va permetre a **Arquimedes** determinar l'àrea i el volum de l'esfera.



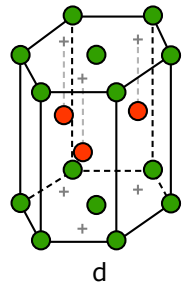
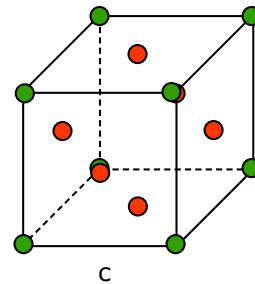
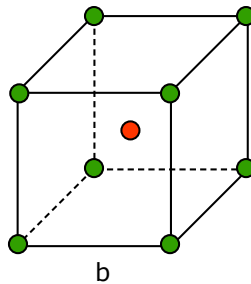
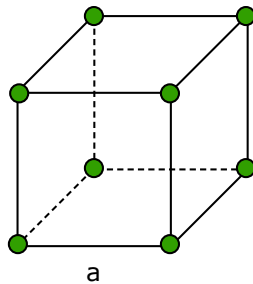
Pregunta 3

En un cub, col·loqueu una esfera que sigui tangent a les arestes del cub. Feu-vos les mateixes preguntes. Ara el comentari és el següent: **la raó dels volums és igual al doble de la densitat màxima de l'empaquetament d'esferes.**

Per anar més lluny

Alguns resultats fàcils de comprovar:

- a. Empaquetament cúbic simple – Densitat: $\pi/6$
- b. Empaquetament cúbic centrat – Densitat: $\pi\sqrt{3}/8$
- c. Empaquetament cúbic de cares centrades – Densitat: $\pi\sqrt{2}/6$
- d. Empaquetament hexagonal compacte – Densitat: $\pi\sqrt{2}/6$



Aplicacions de les matemàtiques

Totes les empreses que es dediquen a l'envasat d'objectes, de grans, de pastilles...

Els físics i els enginyers que s'interessen en els materials i en els empaquetaments d'àtoms. Els empaquetaments també s'utilitzen en la codificació informàtica de missatges i en les seves correccions automàtiques (codis de Hamming)!

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Empaquetaments – Densitat – Kepler – Hale



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: **Patrons de poliedres**, tisores o cúter, cola

40

41

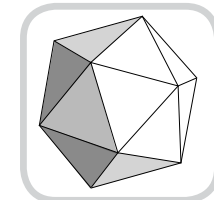
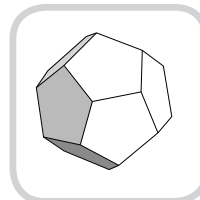
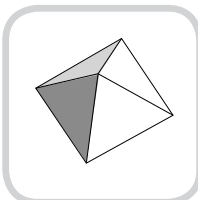
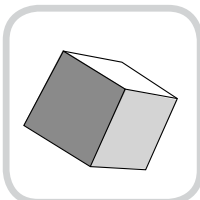
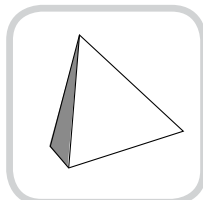
42

43

44

Fabriqueu poliedres

- A partir d'un patró de cartró o de polígons regulars acoblats, realitzeu els 5 sòlids de Plató, un doble tetraedre, una piràmide de base quadrada ...
- Trieu un polígon i feu-lo girar.
- Quantes cares, vèrtexs, arestes, té?



Què recordar?

Un poliedre regular és un sòlid les cares del qual són un mateix polígon regular repartides de la mateixa manera al voltant de cada vèrtex. N'existeixen 5 anomenats els **sòlids de Plató**. És semiregular si les cares són fetes amb 2 o 3 tipus de polígons regulars. N'existeixen 13 anomenats els **sòlids arquimedians**.

Per als poliedres convexos, regulars o no, existeix una relació entre el nombre de vèrtexs, arestes i cares:
 $V + C = A + 2$.

Va ser descoberta per **Euler** el 1752.

Què passa per a un graf pla?
I per a un sòlid amb un forat?
I amb dos forats?

Empleneu la taula següent:

Poliedre	Cares	Vèrtexs	Arestes
cub	6	8	12
...			

Hi ha una relació entre aquests nombres?

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: **Patrons de polígons**, fulls de cartolina, 1 tisores, 1 perforadora, gomes elàstiques

45

46

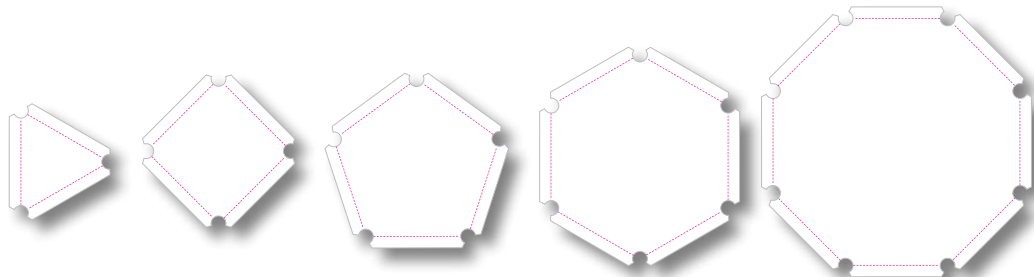
47

48

49

Fabriqueu, deduiu...

- Talleu polígons regulars de 3, 4, 5, 6 o 8 costats tal com s'indica.
- Acobleu-los per fabricar un poliedre regular, semiregular.
- Quants poliedres regulars diferents es poden construir? I semiregulars?



Aplicacions de les matemàtiques

Els arquitectes utilitzen aquestes estructures de l'espai.

Però també es troben en la natura i interessen també a físics (empaquetaments), biòlegs i naturalistes (amb les diatomees).

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Poliedres – Plató – Arquímedes – Euler

Problemes complexos

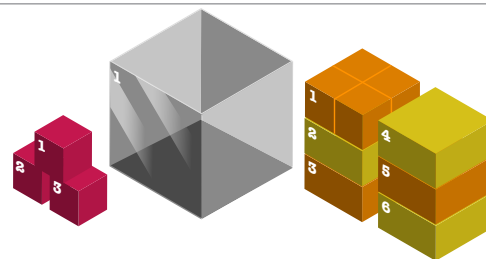


Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 3 cubs petits de fusta (o espuma...), 6 plaques (del mateix material) fetes de 4 cubs enganxats plans, 1 cub de 3x3x3

Ompliu el cofre!

El repte: omplir un cofre de 3x3x3 unitats amb utilitzant aquests dos tipus de caixes!



Què recordar?

En la vida quotidiana ens trobem regularment amb aquest problema: posar el màxim d'objectes dins una caixa o el màxim de caixes en un cofre. Per als matemàtics -entre altres-, és un **problema complex**: com més objectes hi ha, més temps cal per trobar la solució. I aquest temps augmenta exponencialment amb el nombre d'objectes.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 motxilla i objectes per posar-hi a dins

El problema de la motxilla

El repte:

Omplir la motxilla utilitzant el màxim valor dels objectes **sense sobrepassar el pes de 15kg.**



Què recordar?

Una piràmide 2 vegades més alta té un volum 8 vegades major. Així es pot, per recomposició, comparar el volum d'aquests dos tipus de piràmides. Triplicant l'altura es pot fins i tot retrobar la fórmula del volum de qualsevol piràmide:

$$\text{Volum} = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{3}$$

Amb altres poliedres el problema d'empaquetament és, en general, més complicat.

Per anar més lluny

Trobeu altres poliedres que, com el cub, omplin ells sols l'espai sense forats ni deformacions.

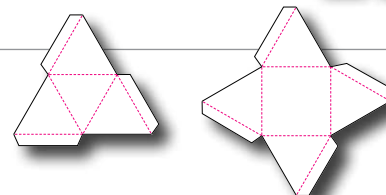
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 patrons de tetraedres, 1 cúter o unes tisores, 1 tub de cola

La gran piràmide

Fabriqueu 6 tetraedres regulars i 6 piràmides de base quadrada amb les mateixes cares triangulars.

Amb aquestes petites piràmides, construïu una piràmide el doble d'alta. Compareu els volums de les piràmides.



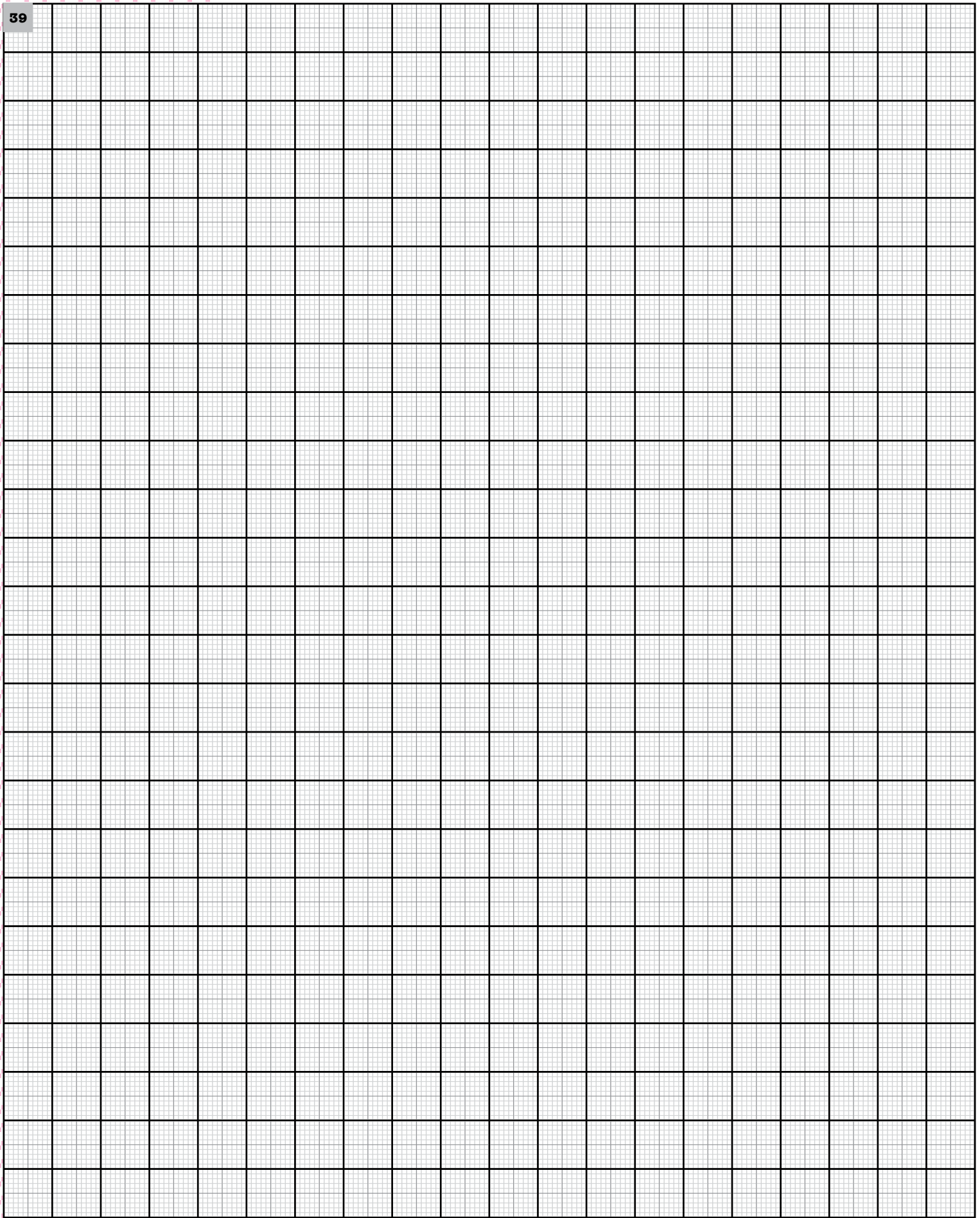
50 51

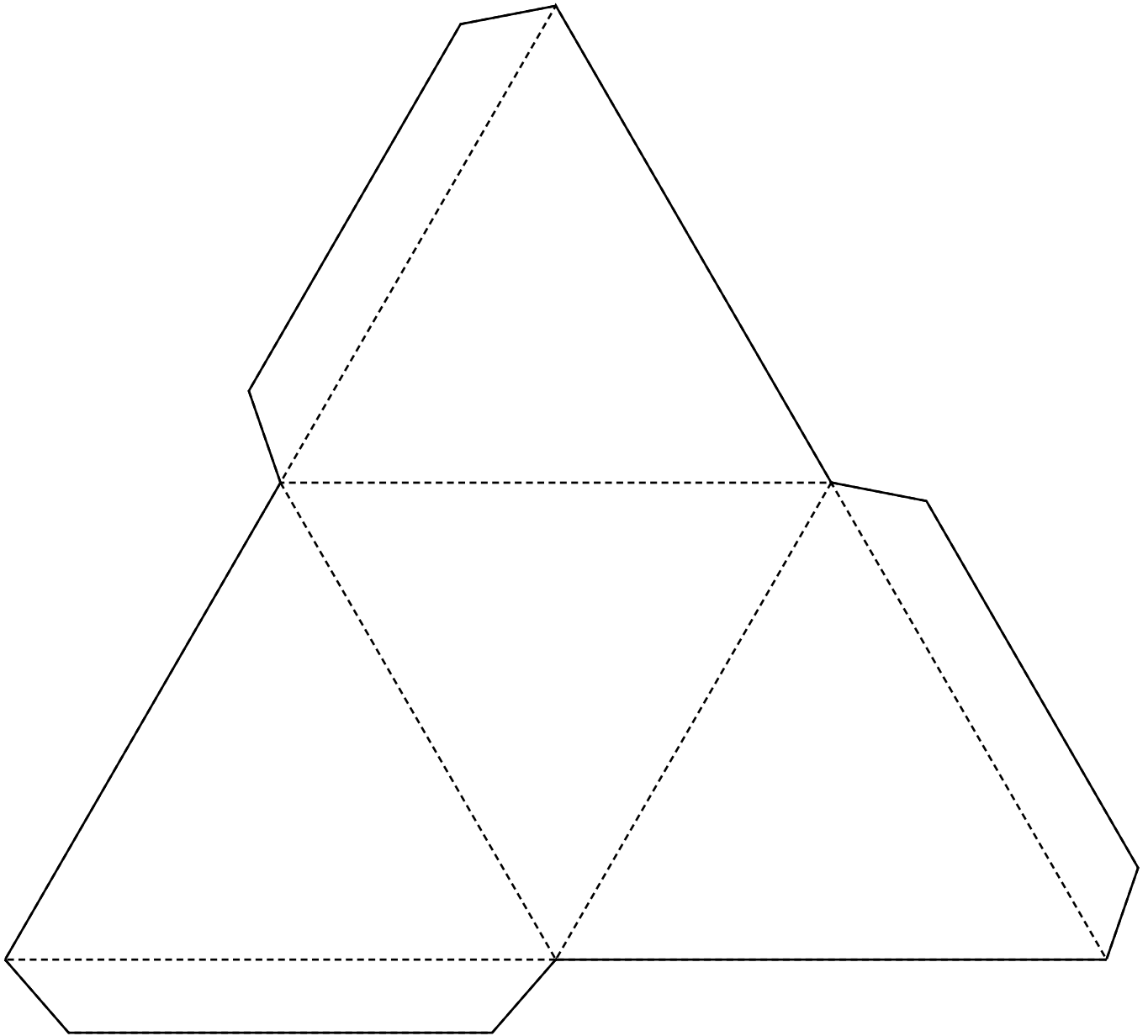
Aplicacions de les matemàtiques

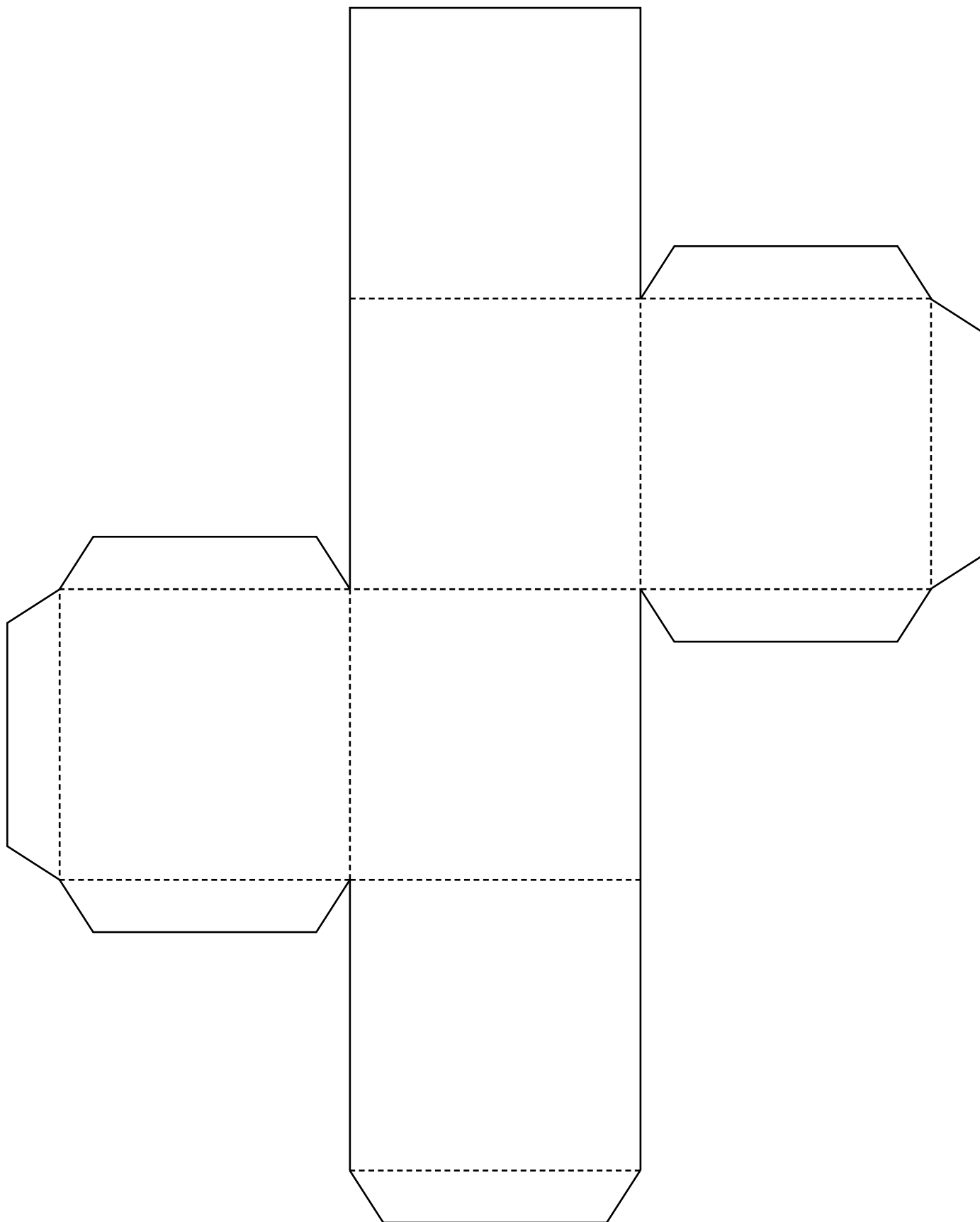
Fora de la vida quotidiana, tots els transportistes per carretera, aeris o marítims, així com totes les empreses que es dediquen a l'envasat, tracten aquests problemes d'omplir òptimament.

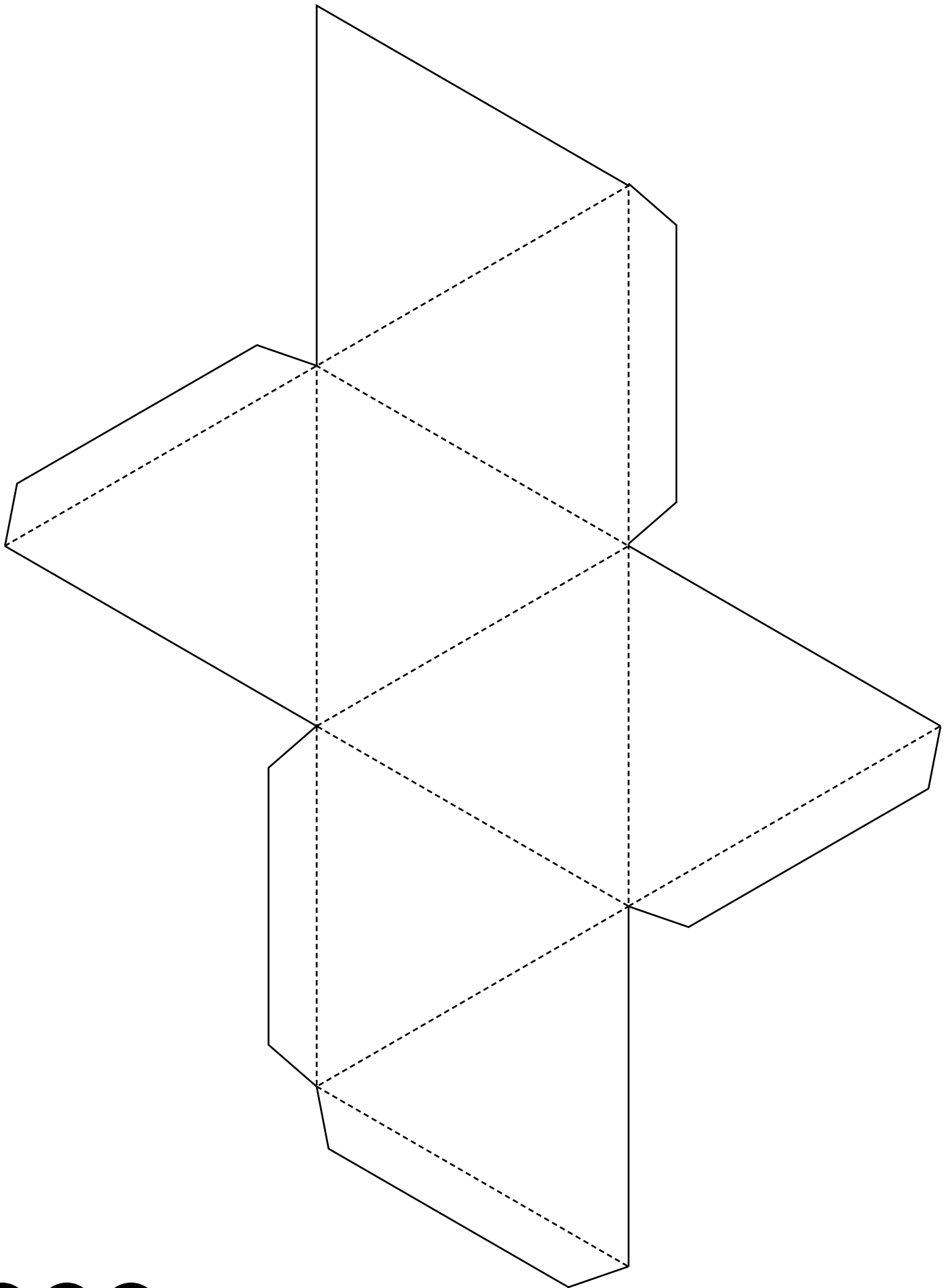
PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

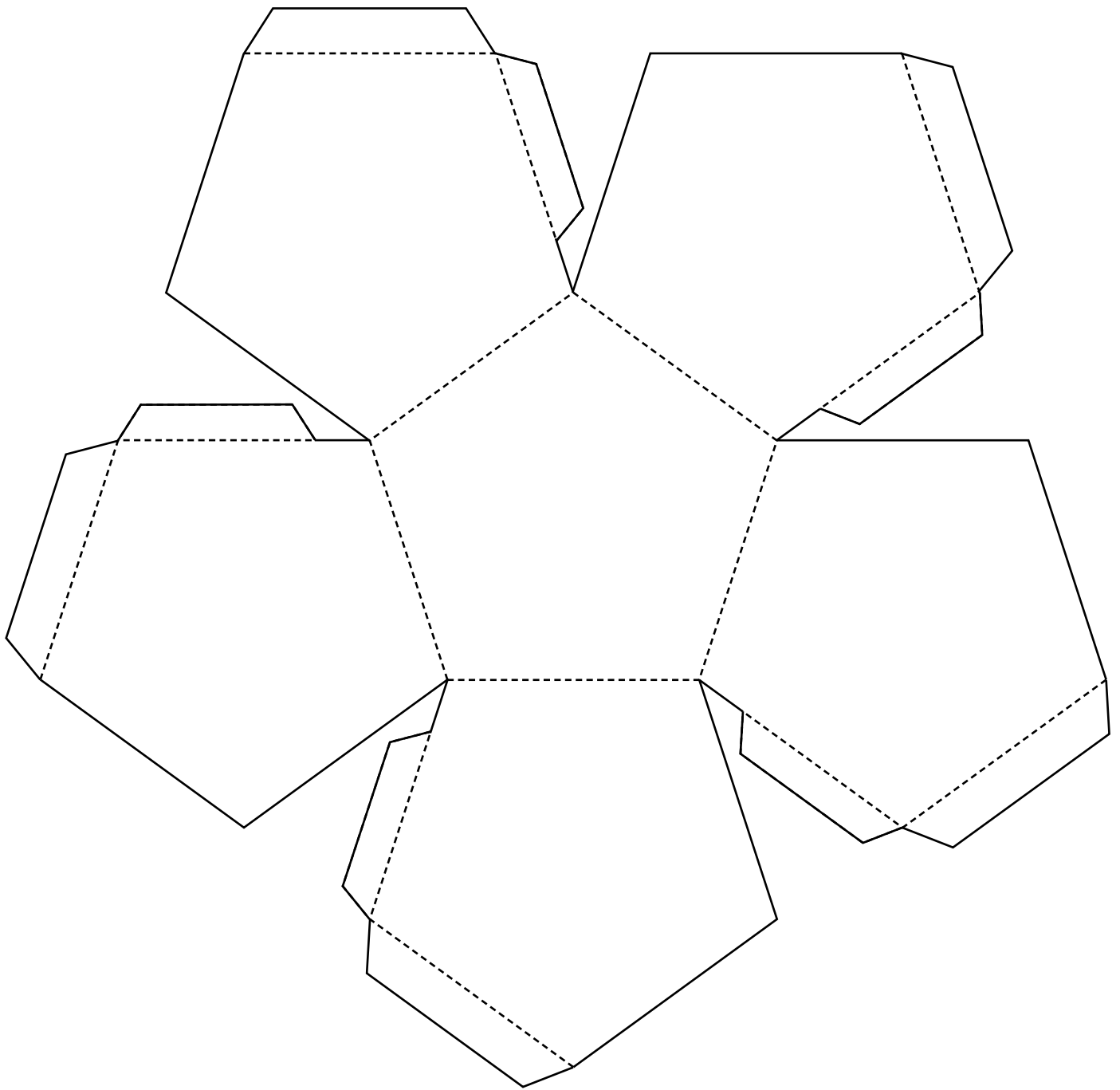
Volum d'una piràmide – Problema complex – Problema NP

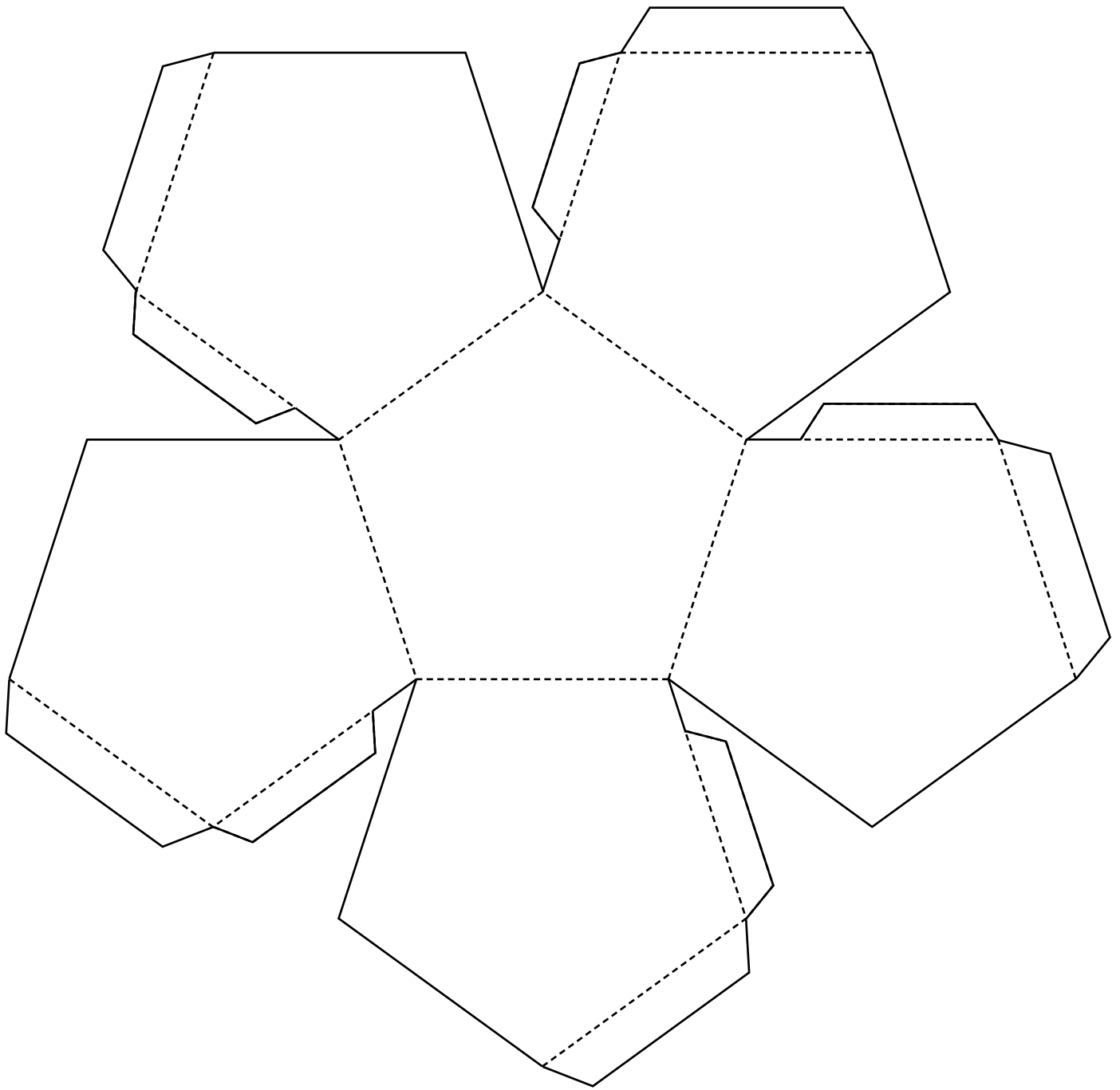


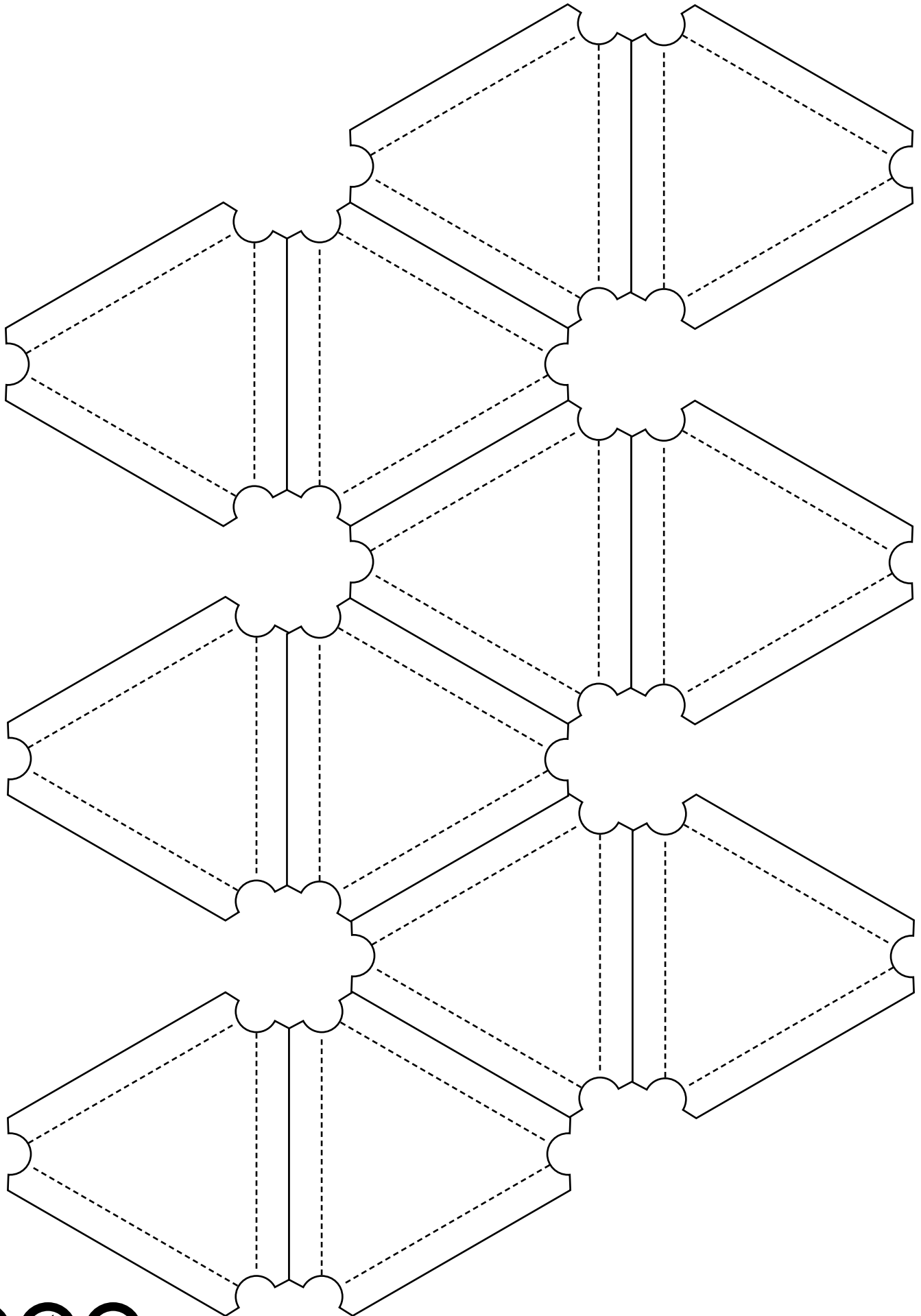


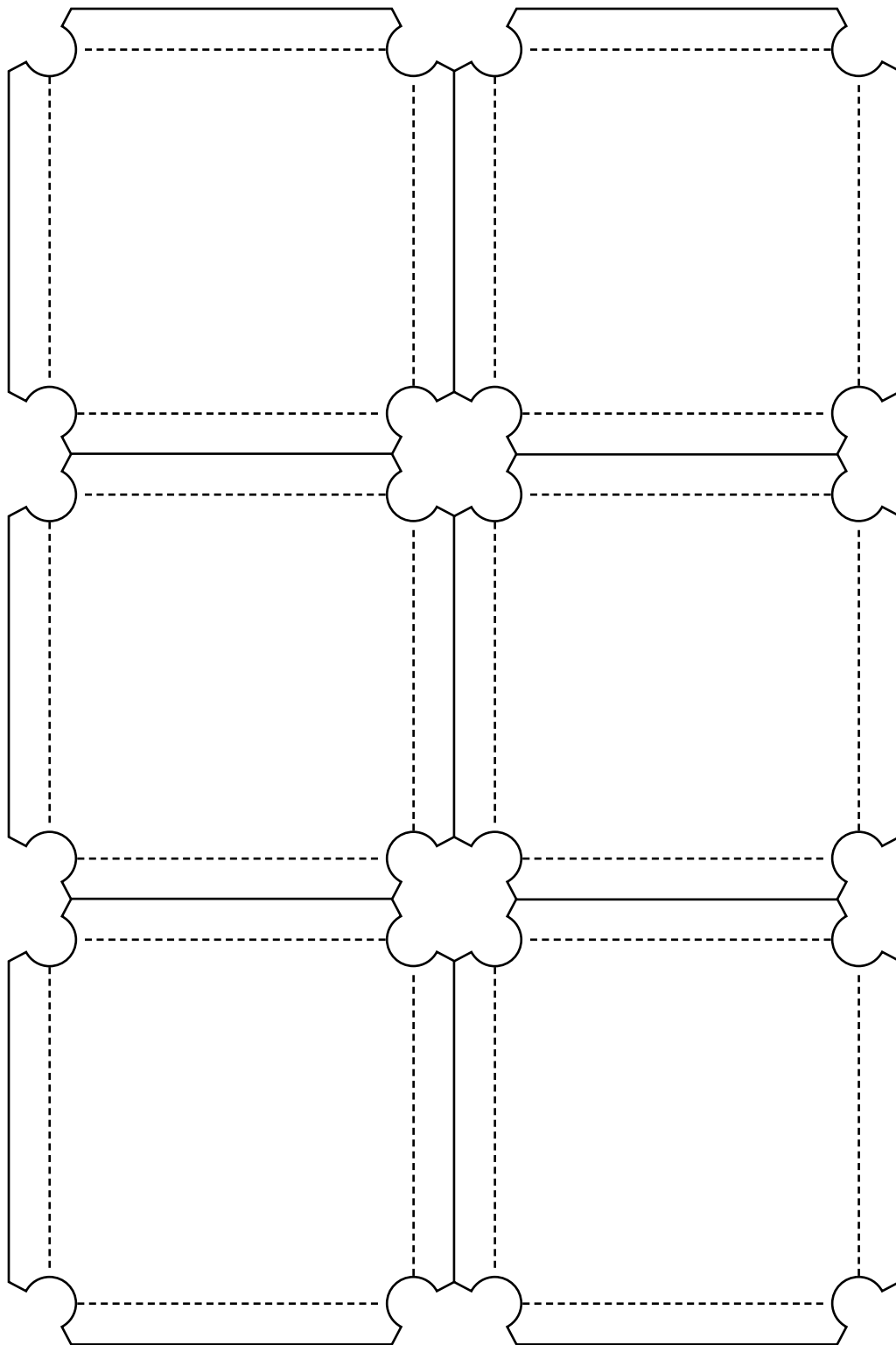


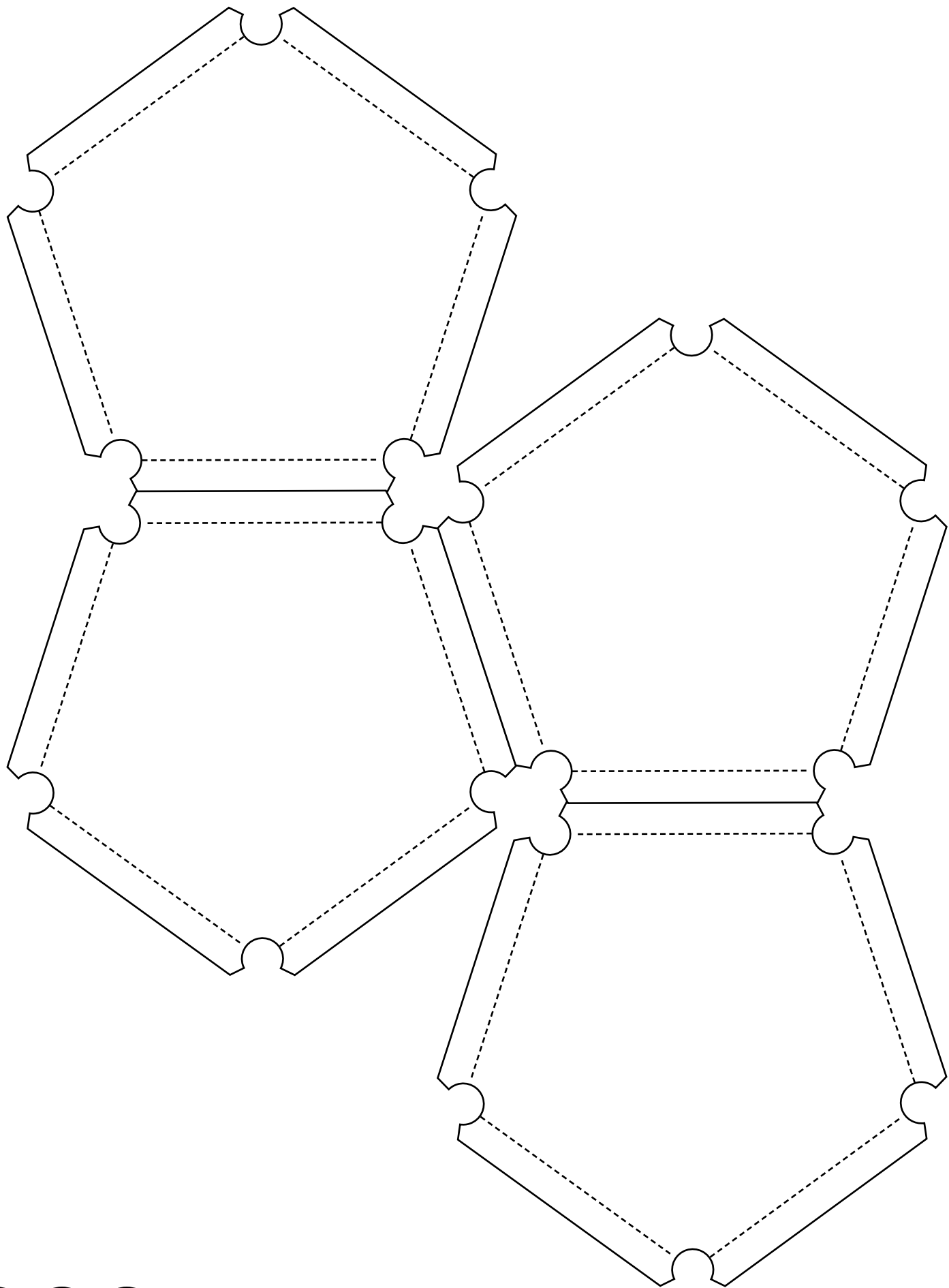


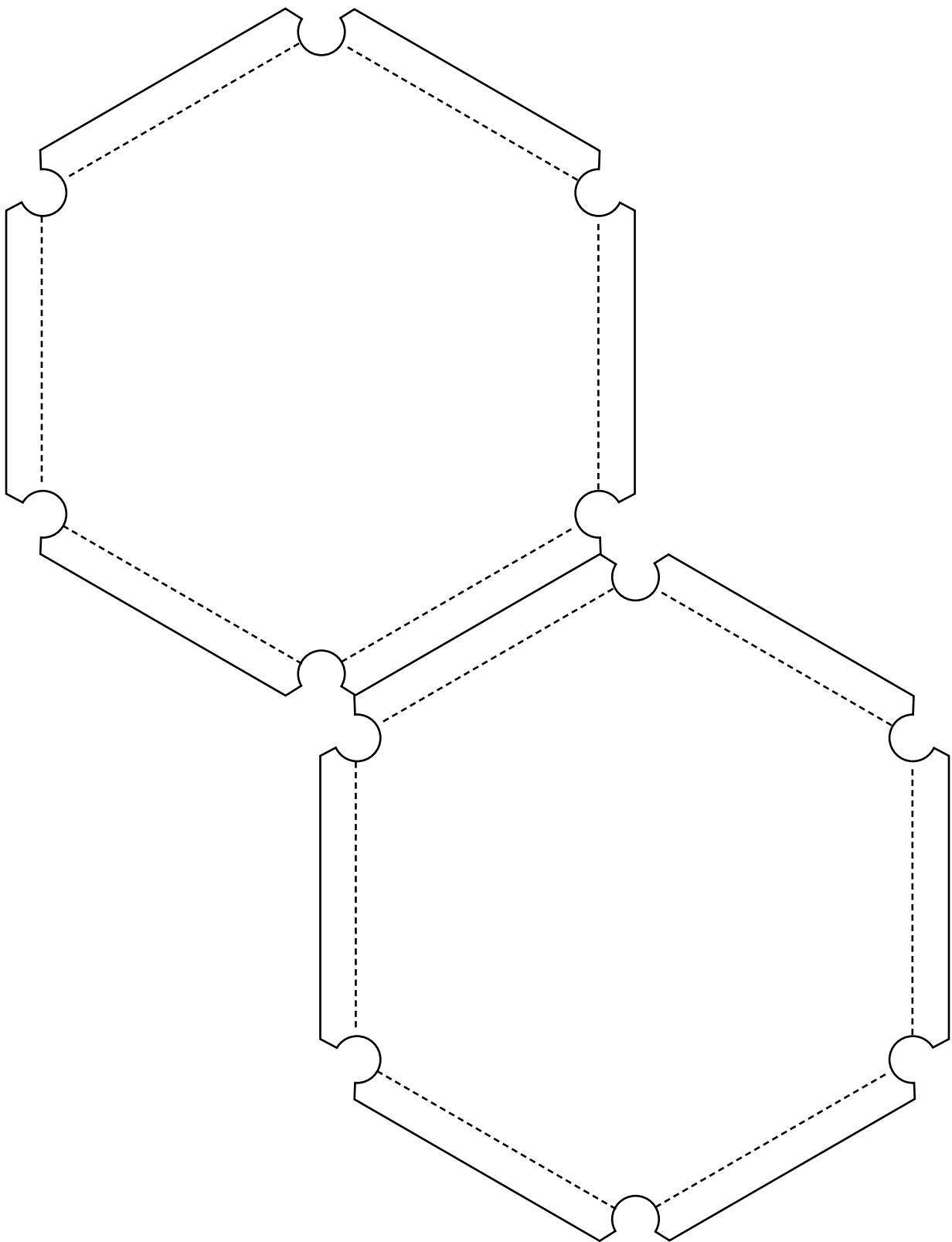
**1/2**

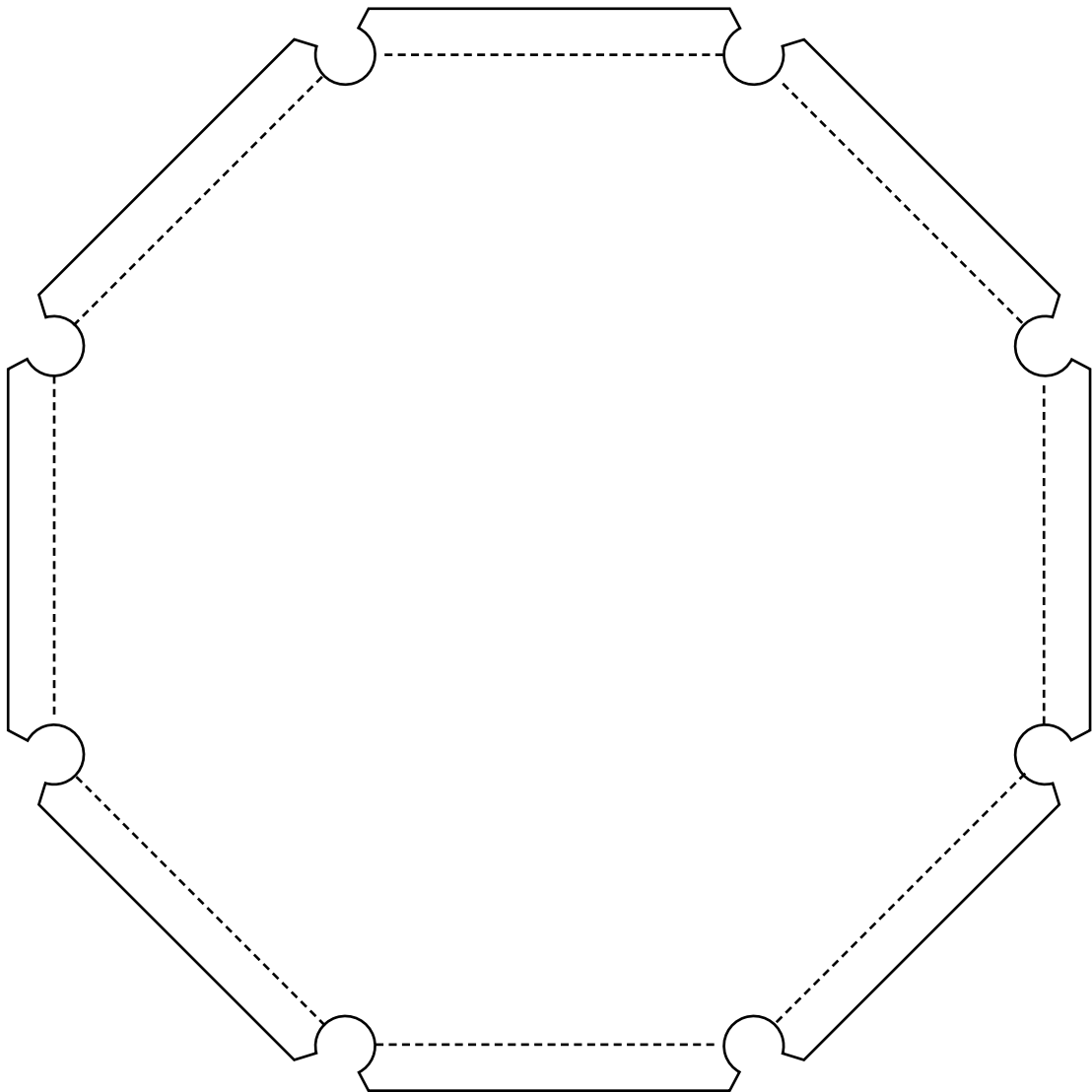
**2/2**

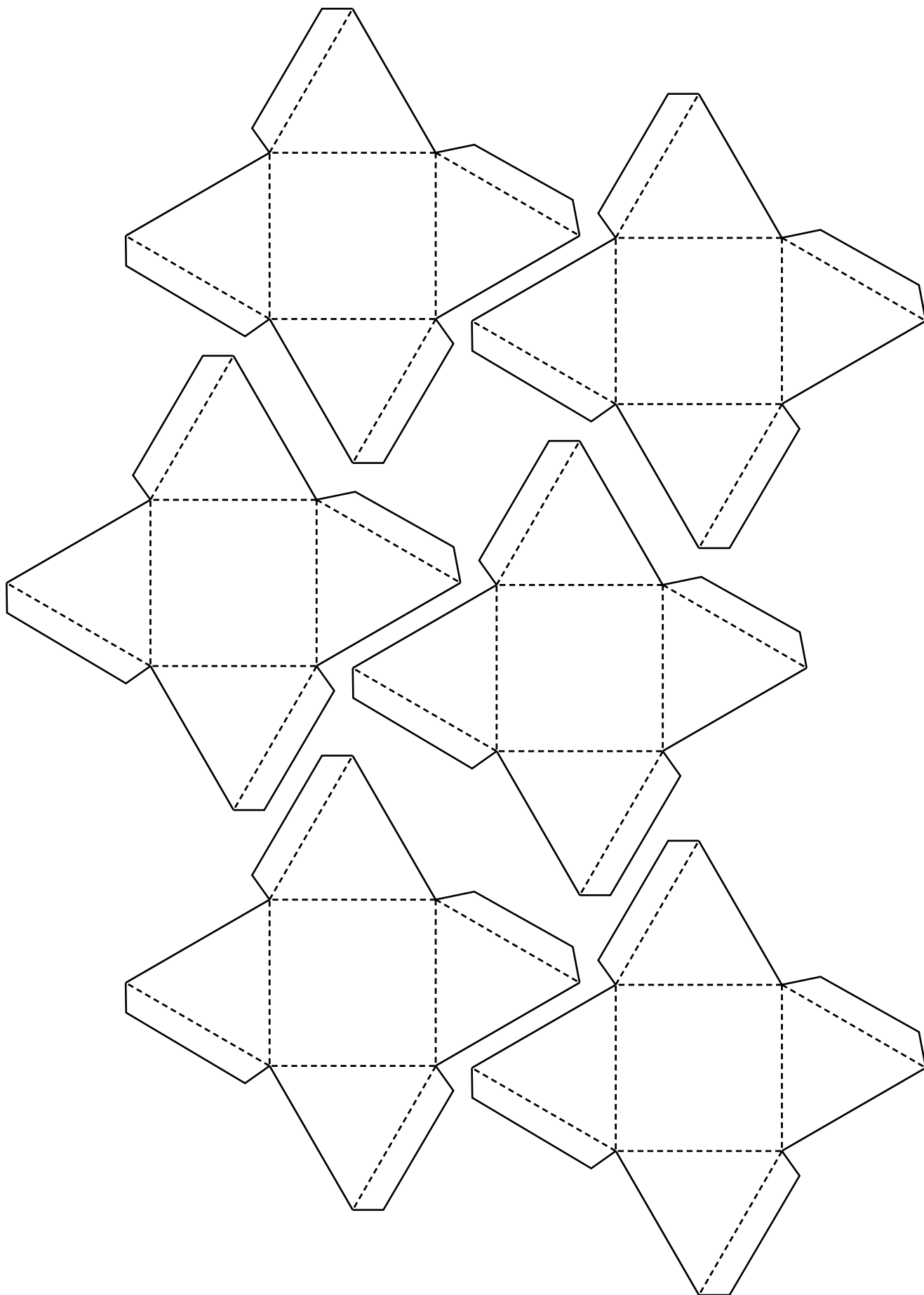


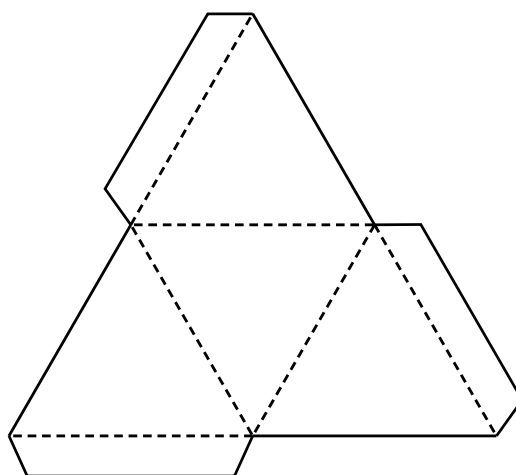
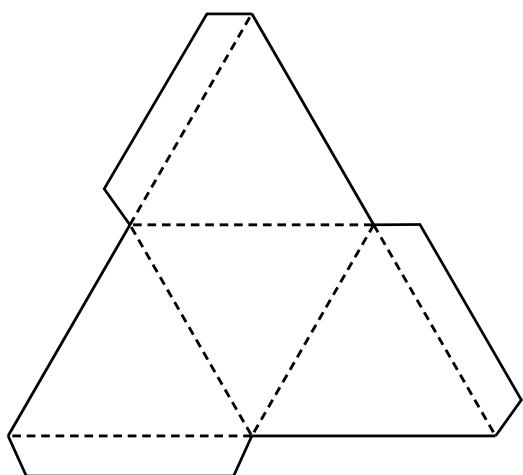
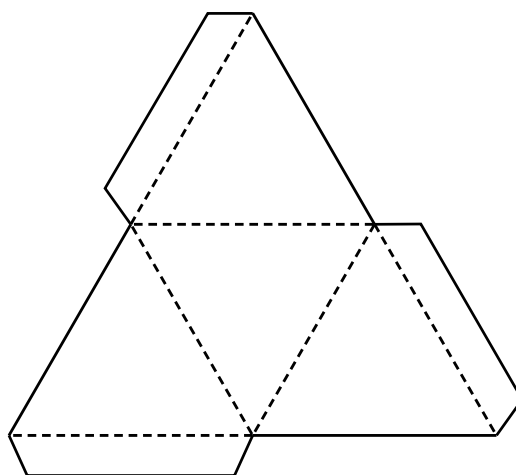
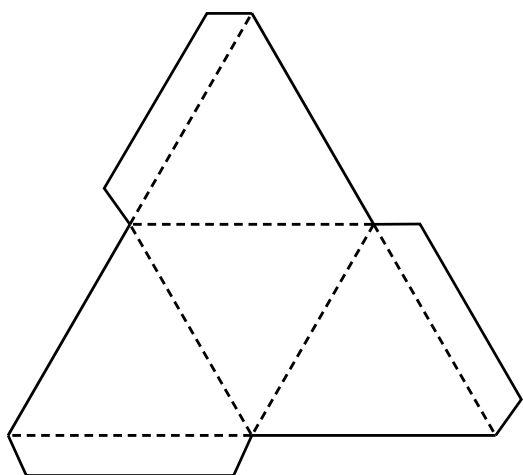
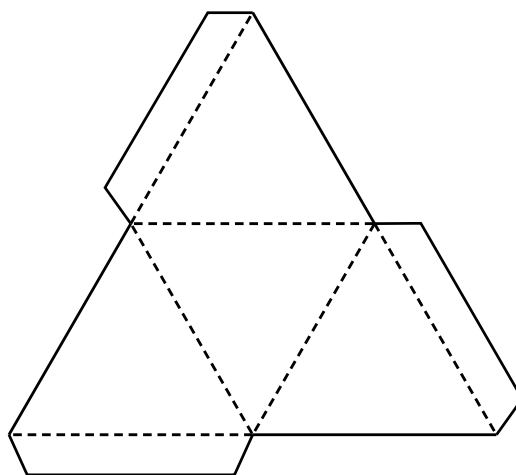
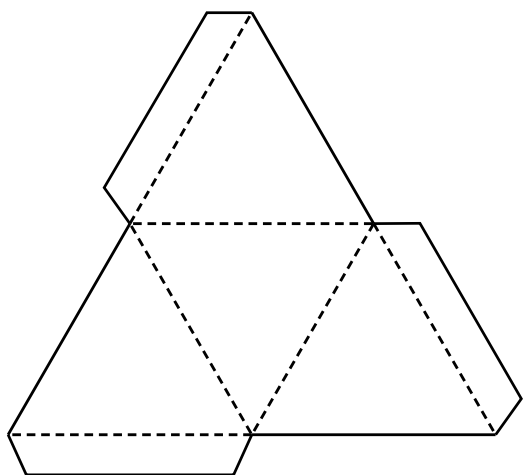














4. Connectar-se



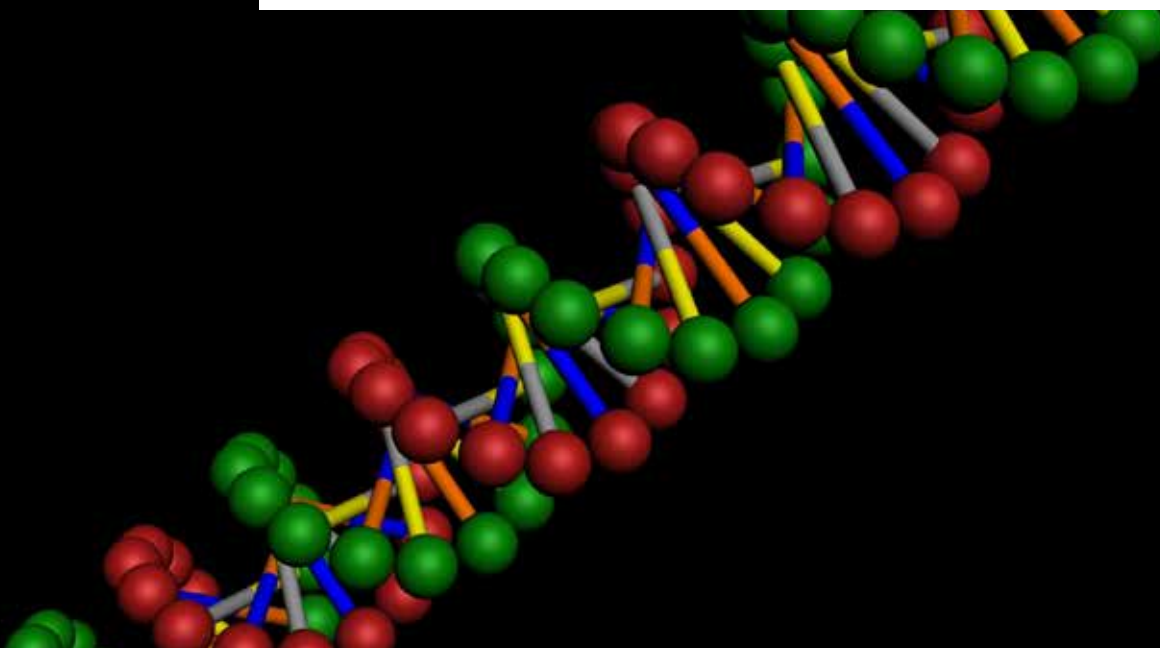
D'un sol traç



Quatre colors basten!



Hola, ets tu?



D'un sol traç



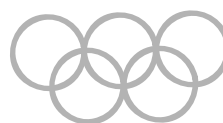
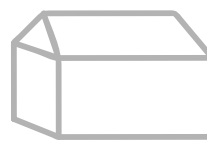
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Models de dibuixos, 1 llapis

57

Dibuixeu d'un sol traç...

Proveu de repassar aquestes figures sense aixecar el "llapis" i sense passar dues vegades per la mateixa línia. Quan és possible? Quan impossible?



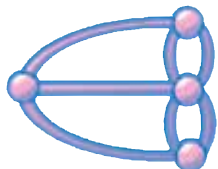
Què recordar?

Königsberg*, 1736

És possible recórrer la vila travessant per cadascun dels 7 ponts una vegada i només una?

Per resoldre aquest problema, l'origen de la teoria de grafs, **Euler** extreu la informació essencial: hi ha quatre zones separades per l'aigua del riu, són quatre punts a connectar per 7 línies que simbolitzen els ponts. El problema esdevé: en aquest dibuix existeix un camí que passi una sola vegada per cada línia? Això va ser l'origen de la **teoria de grafs**.

La resposta d'**Euler** fou: Quants punts hi ha on hi acabin un nombre imparell de camins? Només hi ha solució si aquest nombre és igual a zero o a dos!



Qüestió: I si s'afegeix un pont que connecta les dues ribes (com passa avui dia)?

* Avui dia Kaliningrad (regió russa separada de Rússia per Polònia i Lituània)

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 joc de dòmino sense dobles

Dòmino-dòmino

Proveu de fer una cadena amb totes les fitxes seguint les regles del joc. Torneu-hi sense les fitxes que porten un 6. Després sense les que porten un 5... Sempre és possible? Per què?

Cada dòmino representa l'aresta d'un graf de 7 vèrtexs, numerats del 0 al 6. Cada camí eulerià correspon a una cadena de dòminos.

Aplicacions de les matemàtiques

La teoria de grafs s'utilitza per modelitzar i estudiar situacions tan concretes com les xarxes de comunicació, els circuits electrònics, les xarxes de distribució – aigua, gas, electricitat, correu...- i nombrosos problemes de logística, transport, producció...

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Grafs – Teoria de grafs – Camí eulerià – Euler

Quatre colors basten!



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 mapa geogràfic, 4 llapis o retoladors

58

Només amb 4 colors!!!

Un o dos jugadors.

Proveu de pintar aquest mapa usant el menor nombre de colors possible.

I penseu en el mar!

Les regles del joc: 2 països veïns han de tenir colors diferents.

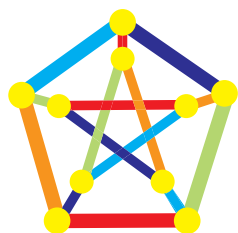
Perd el primer que no pugui jugar!



Què recordar?

El teorema dels 4 colors

La teoria dels grafs ha permès modelitzar aquest problema i reduir el nombre de casos a estudiar. Però és gràcies als ordinadors que s'han pogut analitzar totes les situacions i s'ha pogut demostrar que quatre colors són suficients. És possible trobar un algorisme d'acoloriment automàtic amb sis colors però el problema encara no està resolt amb quatre colors. És un problema "complex" ja que el temps de resolució necessari pels algorismes creix de manera exponencial en funció del nombre de "països". Hi ha algorismes no deterministes (com els algorismes genètics) que permeten resoldre'l més ràpidament.



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Poliedres regulars (tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre, piràmides...), llapis o retoladors de 4 colors

59

60

61

62

63

I a l'espai?

Construïu un poliedre regular (o d'un altre tipus) respectant la regla dels 4 colors: dues cares veïnes han de tenir colors diferents.

De la mateixa manera, construïu un poliedre amb un forat i proveu de pintar-lo!

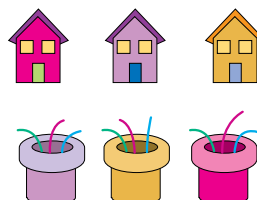


Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 dibuix pla i sobre un tor

3 pous & 3 cases

En cada cas, intenteu connectar les tres cases amb els tres pous amb una xarxa sobre la superfície sense que les línies es creuin.



Qüestió: I si s'afegeixen un quart pou i una quarta casa?



Qüestió:

Un llop, una cabra i una col són a la vora dreta d'un riu. Un barquer ha de transportar-los a l'altre costat del riu, però només pot transportar-ne un d'ells cada vegada! Ajudeu-lo!

Atenció!

El llop es menja la cabra i la cabra es menja la col!!

Aplicacions de les matemàtiques

Aquests algorismes intenten resoldre problemes d'agrupament d'objectes respectant certes regles. Tenen aplicacions pràctiques en l'execució de programes de treball (calendari d'operacions, d'horaris, d'exàmens...), de xarxes de telefonia mòbil, de xarxes de comunicació per Internet, de transmissions segures per la web...

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Acoloriment de grafs – Algorismes – Algorismes genètics

Hola, ets tu?



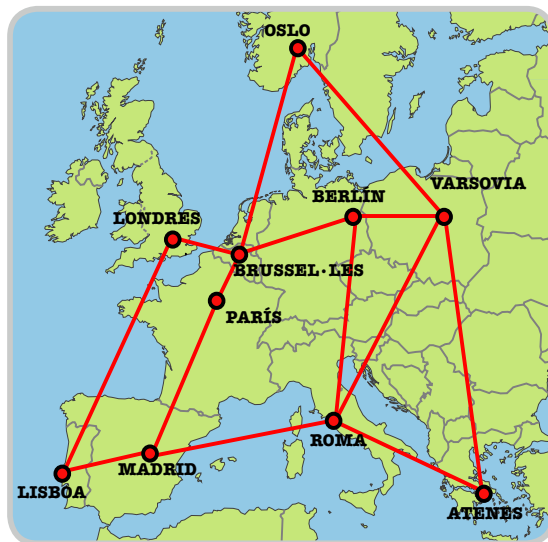
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 mapes, 1 llapis

64

El viatjant de negocis

Un viatjant vol visitar deu ciutats perdent el mínim temps possible en el transport. Ha de sortir d'una ciutat i tornar-hi passant **una sola vegada** per totes les altres. Ajudeu-lo a fer els seu viatge.



Atenes

3 Berlín

4 1 Brussel·les

5 4 3 Lisboa

4 1 1 3 Londres

4 3 2 1 2 Madrid

4 1 2 5 2 4 Oslo

3 2 1 2 1 2 2 París

1 2 2 4 2 3 3 Roma

3 2 2 5 2 4 2 3 2 Varsovia

Què recordar?

Les distàncies es poden mesurar en temps, en cost del recorregut, en taxes d'electricitat o d'aigua... Aquest tipus de problema, amb un enunciat molt simple, té solucions cada cop més llargues de calcular quan el nombre de ciutats és gran. Si amb 10 ciutats calen 60 etapes de càlculs realitzades en un microsegon per un ordinador, amb 100 ciutats calen 2^{60} etapes de càlcul (2 multiplicat per 2 seixanta vegades) realitzades en centenars d'anys per un ordinador. Com més complex és un algorisme, més "temps-màquina" necessita.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Models de dibuixos, poliedres per fabricar, 1 llapis, 1 fil

62

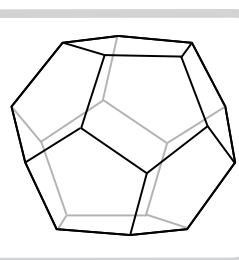
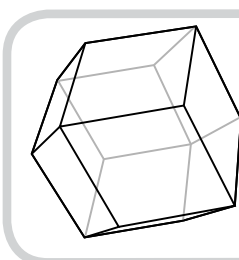
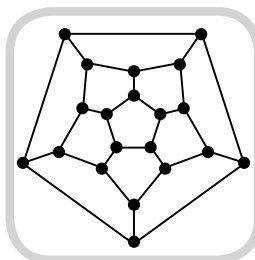
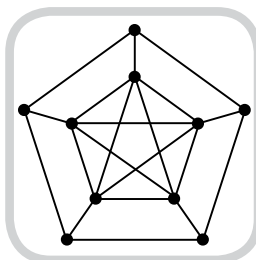
63

65

66

La volta al món

Escolliu una figura o un poliedre i proveu de trobar un camí que passi una i només una vegada per cada un dels vèrtexs.



Què recordar?

Trobar un camí hamiltonià, és trobar un camí que passi una i només una vegada per cada vèrtex. Aquest tipus de problema encara no té una solució general. És un problema complex. **Hamilton** va demostrar que hi ha solucions pels vint vèrtexs d'un dodecaedre regular (fet amb 12 pentàgons). Passa el mateix per l'altre dodecaedre (fet amb 12 rombes)?

Hola, ets tu?

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Un tauler d'escacs i peces per retallar, 1 tisores

67

68

Escac a les dames

- Proveu de col·locar vuit dames sobre un tauler d'escacs sense que cap d'elles pugui matar a les altres.
- Proveu de desplaçar un rei de casella en casella per recórrer una sola vegada totes les caselles (sense moviments en diagonal).
- Proveu de desplaçar un cavall sobre el tauler d'escacs passant per cada casella una i només una vegada.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 llapis

De cap a peu

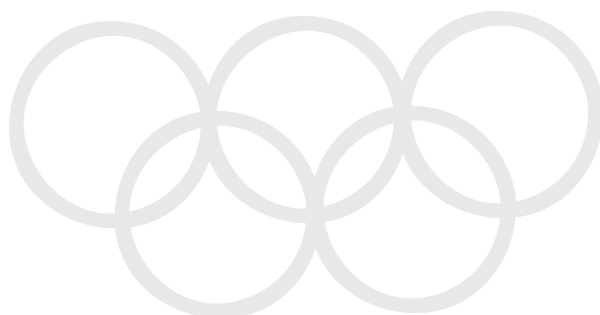
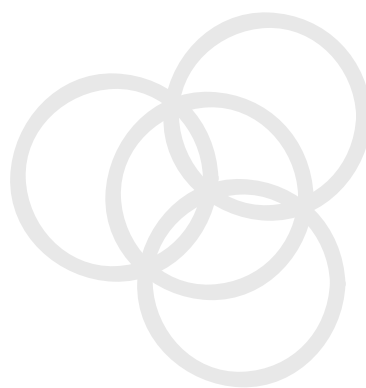
Passeu de la paraula CAP a la paraula PEU canviant una sola lletra cada vegada (cap, cas, pas,... peu!) i anat el més de pressa possible!
I de GAT a RUC?

Aplicacions de les matemàtiques

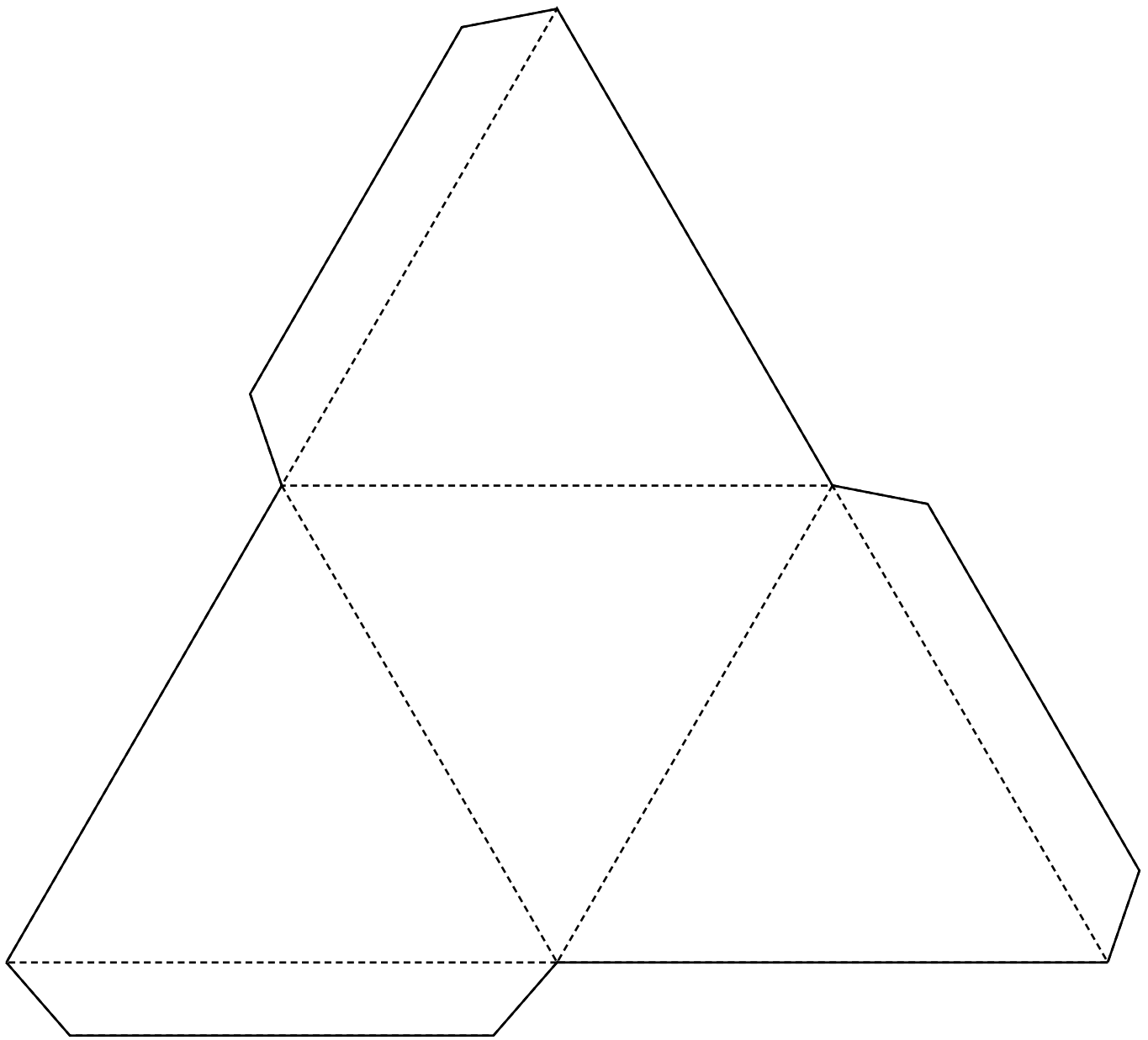
Matemàtics, informàtics i genetistes fan nombroses investigacions per trobar algorismes eficaços que puguin resoldre aquests problemes complexos... com l'estudi de la seqüenciació de 30.000 a 100.000 bases (A-T C-G) d'una molècula d'ADN

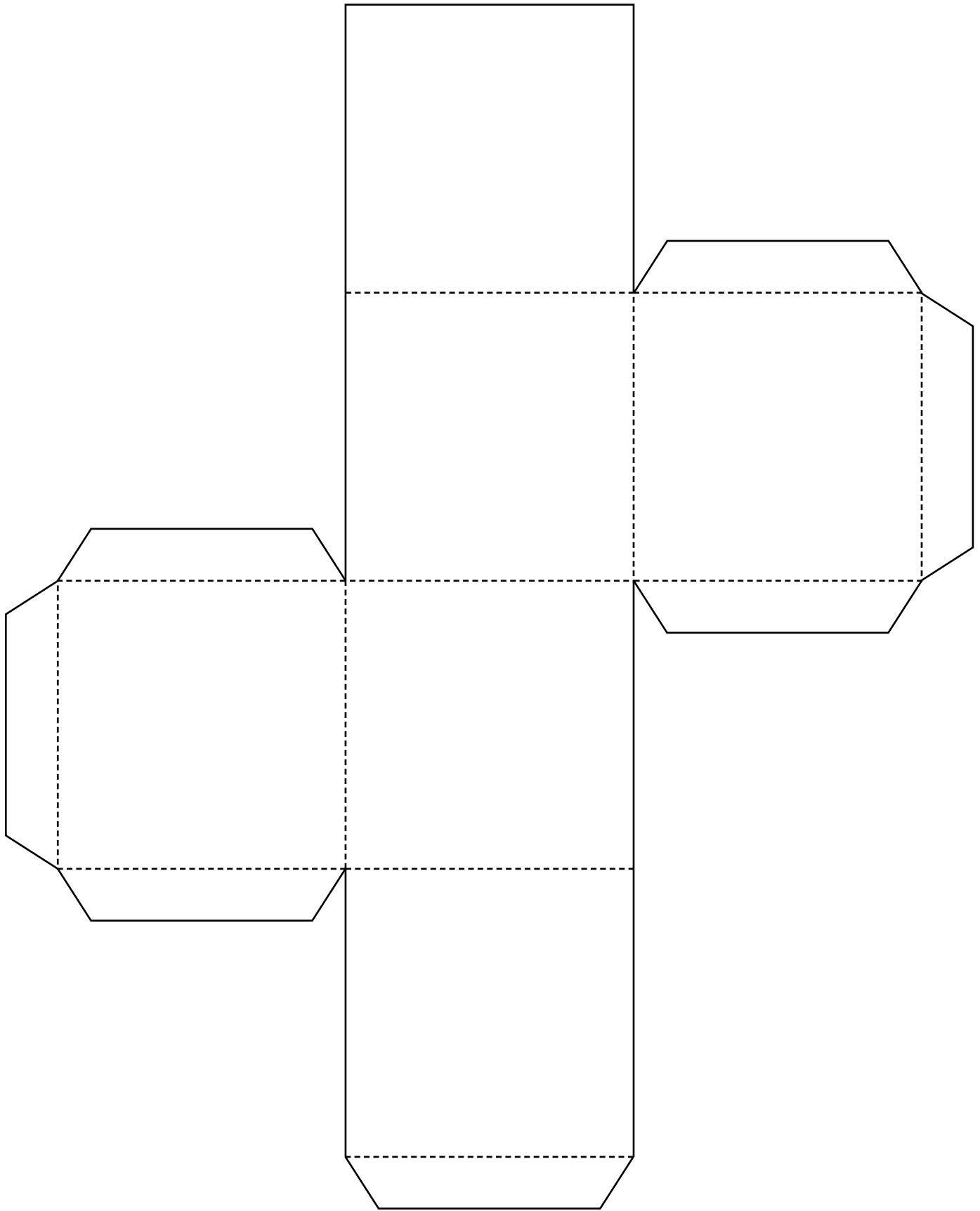
PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

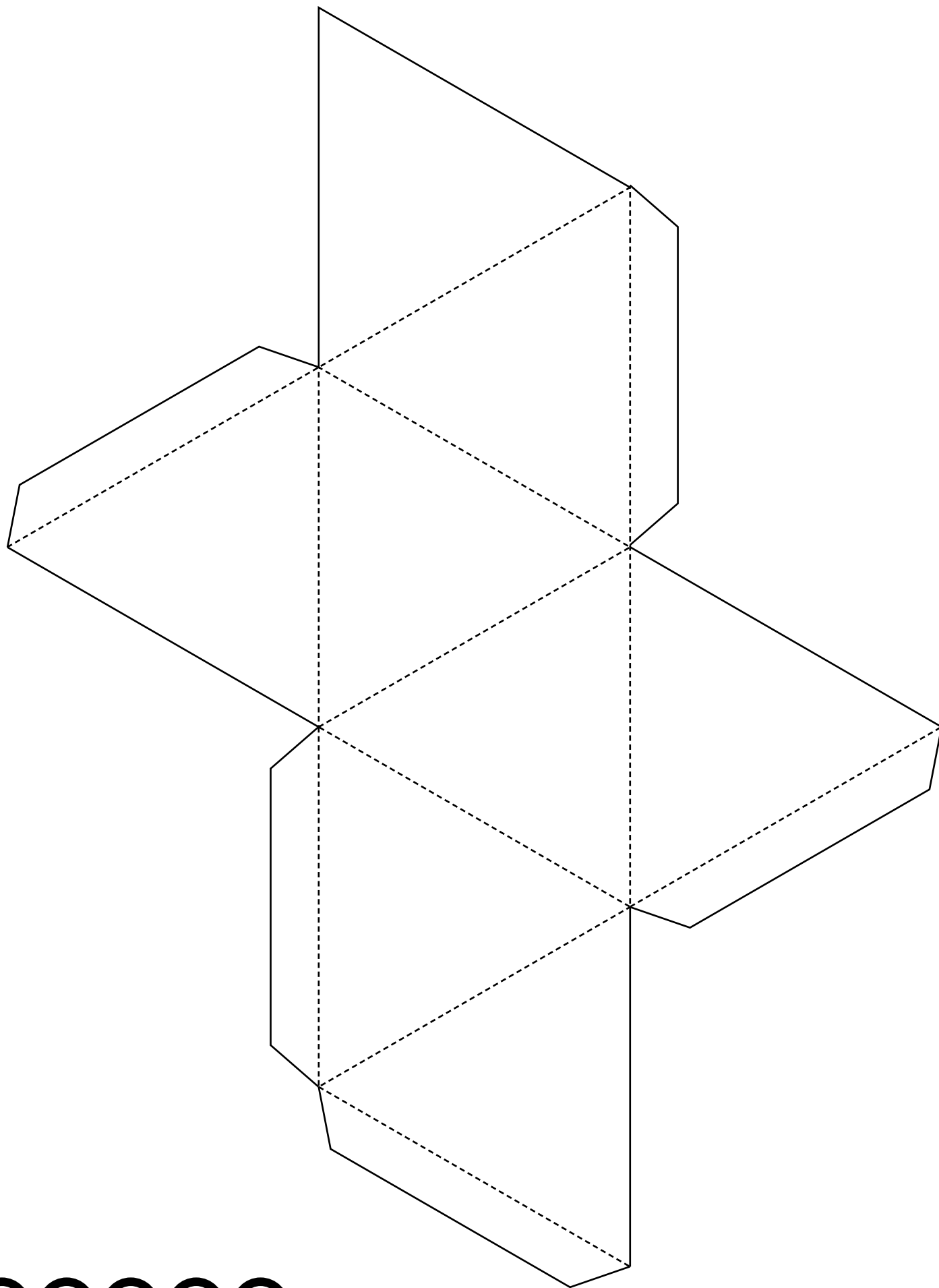
Grafs – Camí hamiltonià – Problema del viatger – Optimització

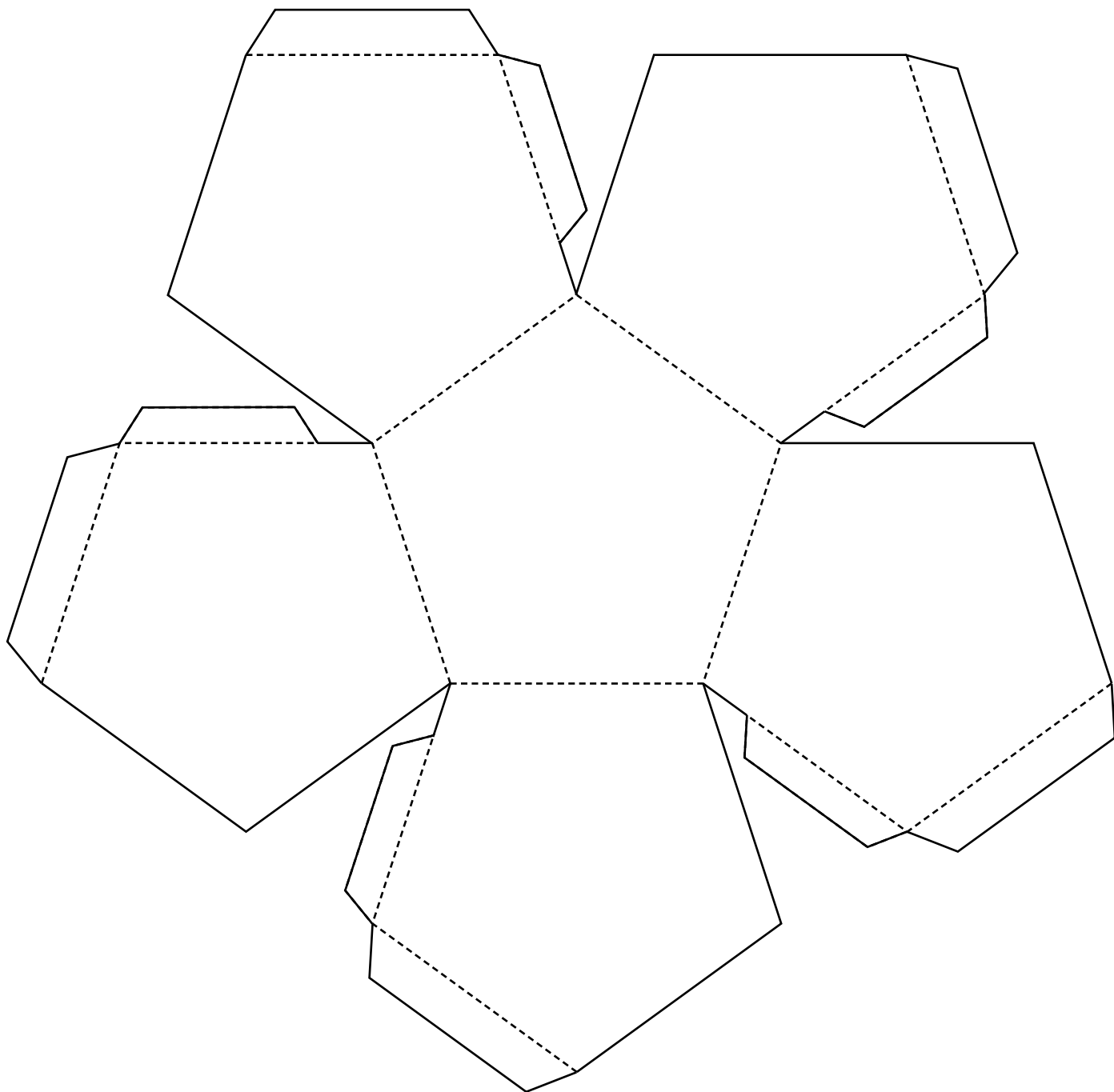


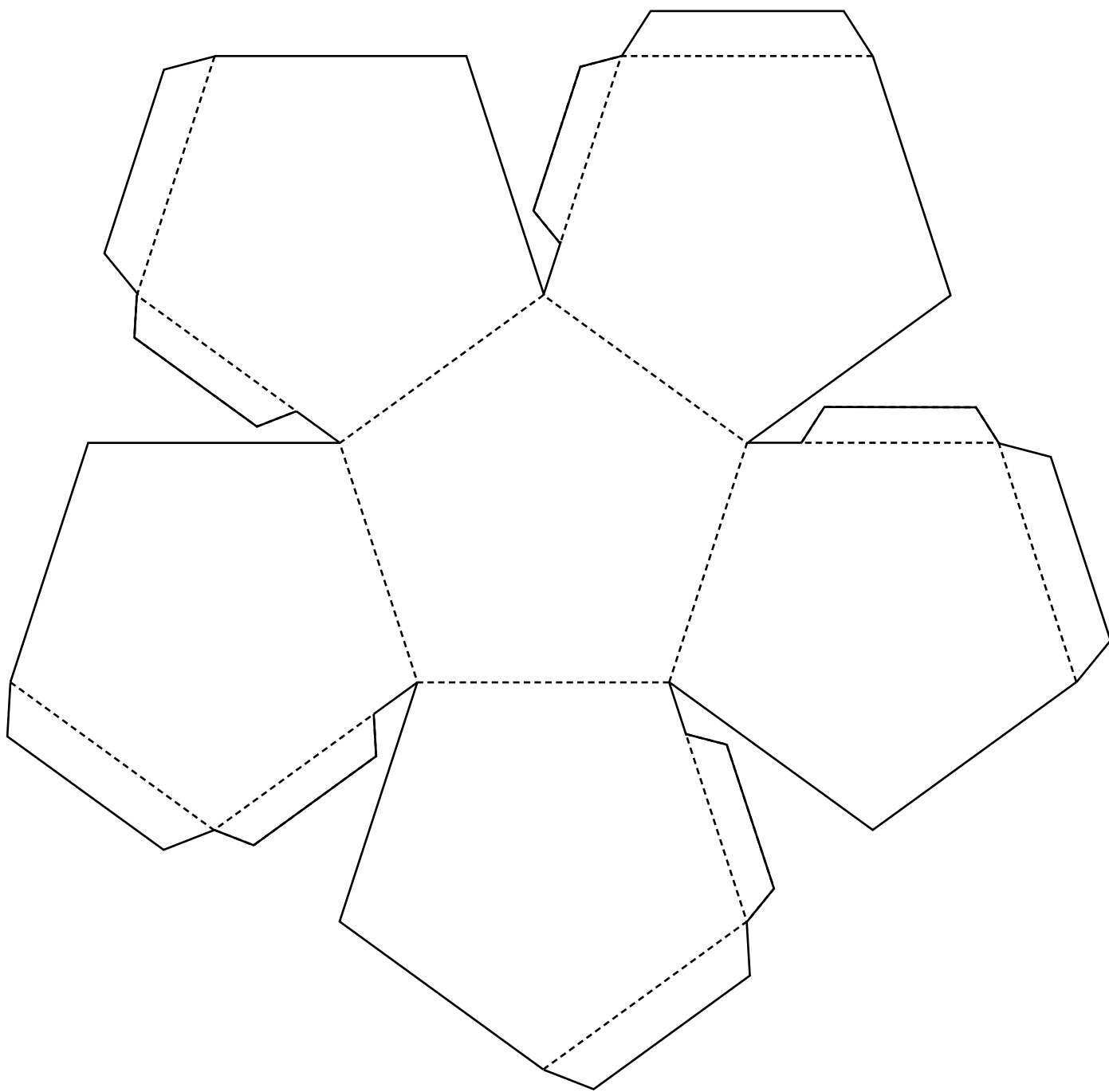








**1/2**

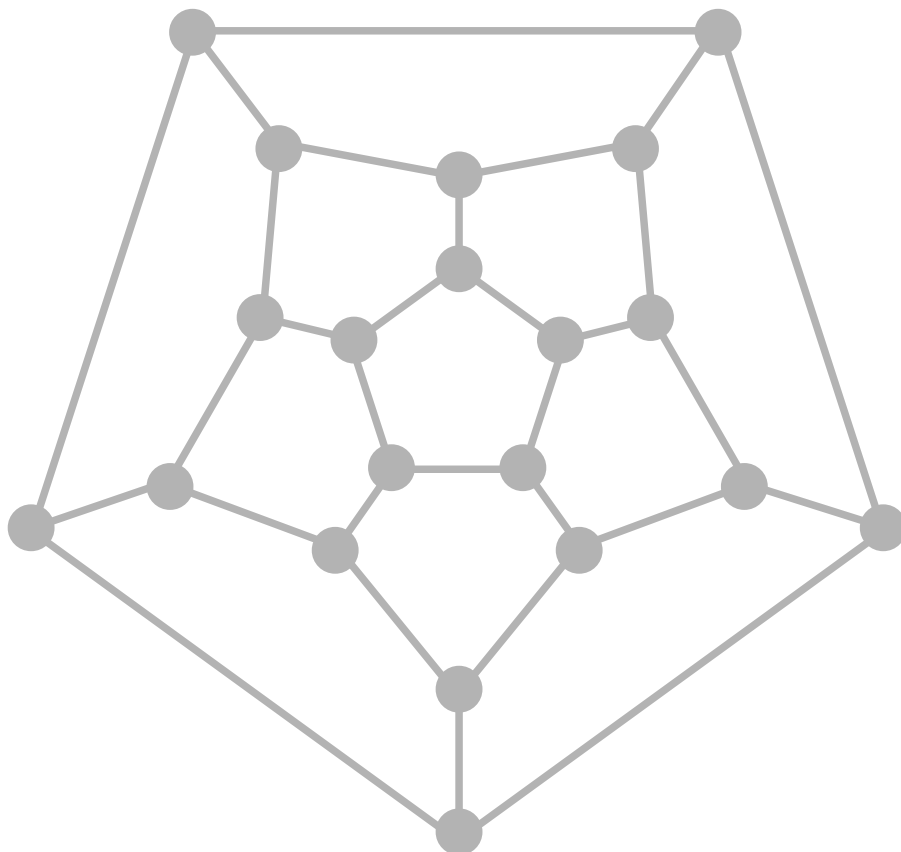
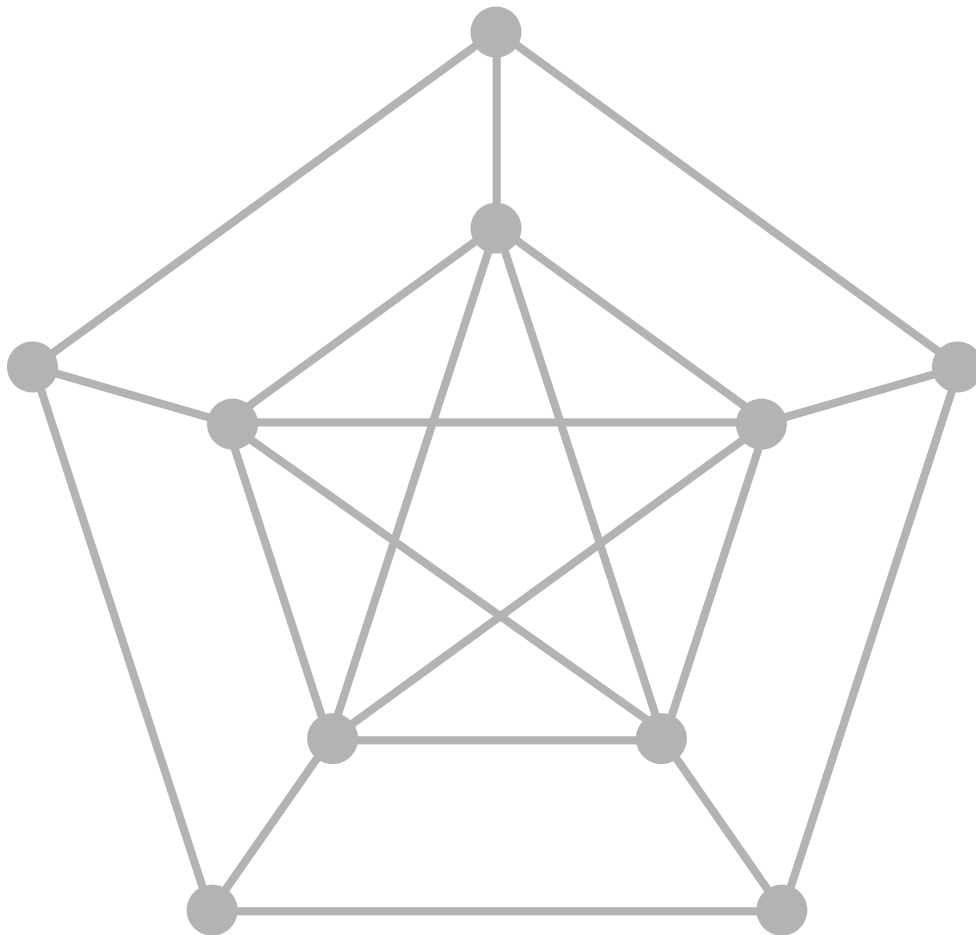
**2/2**

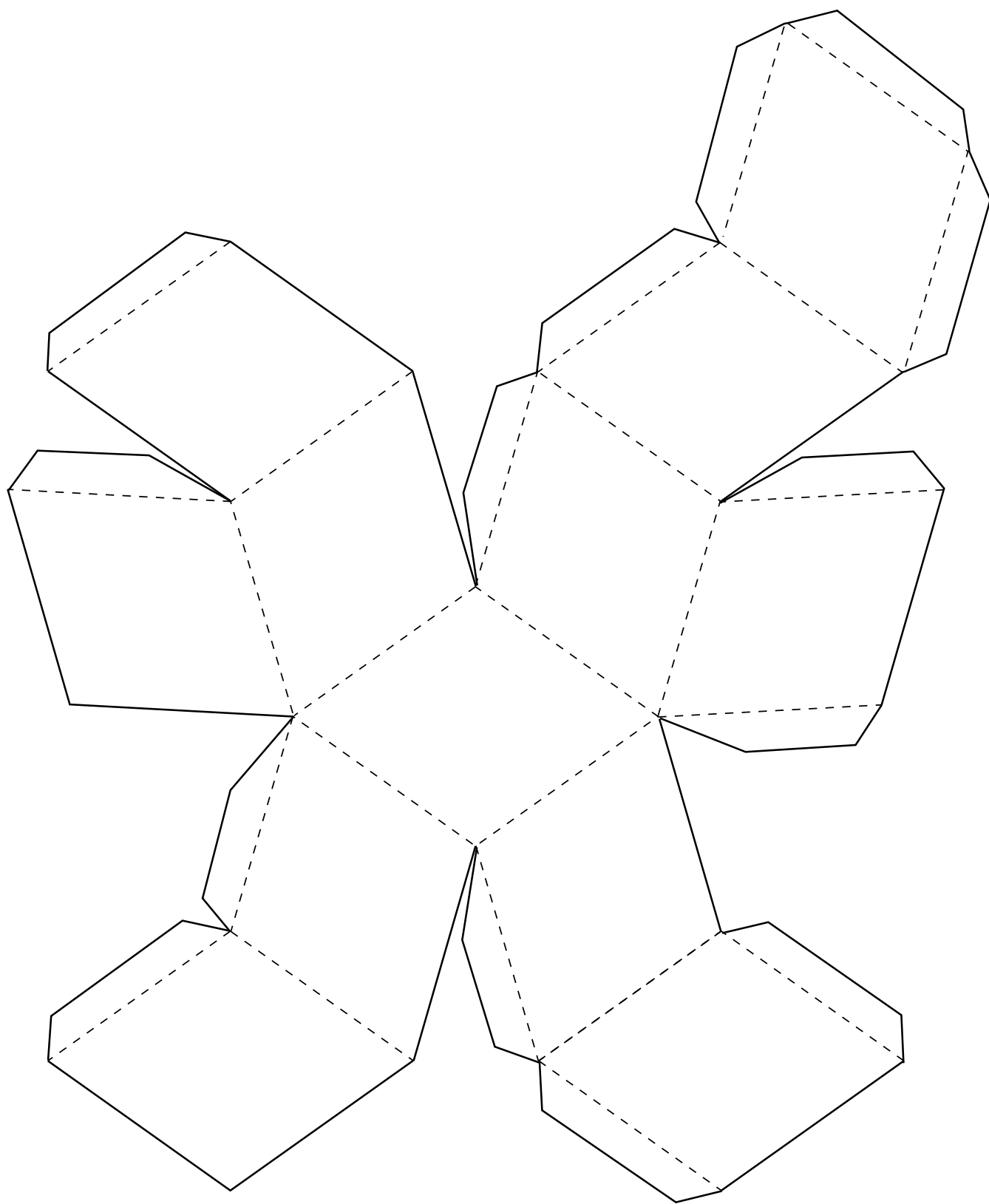


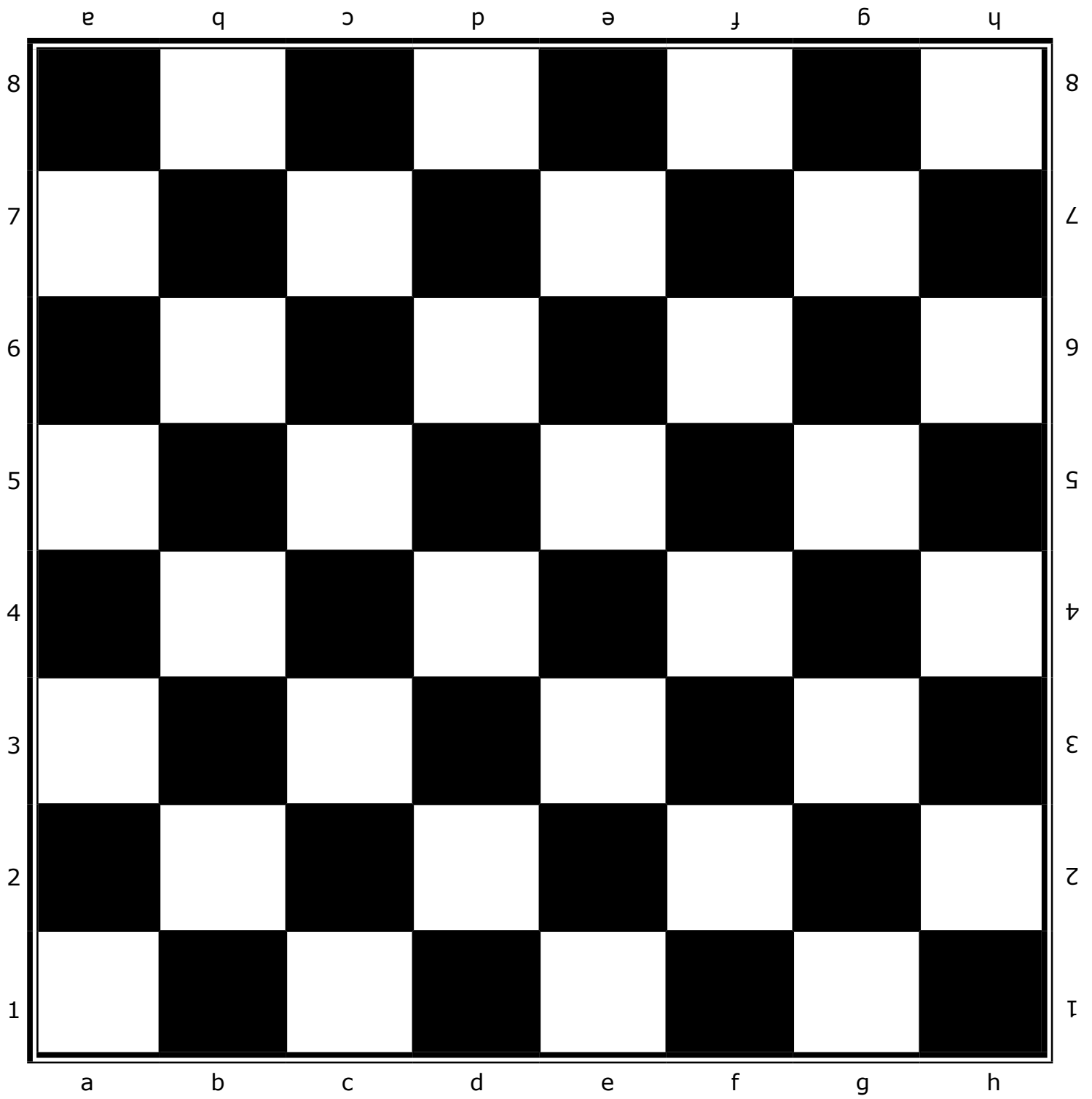
Atenes

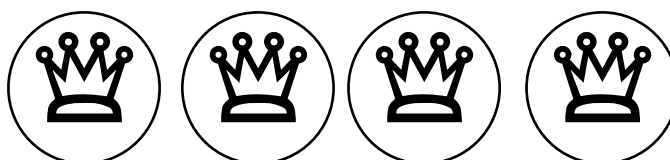
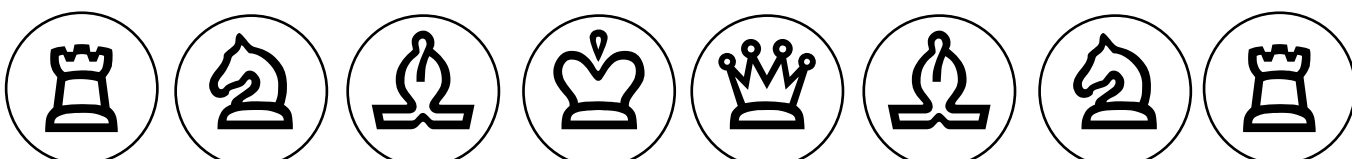
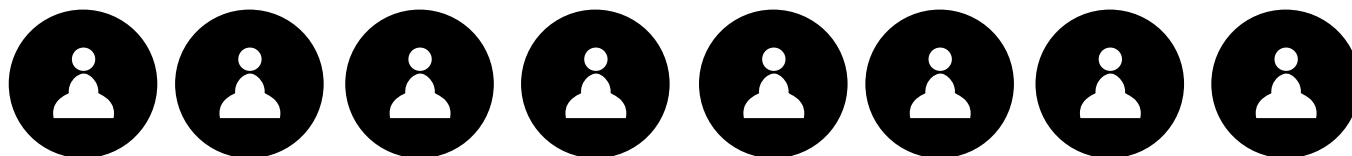
3	Berlín								
4	1	Brussel·les							
5	4	3	Lisboa						
4	1	1	3	Londres					
4	3	2	1	2	Madrid				
4	1	2	5	2	4	Oslo			
3	2	1	2	1	2	2	París		
1	2	2	4	2	3	3	2	Roma	
3	2	2	5	2	4	2	3	2	Varsòvia

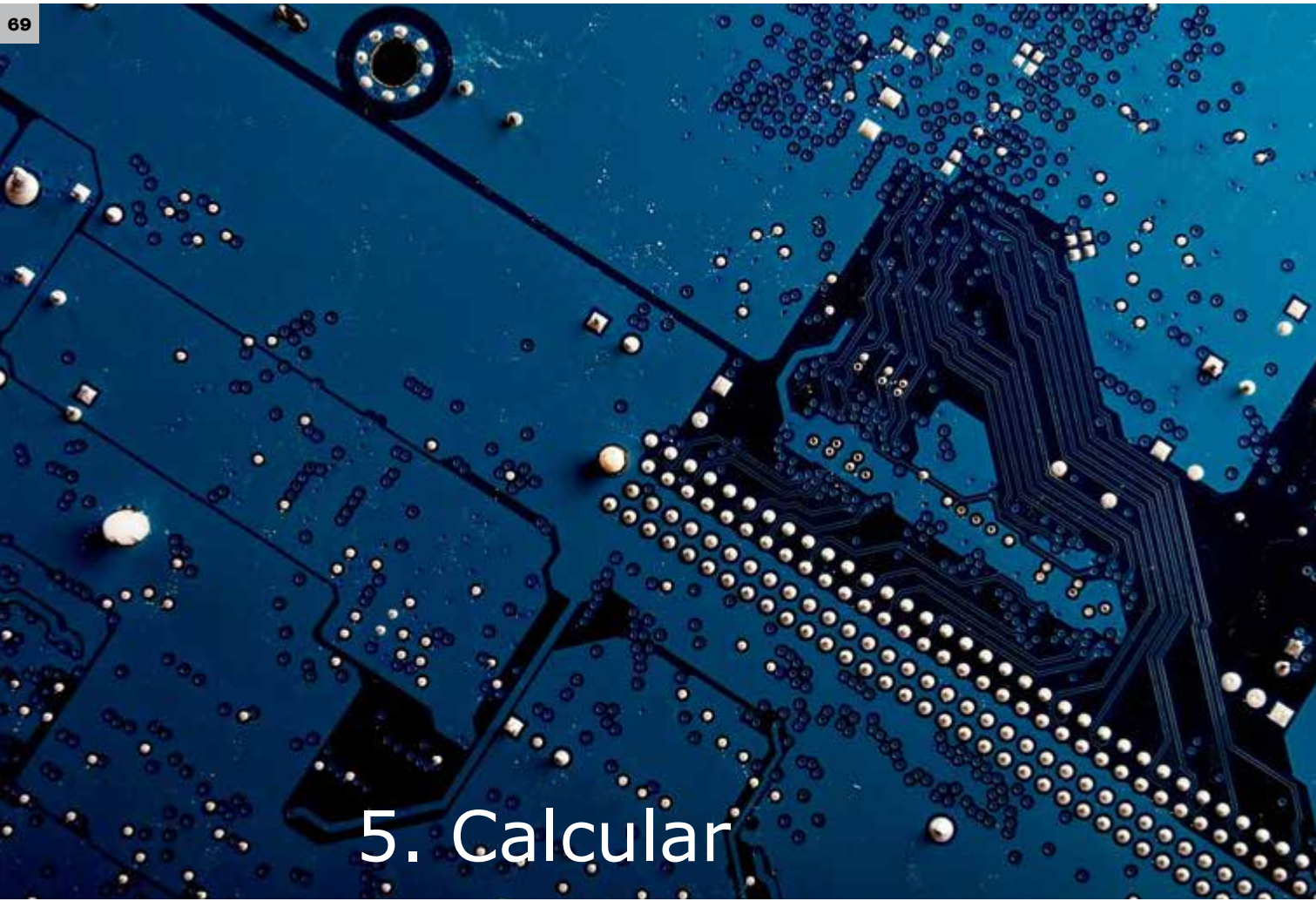












5. Calcular



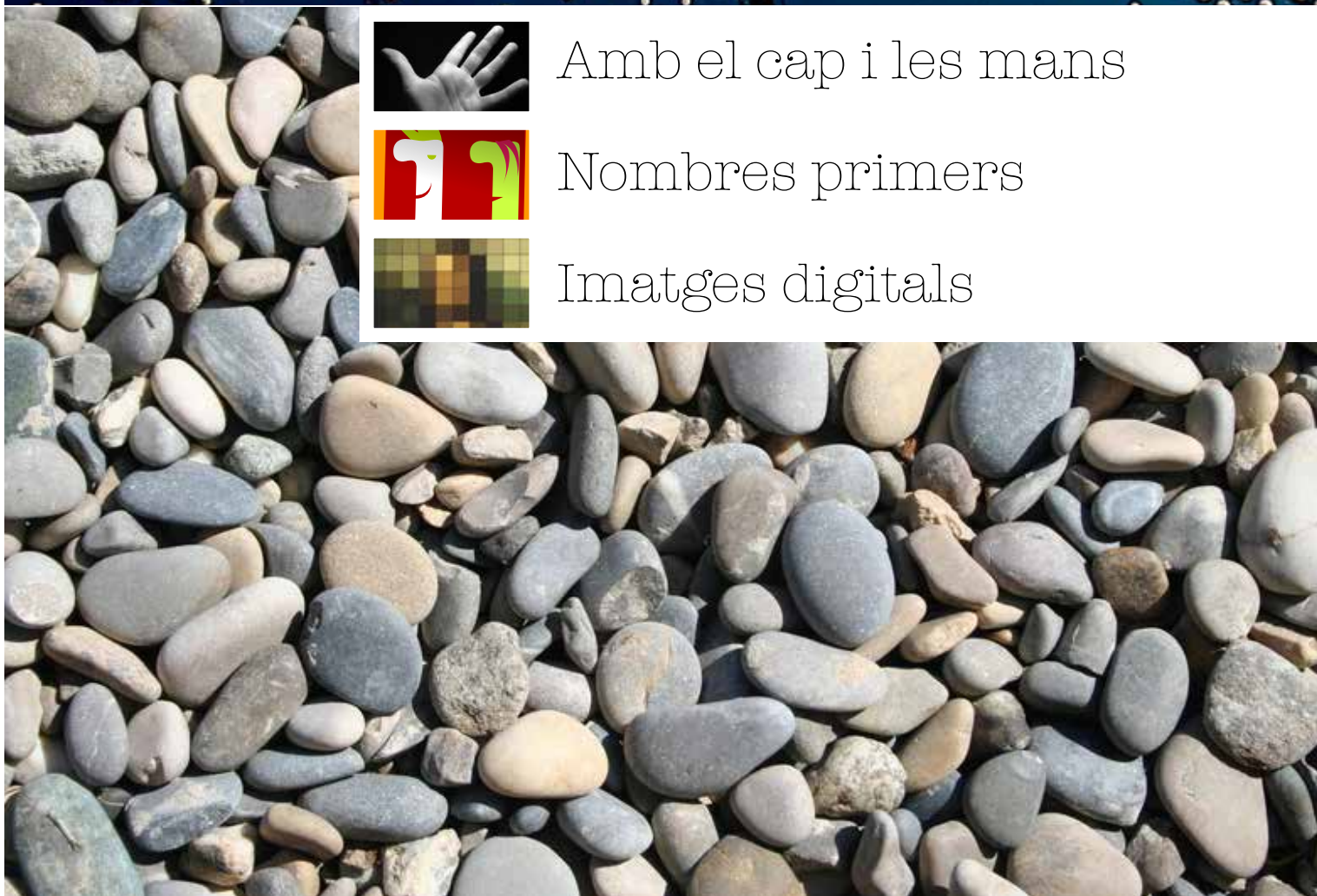
Amb el cap i les mans



Nombres primers



Imatges digitals



Amb el cap i les mans



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Els deu dits de les mans!!!

Compteu amb els dits!

9X1... 9X2... 9X3... **9 X 4 =**  

Amb les dues mans obertes al davant, es compten els dits fins a 4, començant per la mà esquerra, i es baixa el quart dit.

- Es llegeix: **3** dits aixecats a l'esquerra per les desenes i **6** a la dreta per la unitats, són **36**

Dos nombres entre 5 i 10 **6 X 8 =**  

Es compta fins a 6 amb la mà esquerra. Queda 1 dit aixecat.

Es compta fins a 8 amb la mà dreta. Queden 3 dits aixecats.

- Resultat: **3+1** que són **4** desenes i **4x2** pels dits que estan baixats que són **8** unitats són **48**.

Dos nombres entre 10 i 15 **13 X 14 =**  

Es compta fins a 13 amb la mà esquerra. Queden 3 dits aixecats.

Es compta fins a 14 amb la mà dreta. Queden 4 dits aixecats.

- Resultat: **3+4** que són **7** desenes i **3x4** per les unitats són **100+70+12=182**.

Dos nombres entre 15 i 20 **17 X 19 =**  

Es compta fins a 17 amb la mà esquerra. Queden 2 dits aixecats.

Es compta fins a 19 amb la mà dreta. Queden 4 dits aixecats.

Són: **2+4** que són **6** quinzenes i **2x4** per les unitats, són **90+8=98**

- Resultat: **15x15 + 98 = 225 + 98 = 323**

Què recordar?

Aprendre a comptar, és començar per aprendre les taules de sumar i multiplicar fins a 10. Però n'hi ha prou en aprendre fins el 5 i després, saber comptar amb els dits!

Així per $(5+a) \times (5+b)$:

Per les desenes, quan sumo els dits aixecats, calculo $10 \times (a+b)$.

Per les unitats, quan multiplico els dits abaixats,

calculo $(5-a) \times (5-b) = 25 - 5(a+b) + ab$.

Verifiquem que es té $(5+a) \times (5+b)$.

Verifiquem el mateix per les altres multiplicacions.

Per utilitzar aquestes tècniques, és suficient conèixer els quadrats de 10, 15... Proveu aquesta tècnica amb els nombres entre 20 i 25...

Amb el cap i les mans



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper i llapis o pissarra, guix i esborrador

Càlcul mental – Càlcul ràpid

Sumes, restes

Proposeu fer sumes i restes de nombres enters de 2 xifres, de 3 xifres... escrivint els dos nombres, dient-los o escrivint-ne un i dient-ne l'altre. Feu descriure i analitzar als alumnes les diferents tècniques de càlcul utilitzades.

38+5
28+18
128+58
289+135...

27-18
66-19
151-28
197-19...

Qui som nosaltres?

- Sumem 25, i la nostra diferència és 1.
- Som tres nombres consecutius i sumem 48.
- La suma de les meves dues xifres és 12 i el producte 14.

L'algorisme de Kaprekar (matemàtic indi – 1949)

Preneu un nombre enter, 5294 per exemple, i opereu com aquí:

K(5294) = 9542 - 2459 = 7083
K(7083) = 8730 - 378 = 8352
K(8352) = 8532 - 2358 = 6174
Y K(6174) = !!!

Proposeu aquests càlculs amb altres nombres i feu fer hipòtesis sobre els diferents casos possibles.

Multiplicacions, divisions

- En primer lloc, feu aprendre de memòria els quadrats d'11, 12, 13, 15, 20, 25.
- Feu fer les multiplicacions i les divisions per 5, per 9, per 11, per 12, 13, 15, 19, 25, 50, 100.
- Calculeu 46x96 i 64x69. Estrany oi? Trobeu-ne d'altres.
- Calculeu 23x9 i 78x9. Es diu que 23 i 78 són associats. Trobeu-ne d'altres!

Multiplicacions sorprenents!

Calculeu, continueu i trobeu-ne d'altres!

1 x 8 + 1 = ...	9 x 9 + 2 = ...
12 x 8 + 2 = ...	98 x 9 + 6 = ...
= ...?	= ...?
1 x 9 + 2 = ...	1 x 1 = ...
12 x 9 + 3 = ...	11 x 11 = ...
= ...?	= ...?

La conjectura de Siracusa

- Preneu un nombre enter N i opereu com segueix:
- Si N és parell, dividiu-lo per 2.
- Si N és imparell, multipliqueu-lo per 3 i sumeu-li 1.
- Repetiu el càlcul amb el resultat...

Per exemple:

20 -> 10 -> 5 -> 16 -> 8 -> 4 -> 2 -> 1 -> 4 -> 2 -> 1...

Feu fer aquests càlculs amb altres nombres i feu fer hipòtesis amb els diferents comportaments possibles d'aquestes successions. (Es parla d'altura per a designar el nombre més gran de la successió, de durada de vol per a la longitud de la successió abans que s'arribi al cicle que es va repetint...). Aquest algorisme, creat per **Collatz** i **Hasse** (matemàtics alemanys – 1932) ha portat a una conjectura, anomenada de Siracusa, encara no demostrada.

Amb el cap i les mans



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper i llapis

Càlculs i algorismes

Dividir per multiplicar **57 x 86 = ?**

La multiplicació a la russa

57	86
28	172
14	344
7	688
3	1376
1	2752
	4902

La multiplicació per gelosia

x	8	6	
7	6	2	2
	5	4	
5	0	0	0
	4	3	
=	4	9	

O fins i tot, a prop de la tècnica clàssica:

57
<u>x 86</u>
3042
+ 4056
<u>= 4902</u>

Per saber-ne més

Amb els ordinadors, per no haver d'escriure línies de productes per sumar i evitar problemes dels nombres que es porten... (per recordar!!) s'utilitzen altres tècniques de càlculs ràpids. Estem en camp de l'algorísmica. Un exemple és el de l'algorisme del rus **Anatolii Karatsuba** (1962):

Calculem 1234 x 5678.

Es talla cada nombre en paquets de 2 xifres per obtenir:

$$\begin{aligned}
 1234 \times 5678 &= (12 \times 10^2 + 34) \times (56 \times 10^2 + 78) \\
 &= 12 \times 56 \times 10^4 + [(12 + 34) \times (56 + 78) - 12 \times 56 - 34 \times 78] \times 10^2 + 34 \times 78 \\
 &= 672 \times 10^4 + [46 \times 134 - 672 - 2652] \times 10^2 + 2652 \\
 &= 672 \times 10^4 + [6164 - 672 - 2652] \times 10^2 + 2652 \\
 &= 6720000 + 284000 + 2652 \\
 &= 7006652
 \end{aligned}$$

N'hi ha hagut prou fent 3 multiplicacions de nombres 2 vegades més petits i algunes sumes de més però molt senzilles. A la base d'aquest algorisme, es troben les relacions algebraiques següents:

$$\begin{aligned}
 (ax + b)^2 &= a^2x^2 + [(a+b)^2 - a^2 - b^2]x + b^2 \\
 (ax + b)(cx + d) &= acx^2 + [(a+b)(c+d) - ac - bd]x + bd \\
 i : 4ab &= (a+b)^2 - (a-b)^2
 \end{aligned}$$

Amb el cap i les mans



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper i llapis

Càlcul ràpid i proporcionalitat

Com calcular ràpidament:

- En **6** h un aparell d'aire condicionat consumeix **7** kW. Quants en consumeix en **18** h?
- En **9** h un aparell d'aire condicionat consumeix **18** kW. Quants en consumeix en **108** h?
- En **32** h un aparell d'aire condicionat consumeix **27** kW. Quants en consumeix en **8** h?
- En **21** h un aparell d'aire condicionat consumeix **17** kW. Quants en consumeix en **90** h?

La doble proporcionalitat.

Completeu les taules del tipus

Consum de patates en una escola (en kg) 

		NOMBRE DE DIES			
		1	20	40	100
NOMBRE D'ALUMNES	1	0,1	2		
	5	0,5		20	
	10	1		40	
			30		150
	20	2		80	

Càlcul de l'àrea d'un rectangle (en cm²) 

		AMPLADA					
		1	4	5	6	10	12
LLARGADA	1	1					12
	2	2		10		20	
	3						
			16				
	5	5			30		

Càlcul de l'àrea d'un triangle (en cm²) 

		ALTURA				
		1	3	5	8	15
BASE	1	0,5	1,5	2,5	4	
	2,5		3,75			
	3					
	5		7,5	12,5		37,5

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 6 peces de trencaclosques, 2 per cada grup d'alumnes, paper quadriculat, paper, llapis, tisores

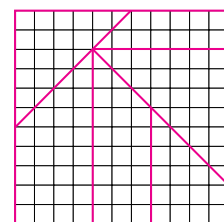
78

79

Càlcul i geometria

Trencaclosques a ampliar

Amb aquestes 6 peces reconstruïu un quadrat. Després fabriqueu el mateix trencaclosques més gran respectant les regles següents: els trapezis amb l'altura igual a 4 cm han d'augmentar per arribar a una altura de 7 cm. Quan haureu acabat, podreu reconstruir un quadrat més gran amb les 6 peces ampliades.



Per anar més lluny

Tales i la proporcionalitat

Fotografies de vacances:

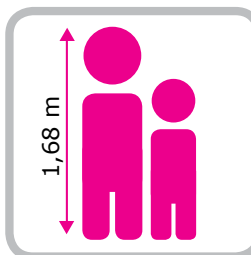
El pare i els meus dos germans



El meu germà petit i jo



La meua mare i la meua germana



El meu pare i la meua germana



Quina és la meua alçada?

Amb el cap i les mans



Què recordar?

La proporcionalitat és una eina essencial en l'aprenentatge de les matemàtiques i altres ciències. També és una eina molt present a la vida quotidiana. Permet introduir la multiplicació i la divisió a l'escola. Sobretot és essencial per a comprendre les relacions entre les magnituds que tenen una unitat de mesura, en física i en altres ciències.

Les propietats utilitzades són:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$$

$$f(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y)$$

En aquests càlculs entren en acció dues funcions matemàtiques:

La funció "escalar":

$$\begin{array}{cc} 6 \text{ (h)} & 7 \text{ (kW)} \\ 18 \text{ (h)} & ?? \text{ (kW)} \end{array}$$

La funció "de dimensions":

$$\begin{array}{cc} 9 \text{ (h)} & 18 \text{ (kW)} \\ 108 \text{ (h)} & ?? \text{ (kW)} \end{array}$$

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: paper, llapis

Càlculs aproximats

Ordre de magnitud

Estimeu l'ordre de magnitud dels càlculs (verifiqueu després amb o sense calculadora).

Així, el resultat de cadascun dels càlculs està comprès entre 0 i 1, entre 0 i 0,1, entre 0 i 0,01, entre 1 i 2, entre 1 i 10?

$$\begin{aligned} 125 \div 28 &= 0,4464 \text{ o } 4,4643 \text{ o } 44,6428 \text{ o } ??? \\ 28 \div 1275 &= 0,0022 \text{ o } 0,0220 \text{ o } 0,2196 \text{ o } ??? \\ 357 \div 176 &= 0,203 \text{ o } 2,028 \text{ o } 20,284 \text{ o } ??? \\ 41,84 \times 2,25 &= 9,414 \text{ o } 94,14 \text{ o } 941,9 \text{ o } ??? \\ 1/(1+\sqrt{2}) &= 0,414 \text{ o } 2,142 \text{ o } 4,142 \text{ o } 21,421 \text{ o } ??? \end{aligned}$$

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: paper, llapis i calculadora o ordinador

El nostre ordinador ens enganya!

Escolliu un nombre entre 0 i 1. Multipliqueu-lo per 2.

- Si el resultat és inferior a 1, multipliqueu-lo de nou per 2.
- Si no, resteu 1 i multipliqueu el resultat per 2.

I torneu a fer aquest càlcul 60 vegades. Repetiu els mateixos càlculs amb un nombre molt pròxim. Què constateu?

- Escolliu un nombre encara més pròxim i torneu a fer els càlculs.
- Proveu amb nombres tals com $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-1$ o $\pi-3$ i amb nombres decimals molt propers.

Exemple

0,3	0,305
0,6	0,61
0,2	0,22
0,4	0,44
0,8	0,88
0,6	0,76
0,2	0,52
0,4	0,04
0,8	0,08
...	...

Per comptar, utilitzem els nombres enters i els decimals. Al mercat és millor saber fer un càlcul mental ràpid o aproximat encara que es tingui una calculadora... L'ordinador no utilitza més que nombres decimals amb només algunes desenes de decimals. Les lleis matemàtiques no es respecten i sovint produeixen errors.

Aplicacions de les matemàtiques

Certes tècniques de càlcul poden utilitzar-se a la vida quotidiana. Altres són les que busquen els matemàtics i informàtics per a permetre als ordinadors calcular cada vegada més ràpid i millor o verificar molt ràpidament l'exactitud dels codis de les targetes bancàries!

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Càlcul-Càlcul ràpid-Càlcul mental-Càlcul aproximat-Algorismes de càlcul

Nombres primers



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 3 quadrícules de nombres enters de 6, 20 i 30 columnes, llapis, goma

80

81

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106

Seguint la pista dels nombres primers!

És primer tot nombre enter diferent de 1 que només és divisible per 1 i per ell mateix.

Per a cada taula:

- ratlleu l'1 i poseu en negreta el primer nombre que no estigui ratllat, en aquest cas el 2,
- ratlleu tots els múltiples de 2 (després de 2),
- poseu en negreta el següent nombre no ratllat, en aquest cas el 3 que és primer,
- i torneu-hi fins que no hi hagi més números per ratllar.

Observeu, segons la taula utilitzada, les propietats d'aquesta tècnica. A partir de quin nombre primer enter heu parat? Què podeu concloure?

Aquesta tècnica anomenada el **sedàs d'Eratòstenes**, permet obtenir tots els nombres primers de la llista.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 3 daus

Jugueu al 421

Tireu els 3 daus.

Escriviu les 3 xifres a la pissarra.

Guanya aquell que, amb les 3 xifres, construeixi el nombre primer més gran.

Cada alumne pot dir perquè un nombre o altre proposat no és primer.



Què recordar?

Criteris de divisibilitat per ...

- un nombre enter és divisible per 2 si l'última xifra és un múltiple de 2,
- divisible per 4 si ... per 8 si ...
- divisible per 3 si ... (el mateix per 9). Per què?
- divisible per 5 si ...
- divisible per 11 si ...
- i per 7? i per 13?

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Una llista de nombres primers

La gran família dels nombres primers.

Dins la família dels nombres primers:

- Trobeu bessons (és a dir, dos nombres primers que difereixin en 2) com 3 i 5, 5 i 7...
Hi ha una conjectura que diu que n'hi ha infinits. Hi ha triplets?
- Trobeu cosins (que difereixen en 4). N'hi ha tants com de nombres bessons!
- Trobeu-ne de sexis (que difereixen en ... 6)!
- Verifiqueu si el producte dels primers nombres primers més 1 és primer.
Això permet provar que hi ha un nombre infinit de nombres primers. Però com més grans són, menys n'hi ha.
- Verifiqueu que tot nombre parell (inferior a 100 per exemple) es pot escriure com a suma de dos nombres primers (aquesta és la **conjectura de Goldbach** que farà guanyar una gran suma de diners a qui la demostrï!).



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: paper, llapis

La gran família dels nombres enters

- Escriviu 10101, 1001, 101, 11, com producte de nombres primers.
- Feu el mateix amb 304, 305, 403, 404, 504, 604, 2008, 3008... Tot nombre enter es descompon de manera única com producte de nombres primers.
- Fora de la família de nombres primers, trobeu nombres perfectes (que són iguals a la suma dels seus divisors com $6 = 3 + 2 + 1$).
Observeu que $1/6 + 1/3 + 1/2 = 1$ i que passa el mateix amb tots els altres nombres perfectes que descobriu.
- Trobeu nombres enters producte de dos nombres primers diferents.
Guanya el que trobi el nombre més gran!

Els codis secrets utilitzats avui dia es basen en nombres que són producte de dos nombres primers molt grans. Trobar-los sobrepassa el temps de càlcul dels ordinadors més potents.

- Trobeu el MCD i el mcm (el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple) de 28 i 70, de 330 i 900, de 276 i 483...
- Verifiqueu en aquests exemples que $\text{MCD}(a,b) \times \text{mcm}(a,b) = ab$.

Aplicacions de les matemàtiques

Els treballs d'investigació sobre els nombres primers i les relacions amb la informàtica són nombrosos i nombroses són les qüestions que queden per resoldre.

La seguretat de les xarxes informàtiques i de comunicació està estretament lligada als nombres primers (criptografia, codis correctors d'errors, algorísmia, etc.).

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

**Nombres primers - Criteris de divisibilitat - Eratòstenes - Algorisme d'Euclides -
Criptografia - Codis secrets de clau pública**



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: paper, llapis

¡ 1 + 1 = 10 !!!

En base 2 els nombres enters s'escriuen utilitzant 0 i 1:

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110...

Calculeu en base 2, escrivint la suma: 101 + 11, 101 + 101, 111 + 111...

Després: 101 x 11, 101 x 101, 111 x 111

$$\begin{array}{r} \text{11} \\ + \text{11} \\ \hline \text{110} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{11} \\ \times \text{11} \\ \hline \text{11} \\ \hline \text{1101} \end{array}$$

Què recordar?

Després d'haver comptat amb còdols (d'aquí el mot càlcul), la humanitat va inventar el sistema de base 10. Així, dir que hi ha 549 ovelles significa que n'hi ha de fet $5 \times 10^2 + 4 \times 10 + 9$. Aquest mètode utilitza deu símbols -les xifres- i té en compte la posició de cadascuna d'elles (de dreta a esquerra). Gràcies a la lògica matemàtica, el sistema de numeració en base 2 permet avui dia representar situacions on només hi ha dos estats: veritat o fals, si o no, el corrent passa o no passa, l'imant està imantat o no, la llum es reflecteix molt o poc.

Tot allò digital que envaeix la nostra vida quotidiana aconsegueix reproduir la realitat amb una qualitat sempre creixent. L'aspecte elemental del sistema binari queda compensat per l'elevada quantitat d'informació que pot tractar ràpidament.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 3 imatges digitals

72 dpi o 300 dpi?

Aquestes 3 imatges tenen les mateixes mides: 7 x 4,35 cm.

- Quants quadrats unitats (o píxels) contenen (amplada x altura)? És la mida de la imatge en píxels.
- La imatge 1 té una resolució de 75 dpi (dot per inch o punt per polzada), la 2: 150 dpi i la 3: 300 dpi.
- Com varia el nombre de quadrats en funció de la resolució?



imatge 1



imatge 2



imatge 3

El pes de les fotografies

Com varia el pes de les imatges? Completeu la taula.

Una mateixa imatge digitalitzada en 75 dpi està aquí presentada en 75, 150 i 300 dpi.

La primera resolució, suficient per a la representació en una pantalla, produeix una imatge impresa pixelada.

La segona és suficient per a les tabletas i els telèfons intel·ligents.

La tercera, 4 cops més fina, permet obtenir una impressió clara i suavitzada de fotografies.



Mides de la imatge		Resolució en dpi	Pes en k-octets
polzades	cm		
3,74x2,39	8,74x5,39	75	125 ko
		100	?
		150	?
		300	?
1,90x1,18	4,45x2,75	75	?
		100	?
		150	125 ko
		300	?
0,94x0,59	2,20x1,39	75	?
		100	?
		150	?
		300	125 ko

Què recordar?

Una imatge digital en color consisteix en quadrats unitats, els píxels, i cada quadrat és una barreja de 3 o 4 colors: vermell, verd, blau (RGB, red, green, blue) per a les pantalles i cian, magenta, groc, i negre (CMYK) per a la impremta.

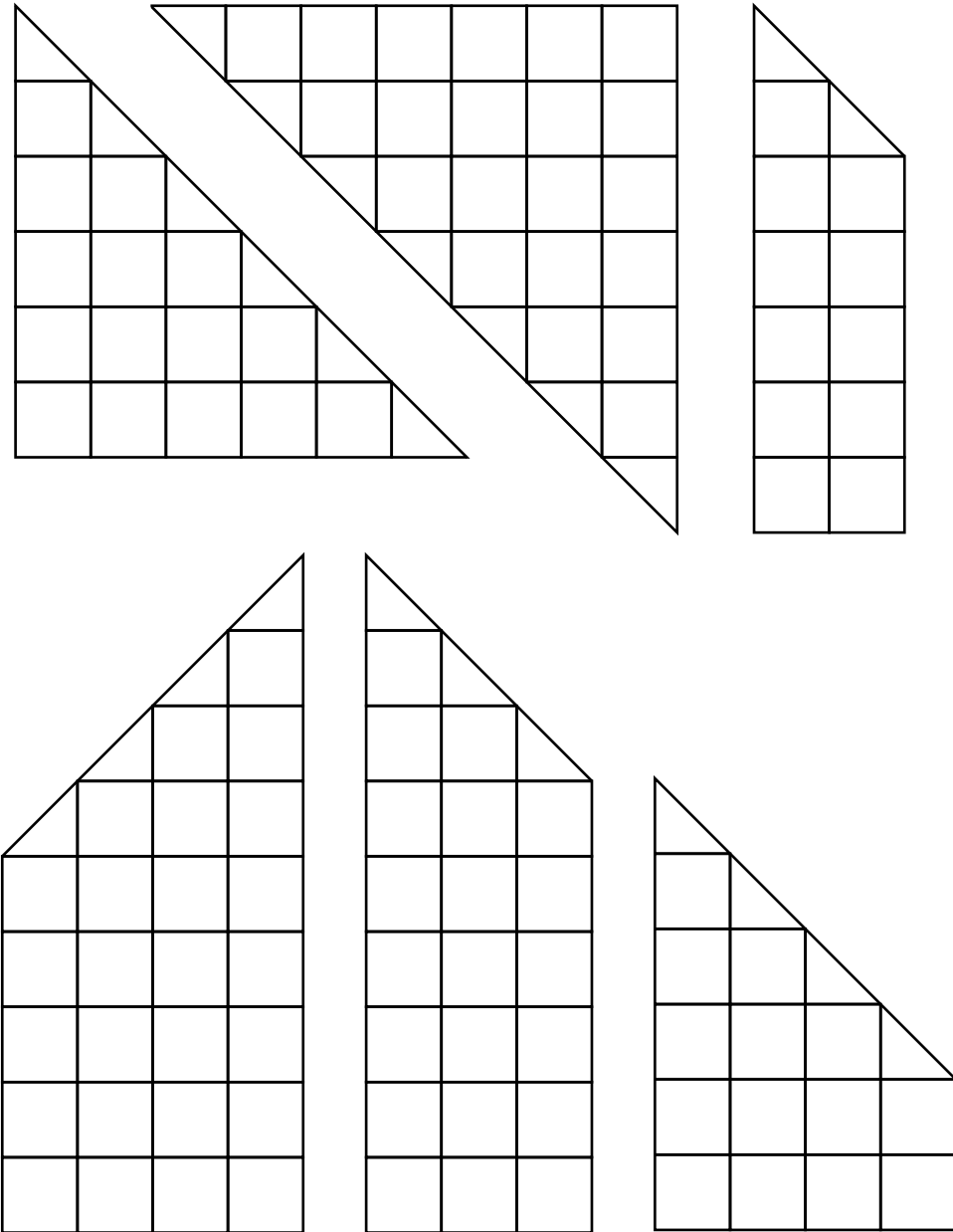
Per a una mateixa superfície, com més píxels hi ha més gran és la definició.

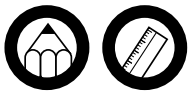
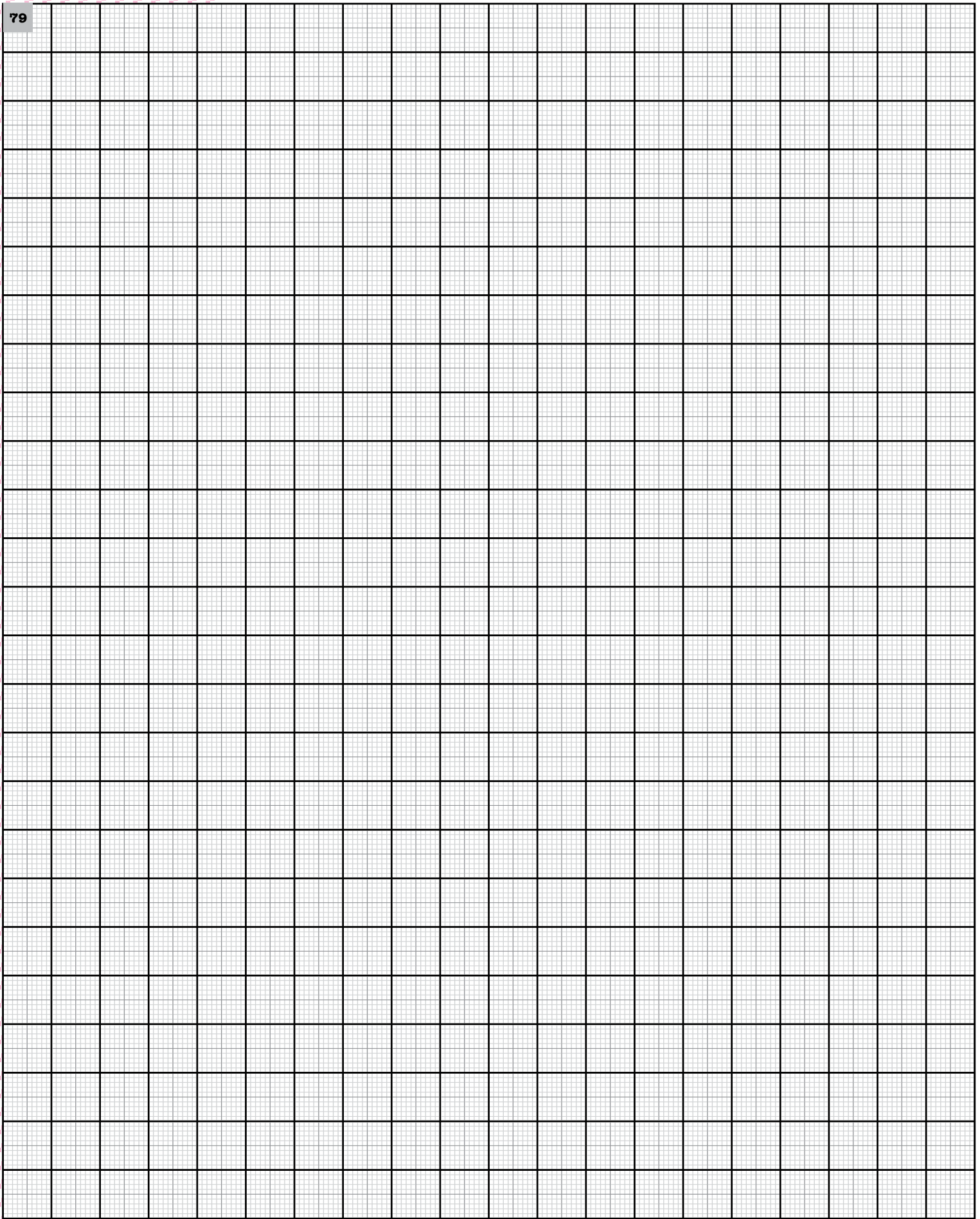
Aplicacions de les matemàtiques

Fotografia, CD, DVD, Internet, telefonia mòbil, TV d'alta definició... utilitzen les imatges digitals. Per emmagatzemar, transmetre, analitzar, tractar, comprimir, corregir, modificar les imatges, les matemàtiques s'han convertit en indispensables.

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Píxels- Compressió d'imatges- Impressió digital





1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126
127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138
139	140	141	142	143	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200





1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600

6. Construir



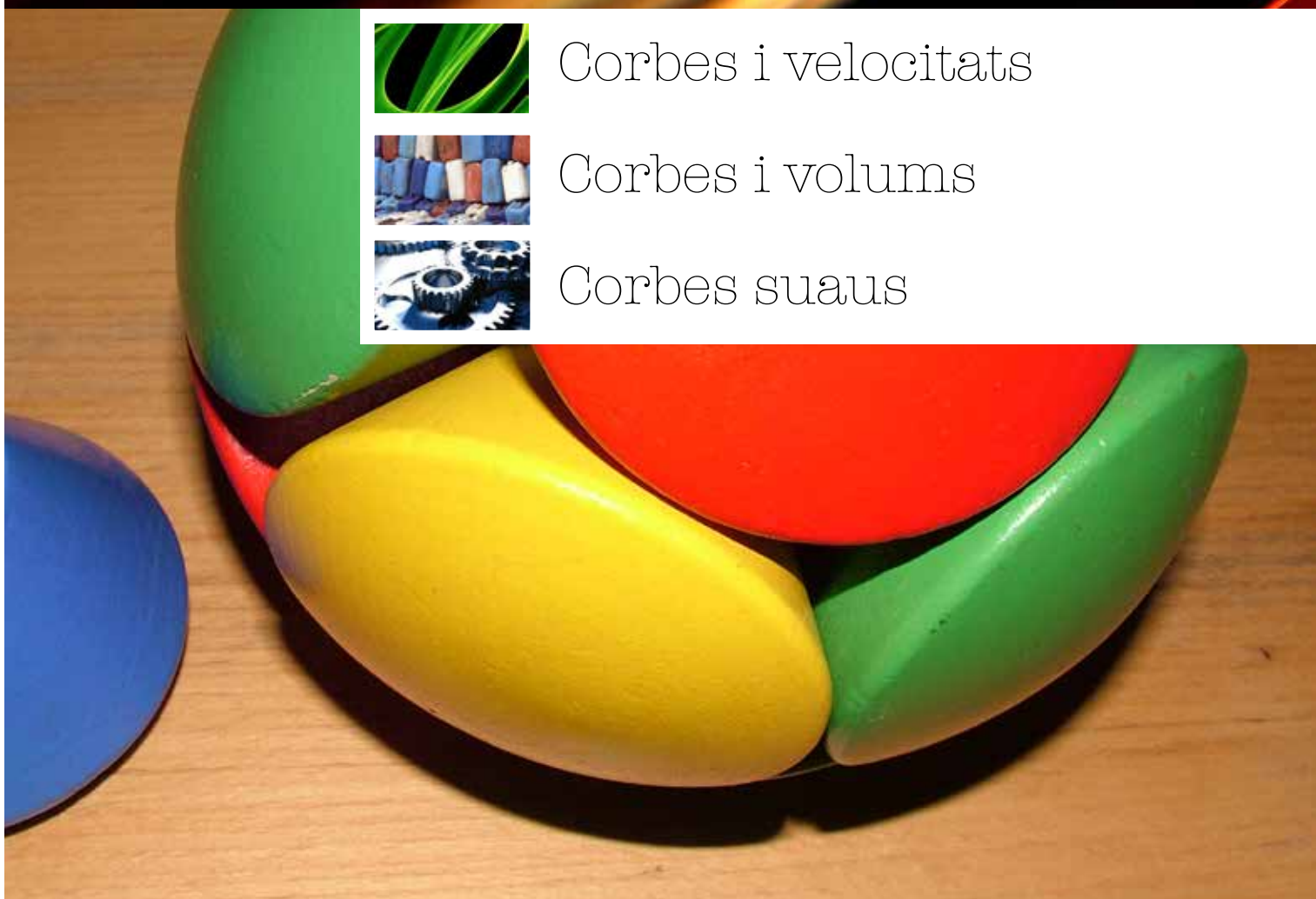
Corbes i velocitats



Corbes i volums



Corbes suaus



Corbes i Velocitats



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 5 dibuixos de circuits de carreres, 1 gràfic de velocitat

88

Què recordar?

Velocitat i acceleració

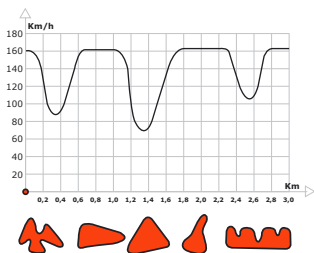
La **velocitat** és una magnitud física que descriu la variació d'una certa quantitat (en la majoria dels casos distància) amb el temps. Quan es tracta d'una distància es pot expressar en metres per segon, quilòmetres per hora, nusos (milles nàutiques per hora) i en matx en aviació.

L'**acceleració** és la variació de la velocitat d'un objecte en funció del temps.

Es diu que la funció "velocitat/temps" és la **derivada** de la funció "distància/temps".

De manera similar la funció "acceleració" és la **derivada** de la funció "velocitat/temps".

Descriu doncs l'evolució de la recta tangent a la corba velocitat-temps a cada punt.



A quin circuit estem?

El gràfic mostra la velocitat d'un cotxe de carreres a màxim rendiment durant la tercera volta al circuit.

Preguntes:

- En quin circuit pot ser el cotxe?
- En quin sentit gira?
- On és la línia de sortida?

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper quadriculat, un llapis.

89

Sabeu llegir un gràfic?

- Cada un imagina un circuit de carreres i el dibuixa, en construeix el gràfic de velocitat sobre una volta del circuit, intercanvia el gràfic amb la persona del seu costat que ha fet el mateix.

Pregunta: a partir del gràfic que us ha passat el company, endevineu el circuit que ha imaginat. Guanya el primer que trobi la solució!

- Traduiu en forma de gràfic la història següent: un excursionista puja una muntanya seguint un recorregut de 4 km a 2 km/h, s'atura durant una hora i baixa pel mateix camí a 4 km/h.

- Dos ciclistes participen en una cursa d'anada i tornada. El primer recorre l'anada a 60 km/h i la tornada a 40 km/h. El segon fa el recorregut d'anar i tornar a 50 km/h. Qui arriba primer?

Per anar més lluny...

Circuleu menys ràpid

- Un cotxe circula a 100 km/h de mitjana en comptes de 90 km/h. Quant temps guanya en un recorregut de 90 km?
- Un ciclomotor circula a 50 km/h en comptes de a 45 km/h. Quant temps guanya en un recorregut de 45 km? i si és de 90 km?

Freneu a temps!

Entre el moment en el qual un conductor veu un "obstacle" i el moment en el qual comença a frenar transcorre un cert **temps de reacció** que s'estima que està entre 1 i 2 segons.

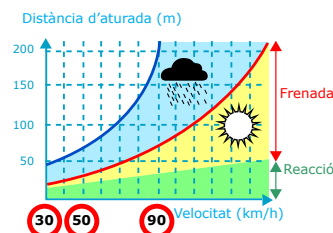
La **distància de frenada**, que depèn de la velocitat i de l'estat del vehicle, s'estima en temps sec per $0,08v^2$, on v és la velocitat del vehicle expressada en metres/segon.

- Calculeu la distància que recorre un cotxe abans d'aturar-se quan circula a 90 i a 100 km/h.
- Calculeu la mateixa distància recorreguda pel ciclomotor a 45 i 50 km/h.

I en temps de pluja

La distància de frenada també depèn de l'estat de la carretera. Si la carretera és molla, augmenta en un 40%.

- Recalculeu les distàncies d'aturada anteriors.
- Feu una taula i després un gràfic de les distàncies d'aturada en funció de la velocitat i de l'estat de la carretera.



Aplicacions de les matemàtiques

El **càlcul diferencial** es va desenvolupar en els segles XVII i XVIII. Permet descriure l'evolució del pendent de la recta tangent a una corba contínua:

- Si una funció creixent es representa per una corba, les rectes tangents a la corba en cada punt tenen pendent positiu.

- Si una funció es decreixent, el pendent de les tangents és negatiu.

Aquesta propietat és molt utilitzada per tots els que estudien fenòmens d'evolució, de matemàtics a físics, d'enginyers a biòlegs, de demògrafs a economistes...

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Funció – Gràfic – Derivada – Tangent – Velocitat – Acceleració

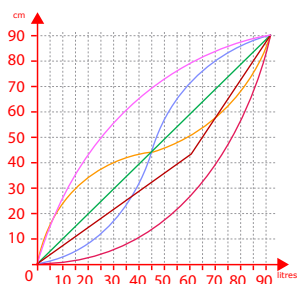


Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 dibuix de 6 recipients, 1 dibuix amb els 6 gràfics

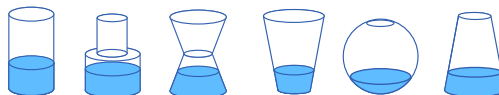
90

91



El volum del barril

- Aquests sis recipients tenen la mateixa altura (90 cm) i el mateix volum (90 l). El gràfic indica el nivell d'emplenament dels recipients, a flux constant, en funció del volum de líquid (i per tant en funció del temps).
- Quina és la corba d'emplenament de cada recipient?
- Podeu esbrinar les dimensions dels recipients?



Feu-ho vosaltres mateixos

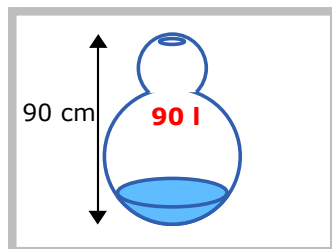
MATERIAL: paper quadriculat, llapis

89

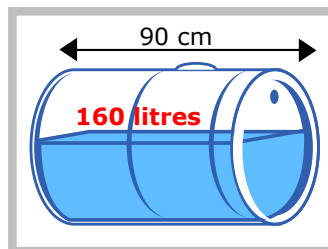
Sabeu llegir un gràfic?

- Cadascú imagina un recipient (de 90 cm d'alt i de 90 l) i el dibuixa.
- Construeix el gràfic d'emplenament.
- El passa al seu company que ha fet el mateix.

Pregunta: a partir del gràfic que us ha proporcionat el vostre veí, descobriu el recipient que ha pensat. Guanya el primer que ho descobreixi.



- Quin és el gràfic d'emplenament d'aquest recipient?



- Quina pot ser la corba d'emplenament d'aquest barril?

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 dibuix dels 6 recipients, 1 dibuix de 6 canyes graduades

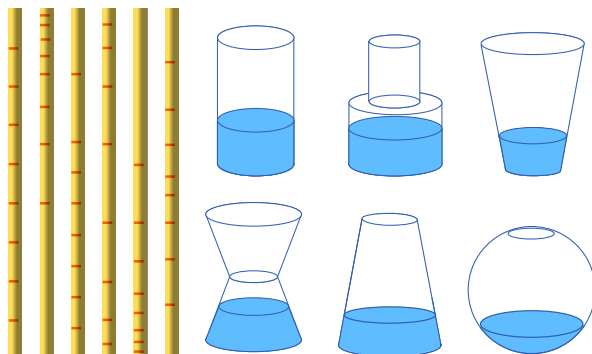
92

A cada qual el seu indicador

- Cada indicador, graduat de 10 en 10 litres, es correspon amb un dels 6 recipients. Associeu cada canya al seu recipient.
- Gradueu de 10 litres en 10 litres l'indicador d'un barril de 160 litres segons si el forat per on s'omple és a un costat (barril en horitzontal) o a la part superior (barril en vertical).

Buideu un dipòsit

- Torneu als sis dipòsits i a les seves corbes d'emplenament.
- Dibuixeu la corba de buidatge corresponent (suposant que el flux de sortida del líquid és constant i que es buida per la part de sota).





Què recordar?

Per determinar la corba d'emplenament d'un recipient a cada instant, cal estimar (o calcular) l'evolució de l'àrea de la secció del recipient en funció de l'altura h . Això és equivalent a utilitzar directament o aproximadament càlculs del volum en funció de l'altura.

Aquest és el camp del càlcul integral iniciat per **Newton** (1642-1727) i **Leibniz** (1646-1716). Però moltes de les fórmules de volums (i àrees) es coneixen des d'**Arquimedes** (287-212 a. C.).

Algunes fórmules

Volums dels recipients en funció de l'altura
(altura en dm, volum en dm³ o litres)

- Cilindre: $V(h) = \text{Base} \times h = \pi R^2 \times h$
- Piràmide sobre la base: $V(h) = B \times h/3$
- Con sobre el vèrtex: $V(h) = V(H) \times (h/H)^3$
- Esfera: $V(h) = \pi h^2 (R - h/3)$

Aplicacions de les matemàtiques

La noció de relació entre dues (o vàries) variables s'expressa matemàticament per **funcions**. Les seves **representacions gràfiques** formen part avui dia de la vida quotidiana (corba de temperatura, cotització de la borsa...) i són eines utilitzades en nombrosos dominis tècnics.

El **càlcul integral**, que permet calcular àrees i volums, es va desenvolupar al mateix temps que el càlcul diferencial al segle XVII.

Els problemes de mesura de volums i de nivells formen part, des de sempre, de la feina dels comerciants i els enginyers.

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Funció – Gràfic – Càlcul integral – Volums – Arquimedes – Barril



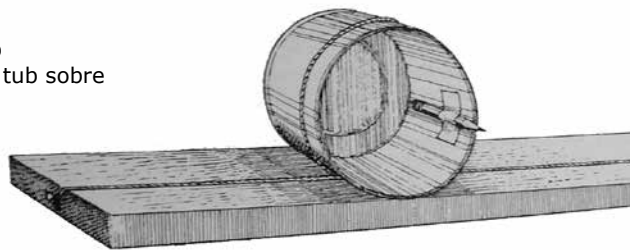
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 llapis, 1 full, 1 regle, 1 tub

Ruleta i cicloide

- Enganxeu un llapis a l'interior del tub
- Traceu la corba obtinguda en girar el tub sobre el regle sense que llisqui.

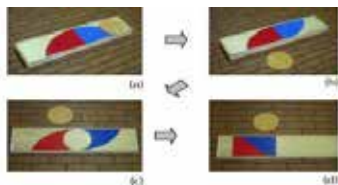
Aquesta corba s'anomena **cicloide**. És la corba que descriu un punt sobre una roda de bicicleta que gira.



Què recordar?

El nom "**cicloide**" va ser proposat per **Galileu** (1667-1748). Aquesta corba té propietats originals. Dues boles que surten des d'altures diferents es troben sempre a la base de la cicloide.

L'àrea sota una branca de la cicloide és igual a 3 vegades l'àrea del disc que la descriu.



El millor tobogan?

És el que permet arribar més ràpid a la base del tobogan?

Aquest problema va ser proposat en forma de desafiament per **Jean Bernoulli** el 1696.

La resposta la va trobar ell mateix, però també el seu germà **Jacques, G. de l'Hospital, Leibniz** i **Newton**. Aquest tipus de problemes és l'origen del **càlcul de variacions**.

És una cicloide, en aquest context s'anomena corba braquistòcrons.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 llapis, 1 full de discs de cartró rígids o de PVC... 1 disc buit

93

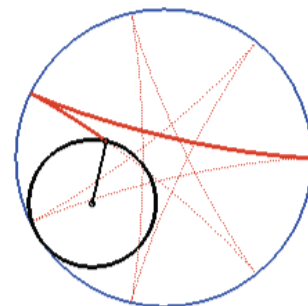
94

Corbes en bucle

- Enganxeu el llapis a la vora d'un disc
- Traceu corbes fent girar aquest disc a l'interior o a l'exterior d'un altre disc.

Aquestes corbes s'anomenen **hipocicloides** o **epicicloides**.

- Intenteu construir una corba exterior amb 1,2,3... branques.
- Intenteu construir una corba interior amb 2,3 o 4 branques.
- Aquestes corbes acaben per tancar-se sempre?



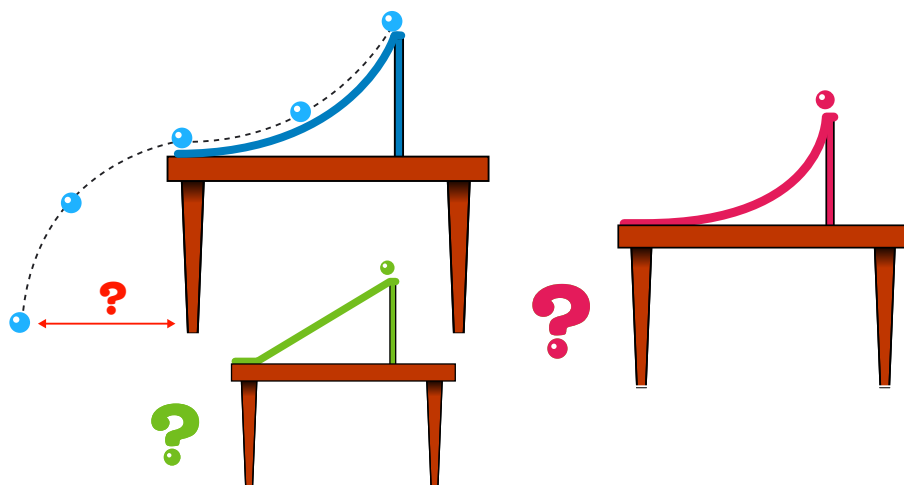
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 3 tobogans de fusta o PVC, en forma de U o... 3 boles idèntiques preferentment d'acer

El camí més curt?

Poseu els tobogans a la vora d'una taula. Feu sortir les tres boles a la vegada.

- Quina arribarà abans a la base del tobogan?
- Quina és la que arribarà més lluny?



Moral de la història: « La línia recta no sempre és el camí més curt! ».



Per anar més lluny...

Problemes « paradoxals »

Un problema paradoxal és un problema amb una resposta que va en contra del raonament lògic natural. Vet aquí tres exemples:



2 monedes idèntiques.

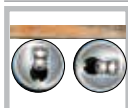
Una fa una volta completa al voltant de l'altre que està fixa.

- Quantes voltes ha fet sobre si mateixa?
Per què?



Una ampolla està tombada sobre una taula i fa una volta sobre si mateixa, amb el coll recolzat sobre un tros de fusta.

- Quina és la distància recorreguda per un punt de l'ampolla?
I per un punt del coll? Per què?



Un llistó es col·loca sobre dos cilindres idèntics.

- Quina és la distància recorreguda pel llistó quan els cilindres fan una volta?

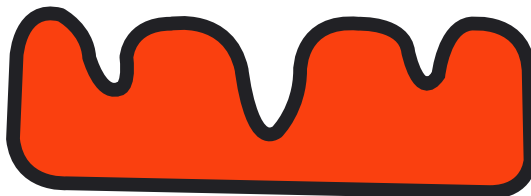
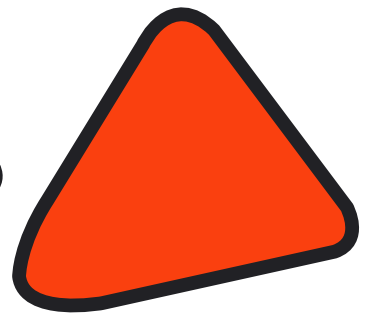
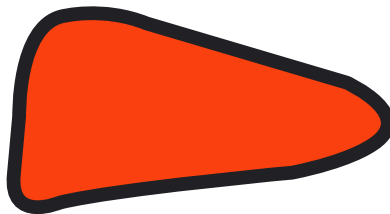
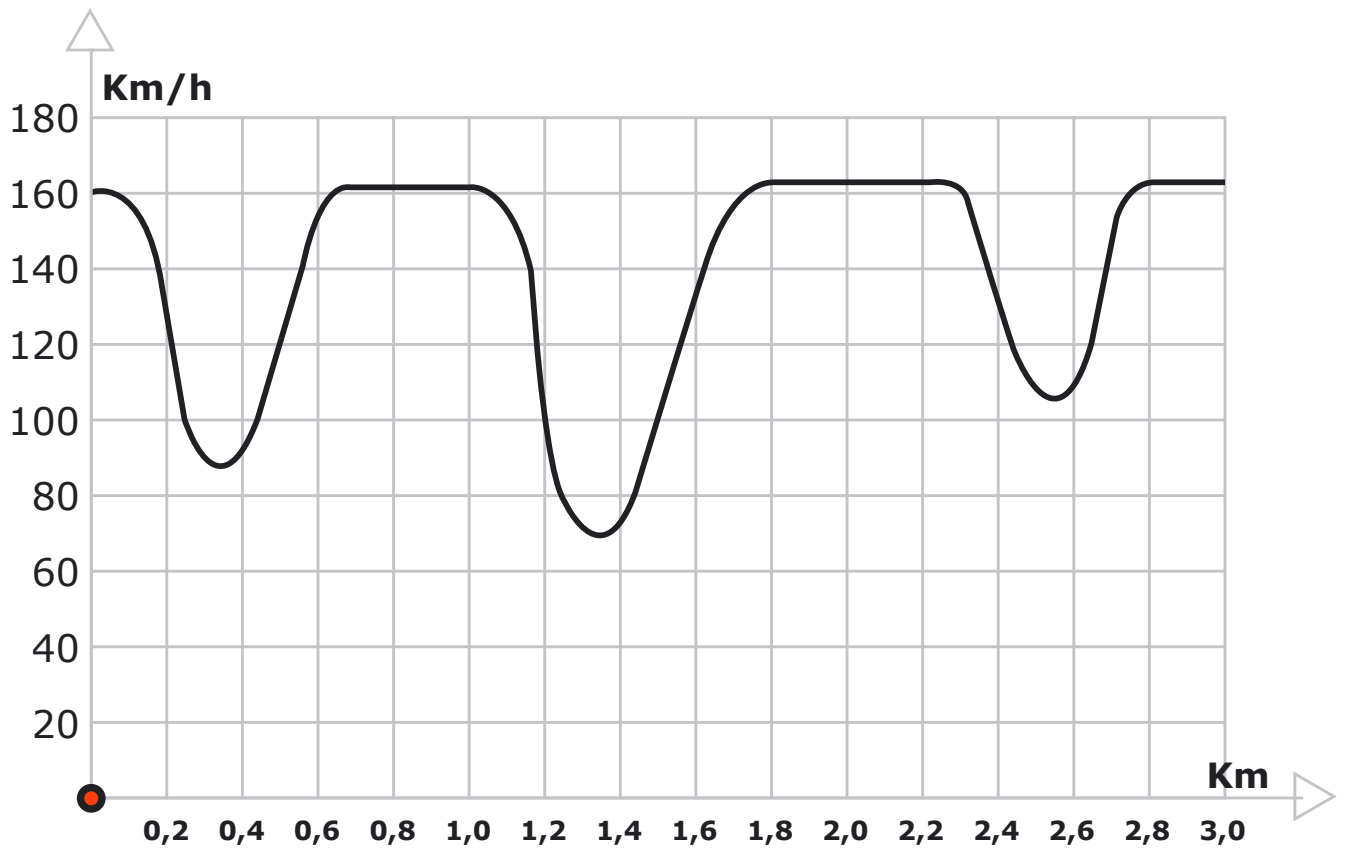
Aplicacions de les matemàtiques

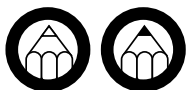
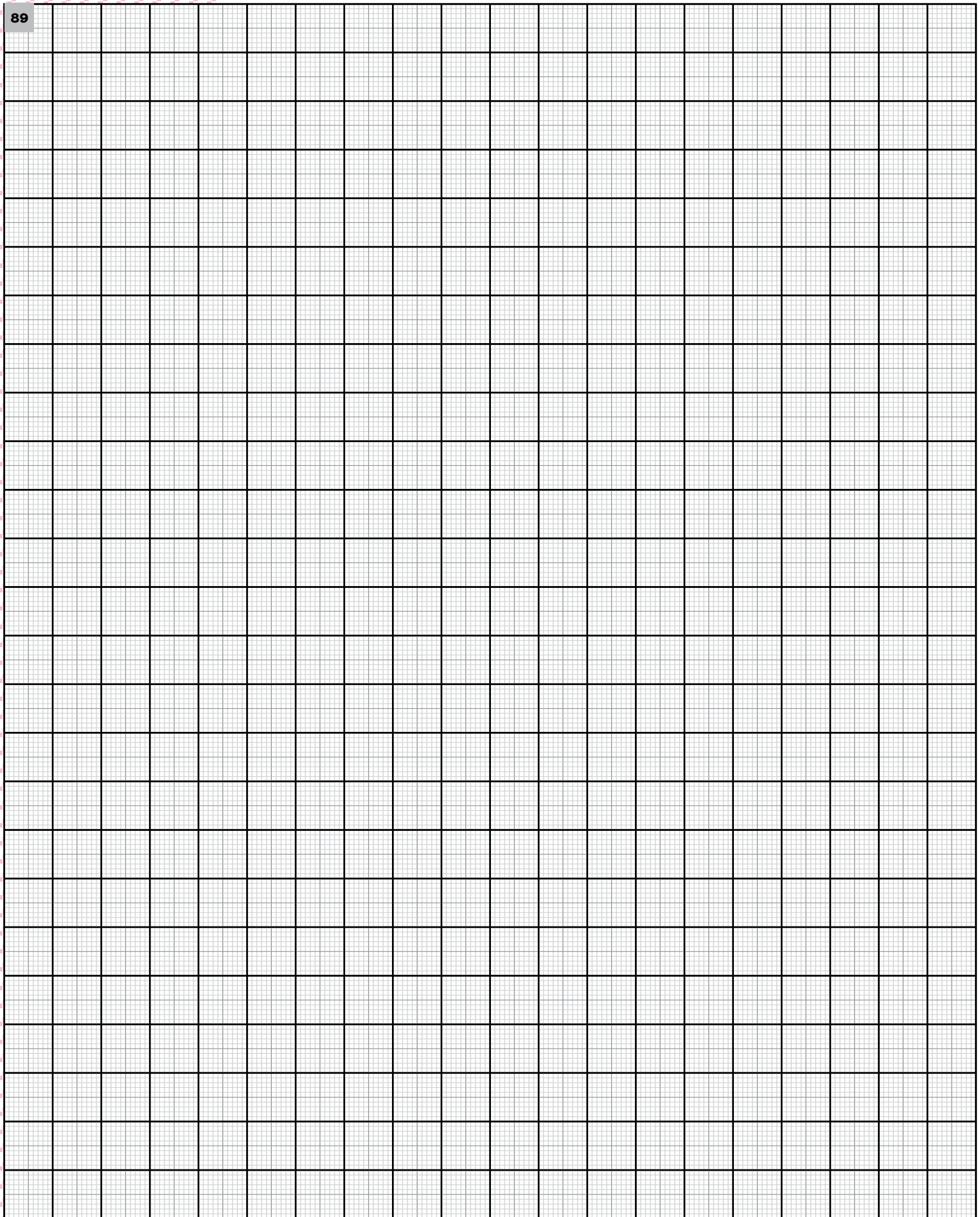
Aquestes corbes apareixen des de l'antiguitat, usades per **Aristòtil** i **Ptolomeu** per descriure els moviments dels planetes. Els astrònoms les usen encara avui dia.

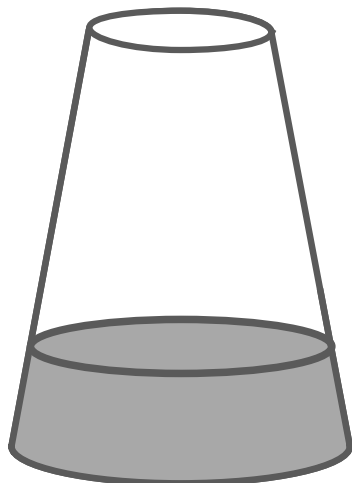
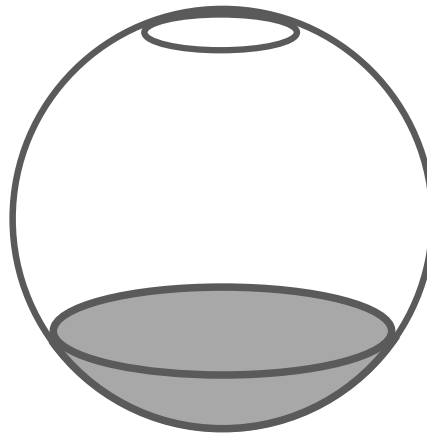
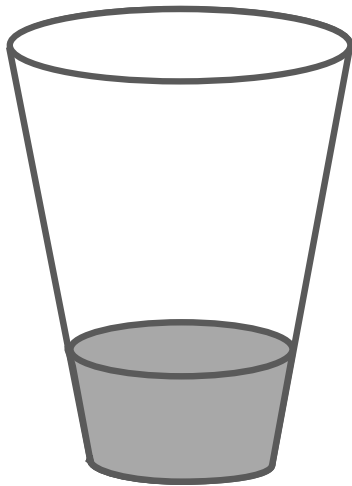
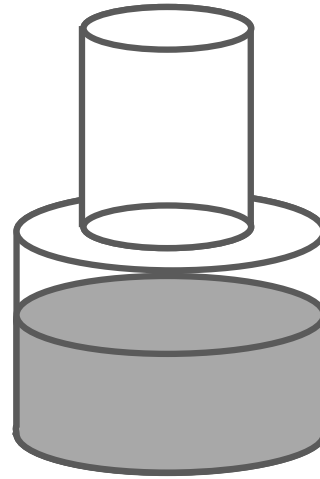
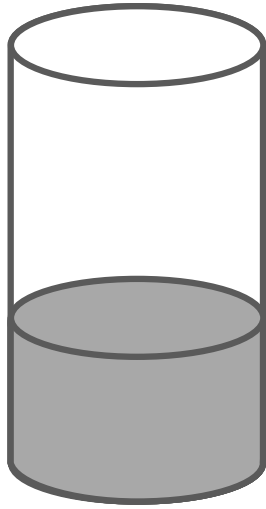
Per obtenir mesures més precises del temps en navegació o en astronomia, **Huygens** va inventar el 1659 un rellotge de pèndol que oscil·la entre dos arcs d'una cicloide. És el pèndol isòcron. En mecànica, les formes cicloïdals són usades en engranatges i reductors de velocitat. Una pista de monopatí en forma de cicloide tindria més avantatges que les actuals!

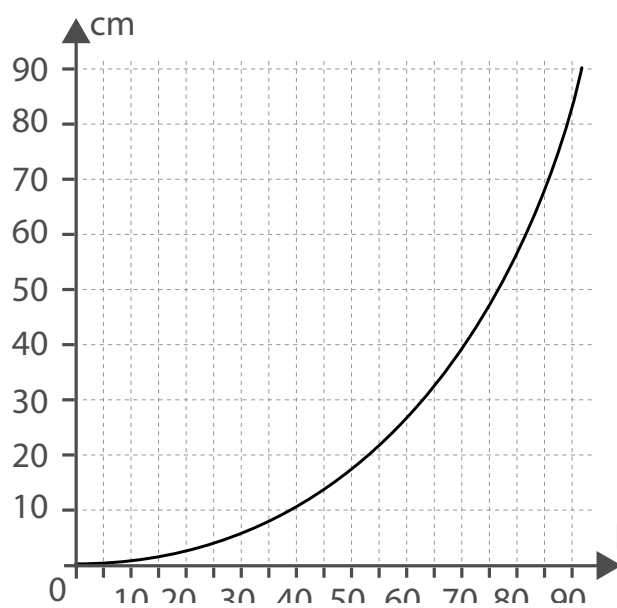
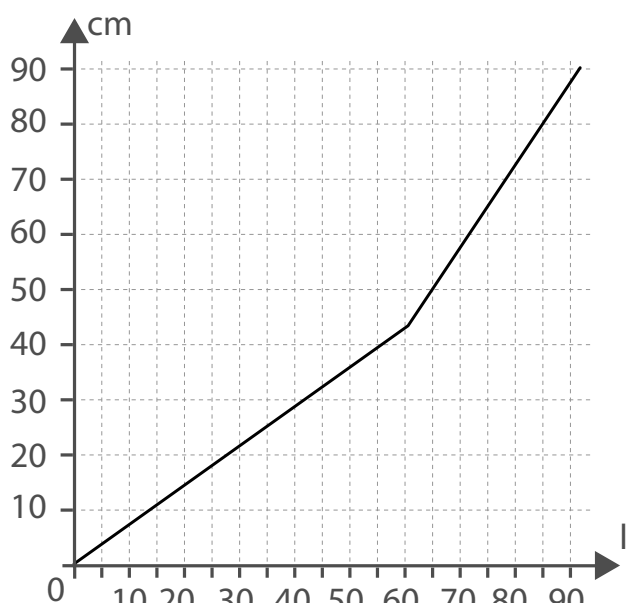
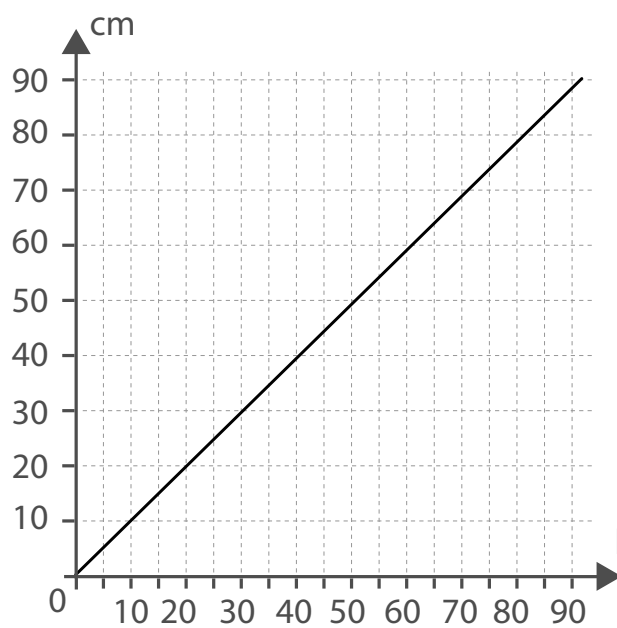
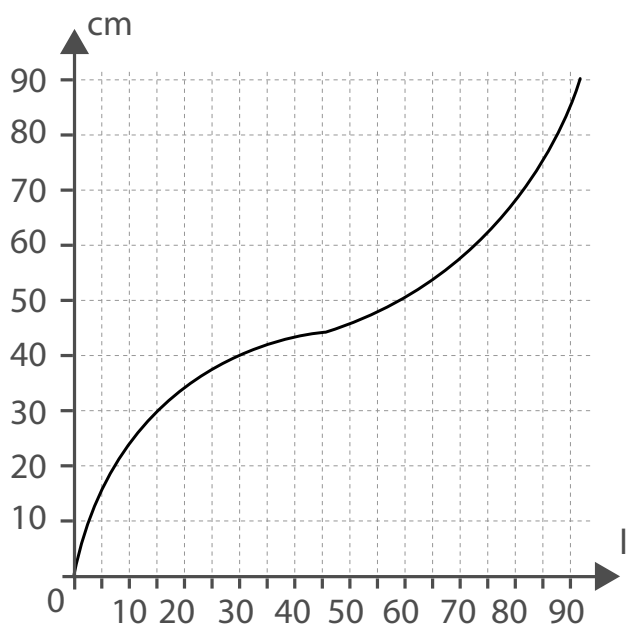
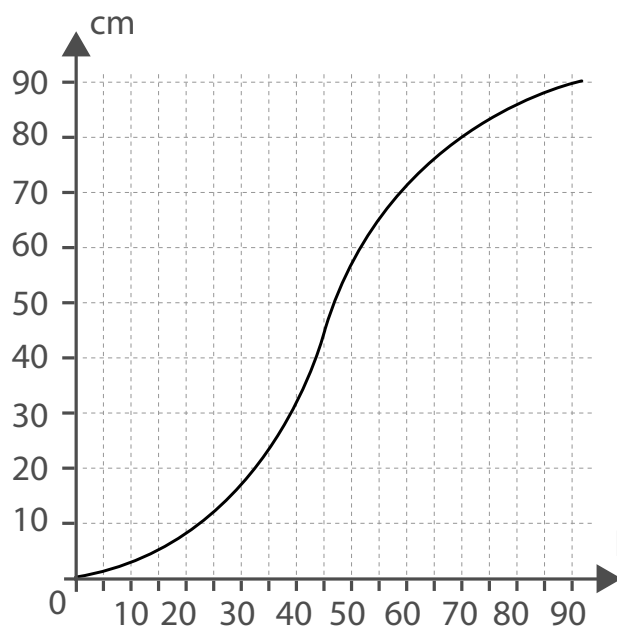
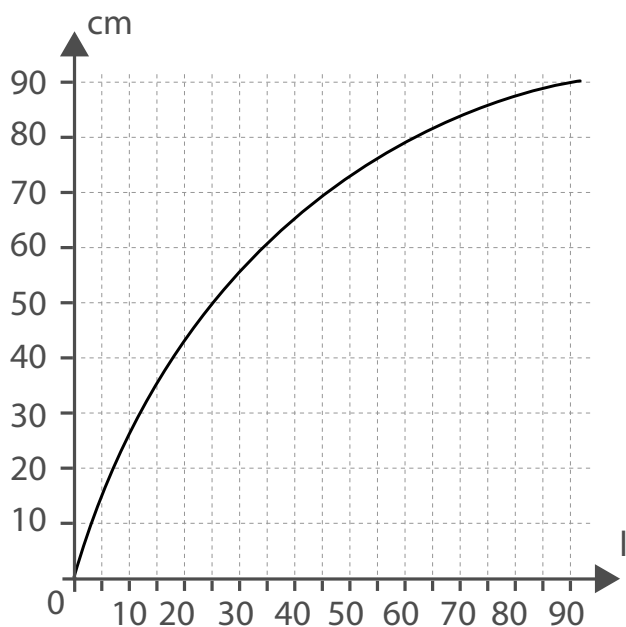
PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

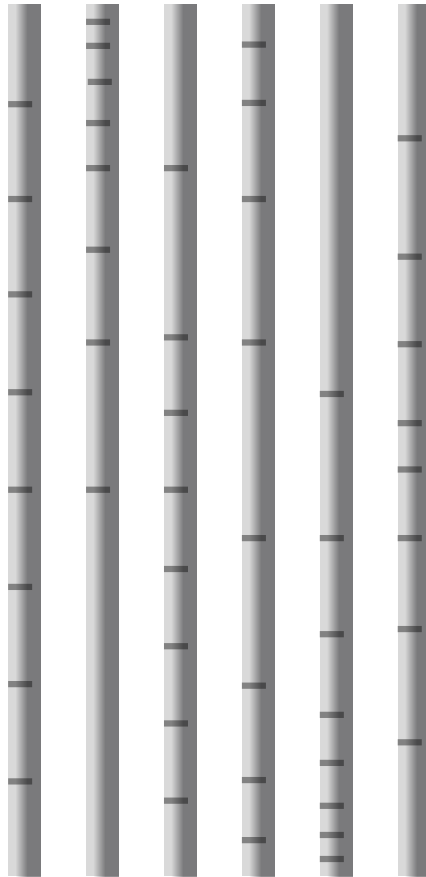
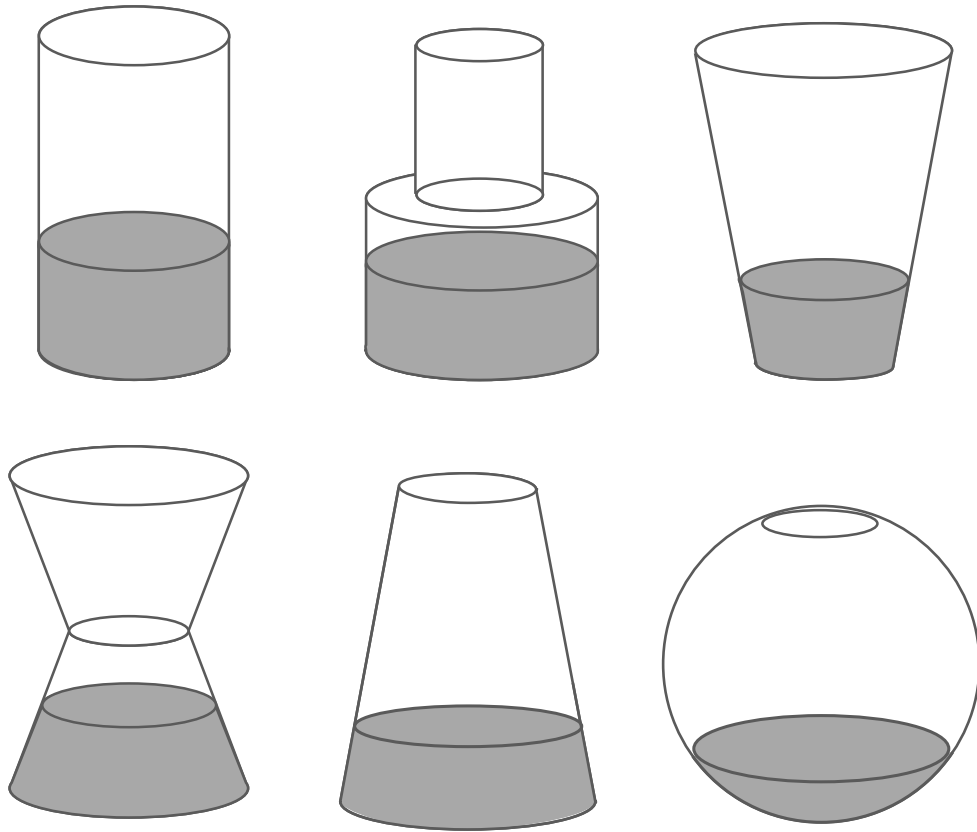
Bernoulli – Tautocrona – Braquistòcrona – Cicloide – Càustica – Rellotge de Huygens

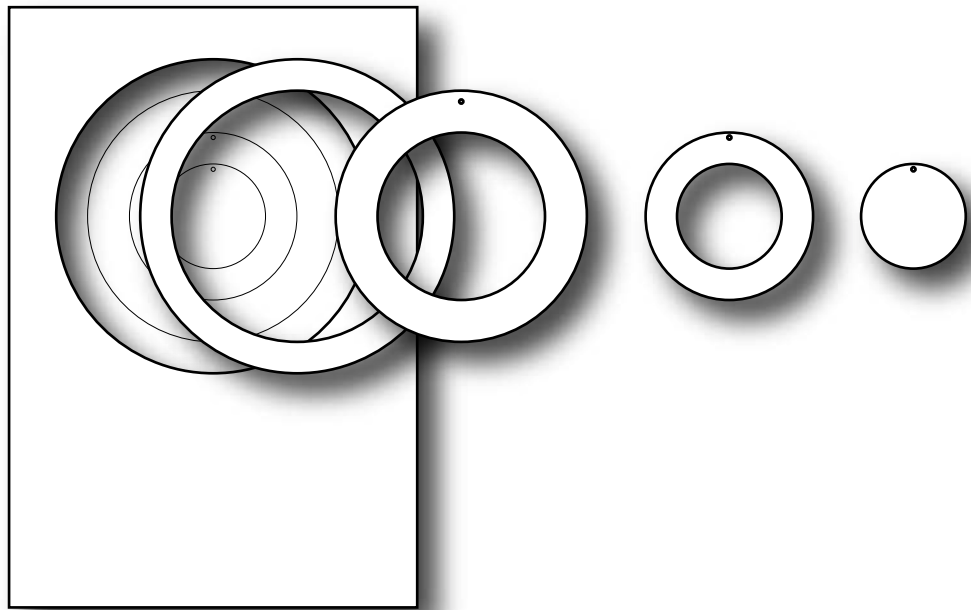
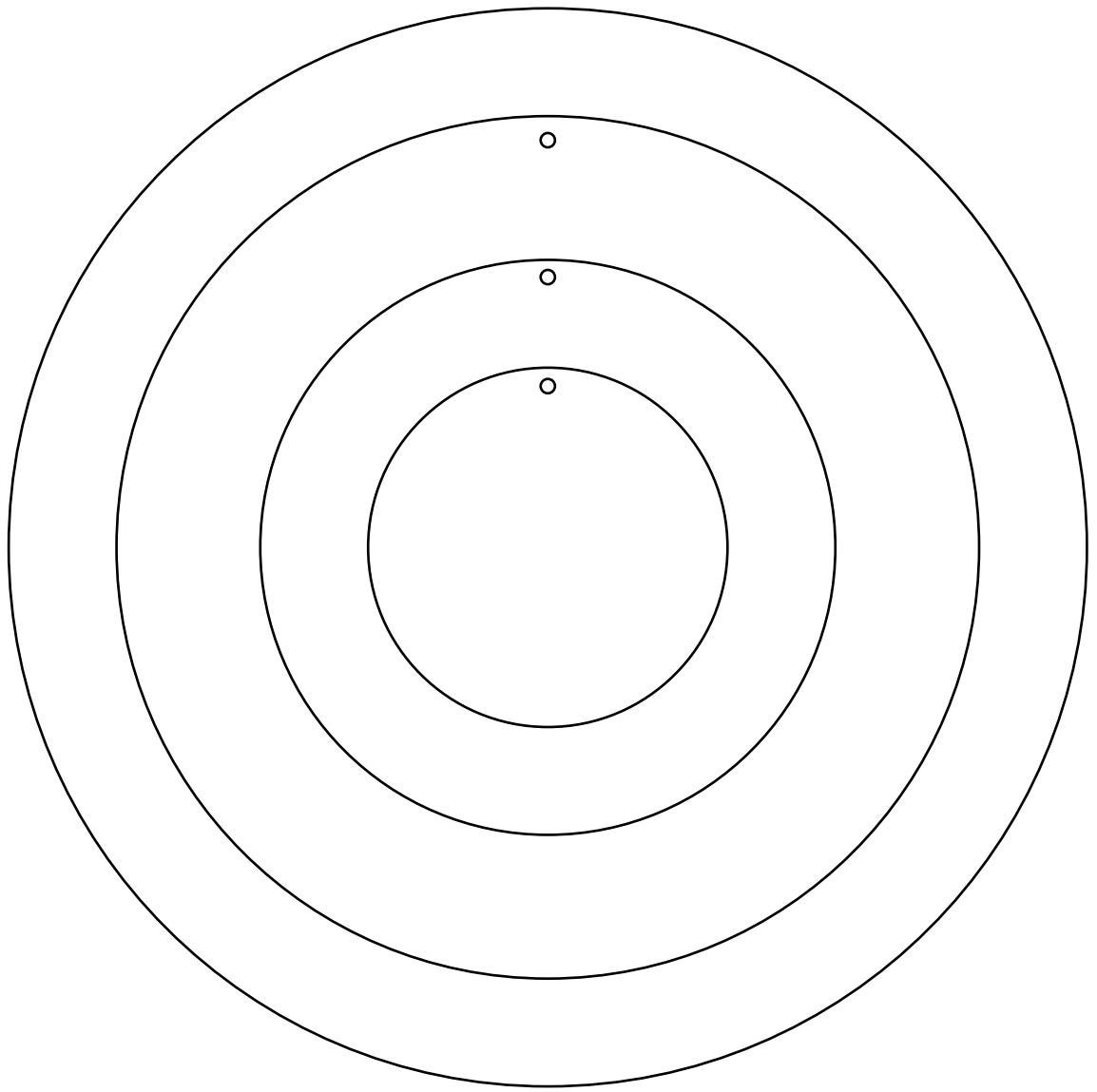


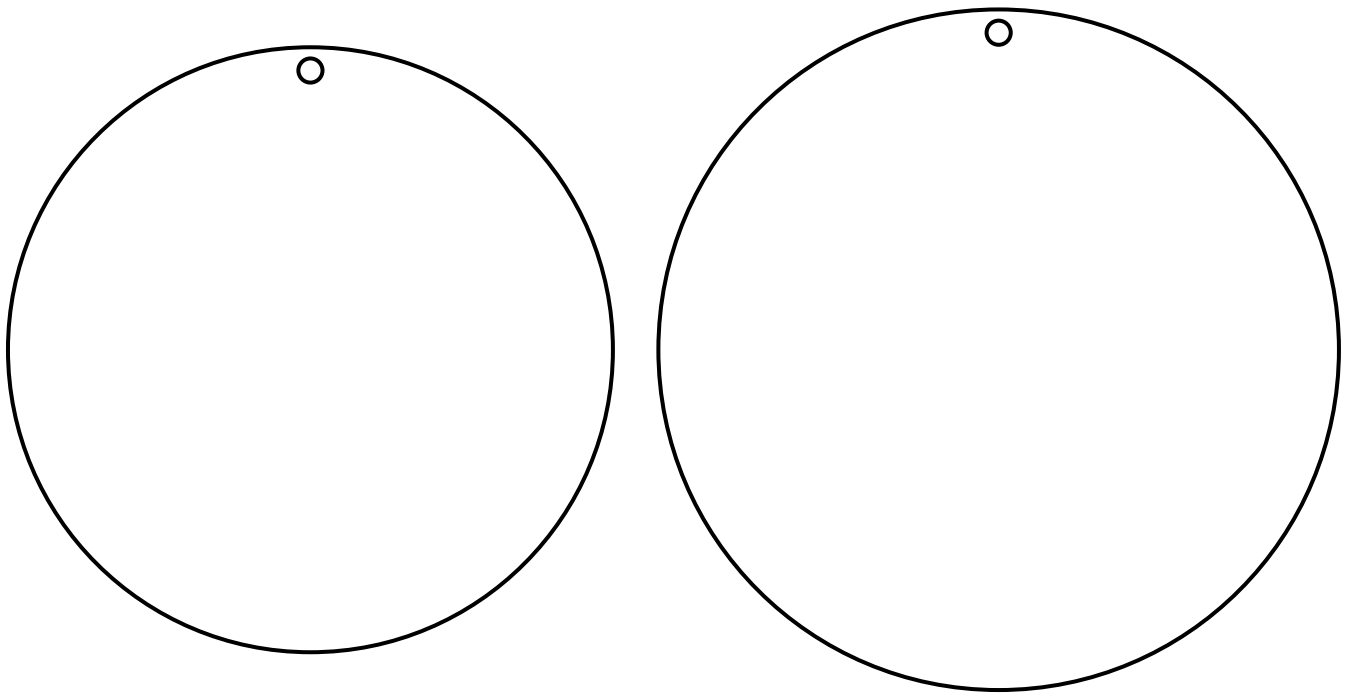
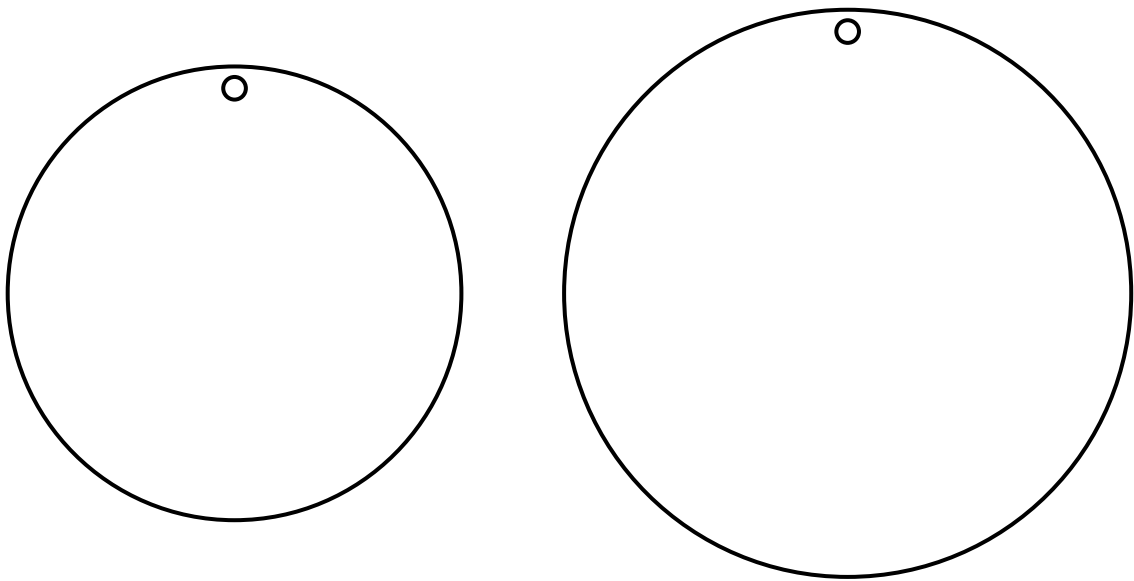
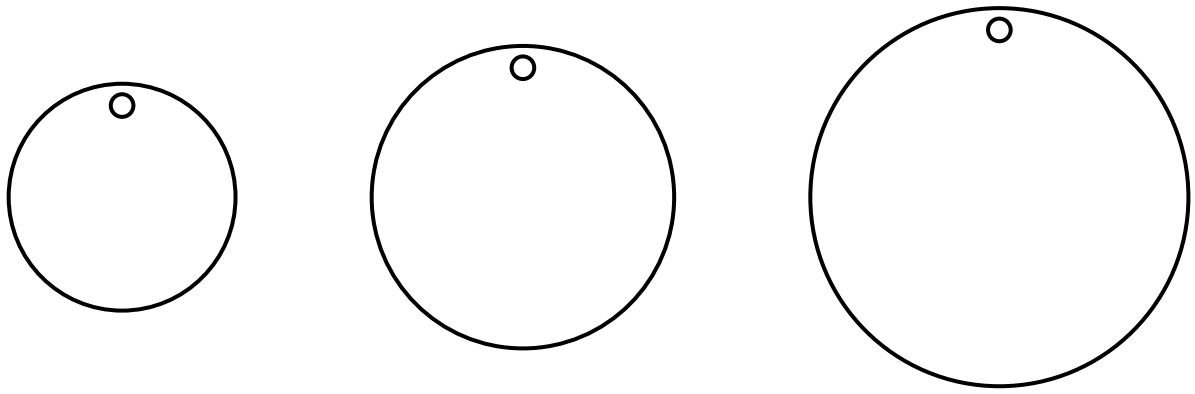






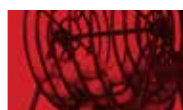




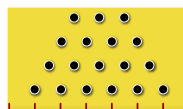




7. Estimar - Preveure



Dues boles vermelles?



Bingo!



I el guanyador és?



Dues boles vermelles?



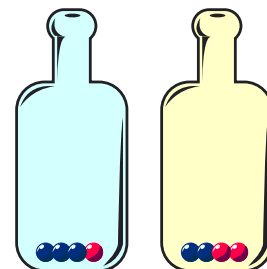
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 ampolles petites amb 4 boles

Dues boles del mateix color o dues boles de colors diferents?

Agafeu un recipient, gireu-lo i feu aparèixer 2 boles en el coll de l'ampolla.

- Teniu més opcions d'obtenir dues boles del mateix color o dues de colors diferents?
- Com podeu verificar la resposta?
- I si cadascuna de les ampolles conté 1000 vegades més boles de cada color?



Què recordar?

Preveure o estimar

Dins un dels recipients hi ha el mateix nombre de boles de cada color, es pot pensar doncs que hi ha les mateixes probabilitats d'obtenir el mateix color que colors diferents. Però no!

Per verificar-ho podeu:

- Repetir l'experiència un gran nombre de vegades. És l'aproximació estadística.
- Calcular el nombre de maneres d'agrupar 2 boles de 4. Aquesta és l'aproximació probabilística.

En el 1r cas es té una estimació estadística del resultat. Com més vegades es faci l'experiment, més s'acosta l'aproximació al resultat exacte.

En el 2n cas es té una aproximació per modelització del problema i un resultat teòric.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 urna amb 750 boles blaves i 250 vermelles – apareixen 100 boles
o 1 sac amb 750 boles blaves i 250 vermelles – 1 recipient: 100 boles

Sondeigs – Sondeigs

- Extraieu 100 boles, quantes n'hi ha de cada color?
- Torneu a fer l'experiment unes quantes vegades. Quantes boles de cada color estimeu que hi haurà dins la urna?

Què recordar?

Si s'entrevista una mostra de 100 persones escollides a l'atzar dins d'un grup de 1000, s'obtenen informacions aproximades. De la mateixa manera, una mostra de 100 boles dóna informació sobre el nombre de boles de cada color dins la urna amb una certa precisió, una certa «forquilla» (entre 21 i 29 boles vermelles). Aquest és el camp dels sondeigs.

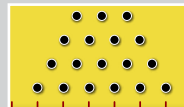
Aplicacions de les matemàtiques

Avui dia l'estadística i la probabilitat s'utilitzen en la gestió de sistemes complexos: control de coets, cues d'espera, marges d'error... però també en jocs amb diners, l'economia, les assegurances, el càlcul de les pensions i plans de pensions, tests de qualitat, estudis d'opinió... El càlcul estadístic permet extrapolar informacions per a una població sencera a partir d'una mostra representativa. Els sondeigs, ben fets, també han de donar informació sobre els límits de les tècniques usades.

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Atzar – Jocs – Sondeig – Opcions

Bingo!



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 taulell de Galton (cf plànol), bales, claus, taulell

100

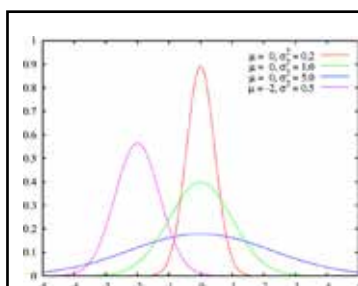
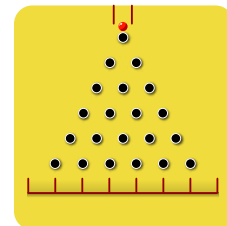
L'atzar és calculable?

Escolliu una bola i feu-la descendir suaument.

- Podeu preveure on arribarà?
- On té més opcions de caure?

Preveure com es comporta cada bola és impossible.

Per contra, el càlcul de probabilitats permet preveure com es distribueix el conjunt de boles a l'arribada.



La corba de Gauss

Per què és tan coneguda la forma d'aquesta corba? Per què és fonamental en l'estadística? Si es classifiquen els habitants d'un poble o d'un país..., segons una característica (altura, pes, coeficient intel·lectual, nivell de competència...), com més ens aproximem a la mitjana del criteri més individus hi ha. Com més ens n'allunyem menys n'hi ha. Als extrems, gairebé no hi ha ningú.

La representació gràfica d'aquesta realitat és una corba anomenada campana de **Gauss** (1777-1855). El caràcter universal d'aquesta corba prové d'un resultat descobert per **Euler** (1707-1783) i **Laplace** (1749-1827) que diu que la distribució de Gauss és l'acumulació de nombroses contribucions petites i independents.

Què recordar?

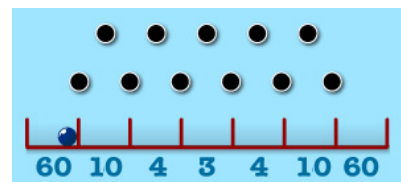
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 taulell de Galton (cf plànol), 7 valors sobre les caselles

100

Escolliu la casella bona

- Col·loqueu un Euro, un dòlar o... en una de les caselles.
- Si la bala cau en la casella, guanyeu 60, 15, 4 o 3 vegades la vostra aposta.
- Algunes caselles són més beneficioses pel jugador que altres. Quines?
- Calculeu el nombre de camins que condueixen a cada casella.
- Quina és la probabilitat d'arribar a cada casella?



Per conèixer la probabilitat d'arribar a cada casella, és suficient comptar el nombre de camins que hi condueixen! Es poden reconèixer els nombres del triangle de **Pascal**. No totes les caselles tenen les mateixes probabilitats de fer-vos guanyar! El propietari d'aquest tipus de joc és el que guanya més sovint?

Aplicacions de les matemàtiques

La probabilitat i l'estadística són eines que permeten el tractament de dades i de la informació. No només es troben en el camp de les tecnologies de la informació (tractament estadístic de senyal i d'imatges), sinó també en la gestió de riscos (assegurances), els controls de qualitat, l'economia, la sanitat, l'enginyeria financera (finances quantitatives), consell estratègic (anàlisi de mercat, estudis de viabilitat)...

Així es pot usar la corba de **Gauss** per modelitzar la gestió de ventes i d'estocs dins una empresa o un comerç.

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Corba de Gauss – Estadística – Probabilitat – Distribució – Esperança de guany

I el guanyador és?



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 jugadors

Pedra, paper, tisores...



Al mateix temps, els dos jugadors mostren la seva elecció amb la mà.
El paper envolta la pedra que trenca les tisores que tallen el paper!

- Com guanyar més sovint a aquest joc anomenat també Chifoumi?
- Resposta: jugant cada vegada a l'atzar.
- Però es pot jugar a l'atzar?



Variant: S'afegeix un pou!

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 jugadors i després 2 grups de jugadors, pissarra, guix

La carrera fins a 20

El primer jugador diu 1 o 2. Cadascú, per torns, afegeix 1 o 2 al nombre de l'altre jugador.
Els nombres següents s'escriuen a la pissarra. Guanya el primer que digui 20.

- 1ª fase: Feu jugar als alumnes un contra un.
- 2ª fase: Feu jugar 2 grups d'alumnes deixant un temps de reflexió cada cop. Cada alumne del grup juga per torns.
- 3ª fase: Cada grup enuncia elements de l'estratègia guanyadora. L'altre equip accepta o refusa l'enunciat. Guanya l'equip amb el major nombre d'enunciats acceptats.

Extensions:

- Fer la carrera fins a 30.
- Fer la carrera fins a 2020.
- Fer la carrera fins a 20 o 30, però afegint 1, 2 o 3.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 jugadors i després 2 grups de jugadors, taulell, guix, 1 graella

101

La rajola de xocolata



Cadascú, en el seu torn, designa una casella i ratlla totes les caselles que encara no estan ratllades que es troben a l'esquerra i a sota de la casella escollida.

- Perd el que ratlla l'última casella de dalt a la dreta.
- Es pot fer jugar als alumnes com en el cas de la carrera fins a 20.

Extensions:

- Jugar amb graelles més o menys grans.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 jugadors i després 2 grups de jugadors, taulell, 3 daus



Joc, atzar i estratègies

Cadascú, en el seu torn, tira el dos daus.

- Guanya el que obté una suma major.
- Quins són els nombres que tenen més opcions de sortir?

Extensions:

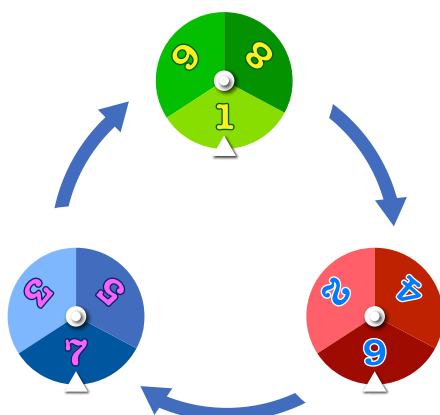
- Jugar amb 3 daus.

I el guanyador és?



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 jugador, 3 ruletes



Feu el vostre joc!

- Escolliu la vostra ruleta, jo escullo la següent i guanyo més sovint que vosaltres!
- Per què?

De fet, cada ruleta "guanya" més sovint que l'anterior.

Què recordar?

Aquests jocs són exemples simples de la teoria de jocs.

En els dos primers casos, el joc és d'informació completa i hi ha un final. Hi ha sempre un guanyador i un perdedor i per tant estratègia guanyadora i, aquí, guanya el que comença el joc (i juga bé!). Però en el segon joc l'estratègia guanyadora no és fàcil de trobar!

El tercer joc va contribuir al naixement de la teoria de jocs al segle XVII gràcies als treballs de **Blaise Pascal** i del **Cavaller de Méré**. Es va desenvolupar al segle XX per **Von Neumann** i **Oskar Morgenstern**. Els últims jocs mostren que a vegades l'atzar es pot controlar. Situacions anàlogues al joc de les ruletes van permetre provar, en particular, a **Condorcet** (1743-1794) que en democràcia no hi ha un sistema electoral "millor" que un altre!

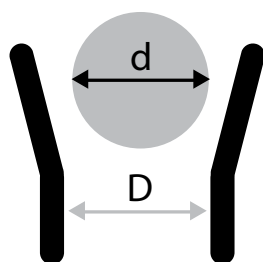
Aplicacions de les matemàtiques

La teoria de jocs, amb la col·laboració de la probabilitat i l'estadística, és molt present avui en dia en totes les situacions que apel·len a l'estratègia, la decisió, la competició i la cooperació.

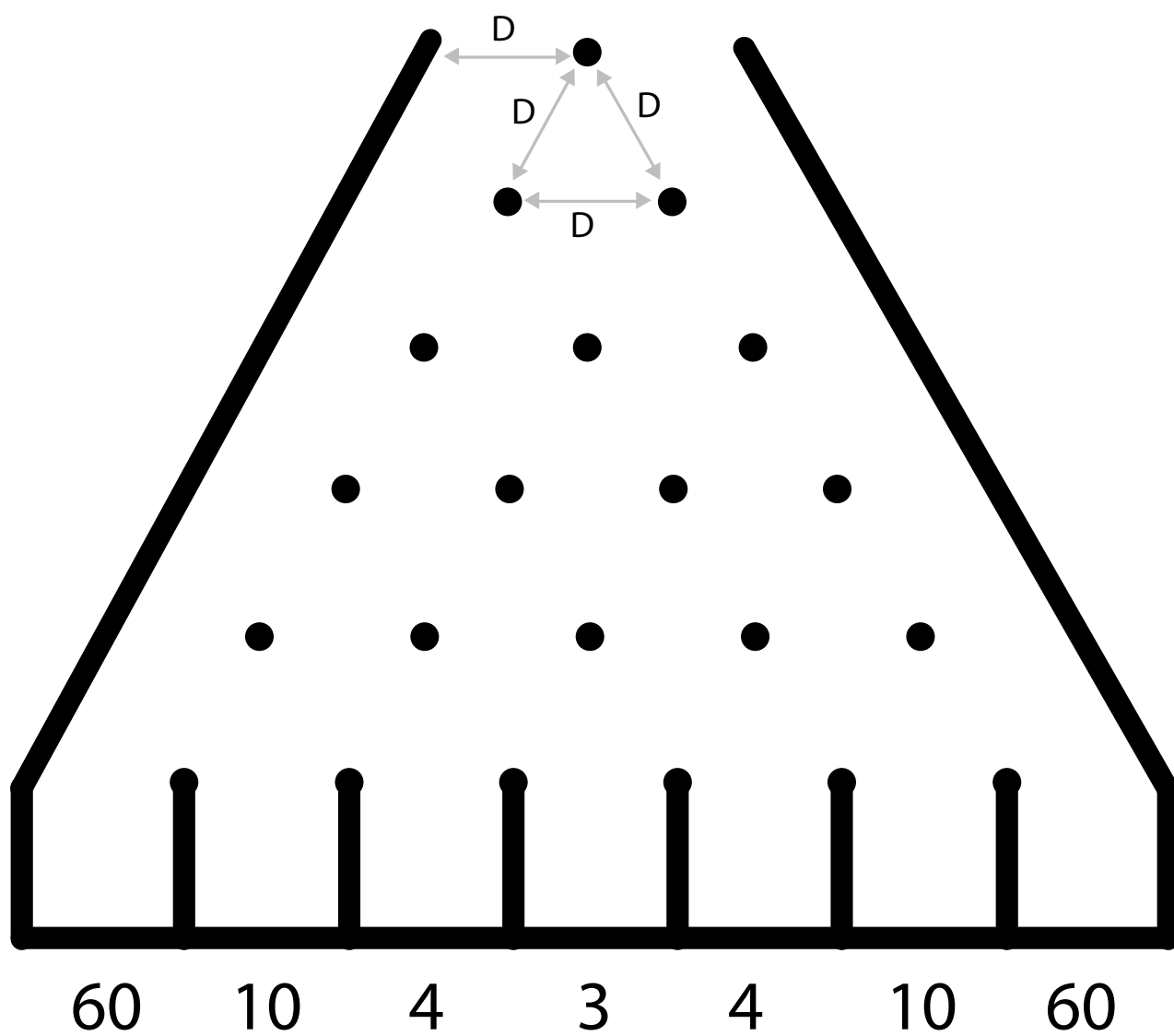
Es troba, per descomptat, en els jocs però també en les lluites o en els conflictes polítics (les ciències polítiques) o en les estratègies militars i sobretot en l'economia, dins el comerç i el màrqueting. És també utilitzada en la informàtica i en l'algorísmica.

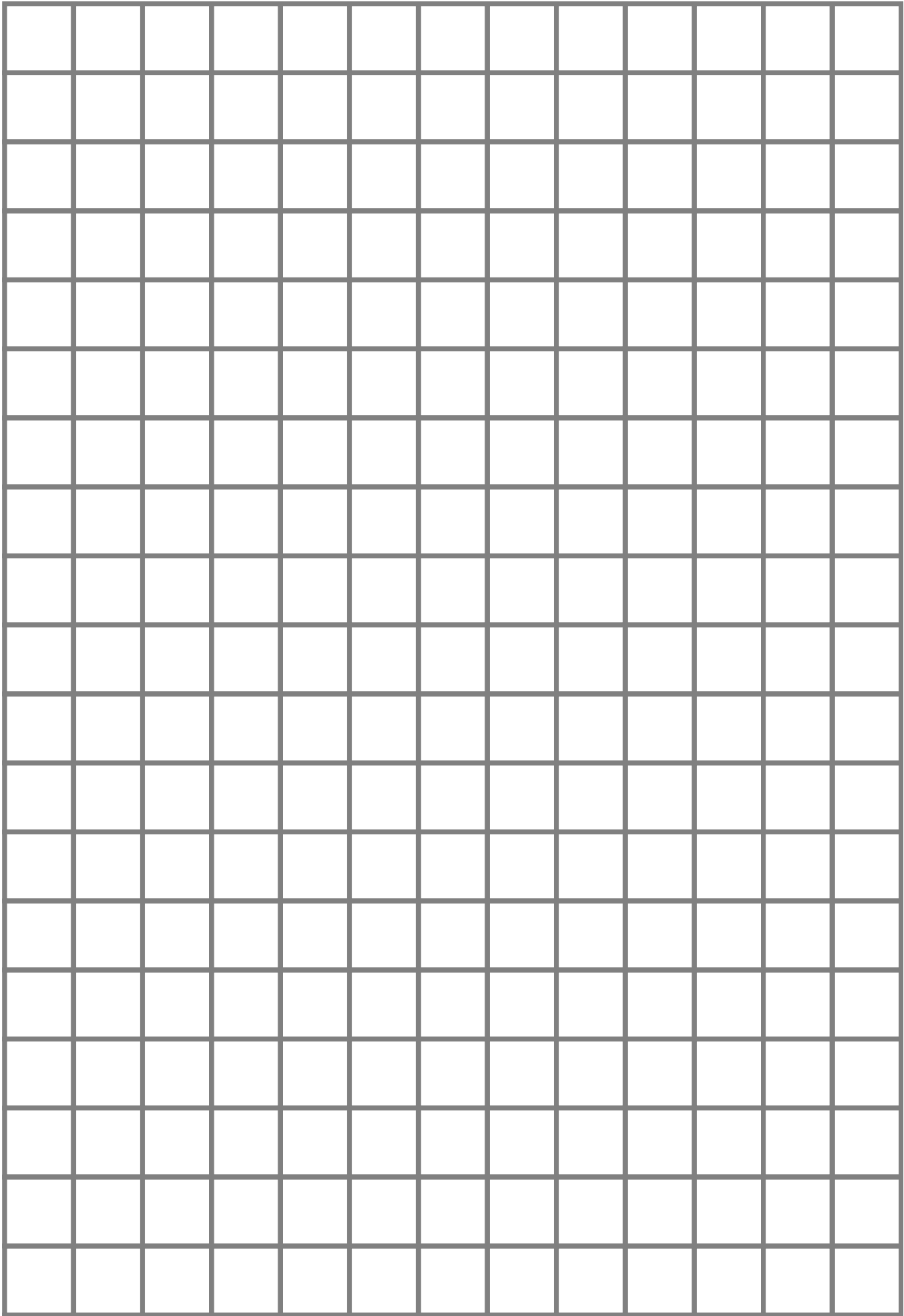
PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Teoria de jocs – Estratègia – Von Neumann – Nash – Teoria de la informació



$d = 30 \text{ mm}$
 $D = 35 \text{ mm}$





8. Optimitzar



Bombolles de sabó



El camí més curt



La forma òptima



Bombolles de sabó



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Filferro o canyetes per beure, 1 cubell d'aigua amb sabó

La natura és mandrosa

- Fabriqueu un tetraedre, un cub, un octaedre, una hèlix...
- Abans de submergir-los en l'aigua, imagineu com seran les superfícies sabonoses.
- Submergiu-los i observeu les superfícies sabonoses.
- Quantes cares hi ha al voltant de les arestes? Quantes arestes al voltant dels vèrtex?



Què recordar?

Matemàtiques sabonoses

Una bombolla de sabó és esfèrica. Per què? Amb àrea constant, el cercle delimita la superfície amb perímetre més petit. Amb volum constant, l'esfera té la superfície més petita. En la natura, els esforços tendeixen a ser el més febles possible. Aquestes formes corresponen a les de mínima energia potencial, que és proporcional a l'àrea dels cossos. Les molècules de sabó creen una tensió superficial que minimitza les superfícies sabonoses.

El belga **Ferdinand Plateau** fou el primer en estudiar aquestes formes al voltant del 1860.

Va notar que:

- Quan una bombolla es recolza en una superfície, és perpendicular a ella.
- Quan es troben diverses superfícies sabonoses, ho fan: de 3 en 3 el llarg d'una línia amb angles iguals a 120° , de 4 en 4 al voltant d'un punt amb angles constants ($109^\circ 28' \dots$).

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Filferro, canyetes per a beure, una placa, aigua amb sabó

Bombolla a bombolla

- A l'interior d'un marc quadrat de filferro de 15 cm de costat (aproximadament), col·loqueu una corda tancada de 25 cm (aproximadament), connectant les 4 cantonades del quadrat amb la corda.
- Poseu-ho tot dins l'aigua amb sabó i traieu-ho.
- Quina forma prendrà la corda interior si es forada amb un dit sec?
- Feu una bombolla de sabó a l'aire. Quina forma té?
- Poseu una bombolla sobre la placa. Com es recolza la bombolla sobre la placa?
- Poseu una bombolla grossa i una petita sobre la placa sense que es toquin. Introduïu una canyeta entre les dues. Què passa?
- Sobre un filferro en U, col·loqueu una corda no tensada i submergiu-ho tot en l'aigua sabonosa. Tireu una mica del fil. Quina forma pren?

Aplicacions de les matemàtiques

Aquestes formes es troben en la natura i en l'arquitectura.

Els problemes de superfícies mínimals interessen a matemàtics i físics des de fa més de tres segles i, des de fa una cinquantena d'anys, a físics, químics, biòlegs, arquitectes... Ruscs d'abelles, esquelets, teles d'aranya... l'evolució de la natura ha optimitzat de moltes maneres. Igualment, dins la indústria de l'automòbil, l'aeronàutica, la construcció, l'arquitectura de ponts... els enginyers busquen solucions òptimes per a disminuir el pes, els residus, el consum d'energia i el cost mediambiental dels objectes que ideen.

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Bombolles de sabó – Superfícies mínimals – Tensió superficial

El camí més curt

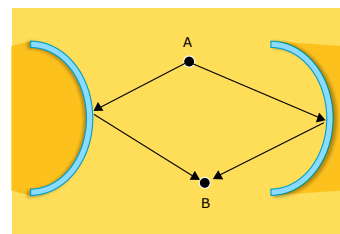
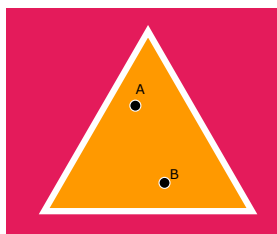
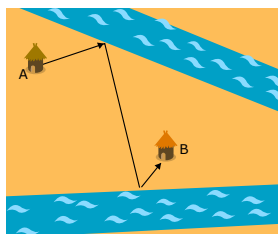


Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper, llapis

El camí més curt

Quin és el camí més curt de A a B?



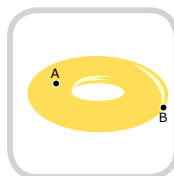
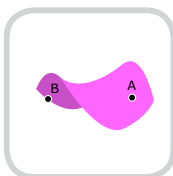
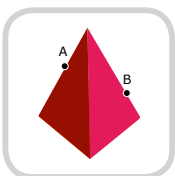
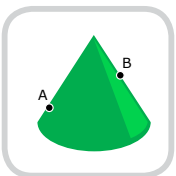
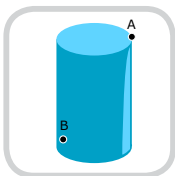
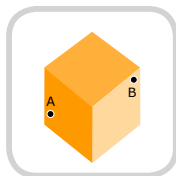
- passant per un dels rius?
- passant pels dos rius?
- passant pels tres costats d'un triangle?
- per un mirall convex?
- per un mirall còncav?

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper, llapis, 1 cub – 1 cilindre – 1 con – 1 piràmide – 1 “sella de muntar” – 1 tor

El camí més curt en una superfície

Quin és el camí més curt de A a B?



Què recordar?

La línia recta no és el camí més curt... en general!
El camí més curt sobre una superfície s'anomena **geodèsica**.

- En una **superfície plana**, en geometria euclidiana, és la línia recta.

- Sobre una **superfície desenvolupable**, un cilindre, un con, un poliedre... és el segment recte que uneix dos punts sobre la superfície desplegada plana.

- Ja no és una línia recta quan la superfície no té curvatura nul·la en tots els punts. Aquest és el cas de la «**sella de muntar**» amb curvatura negativa i de l'esfera amb curvatura positiva.

- Sobre l'**esfera**, és un arc de cercle màxim, cercle centrat al centre de la Terra.

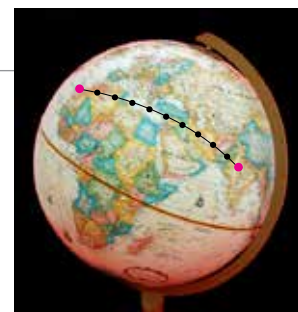
Aquests problemes van ser desenvolupats per **Gauss** el segle XIX.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 globus terrestre, 1 corda o 1 goma elàstica

I sobre la Terra?

- Escolliu dos punts entre el 30è i el 40è paral·lel: París i Montreal o El Cap i Santiago...
- Quin és el camí més curt per anar d'una ciutat a l'altra?
- Verifiqueu-ho amb la corda.
- A què correspon aquesta línia sobre el globus?



Aplicacions de les matemàtiques

Sobre la Terra, aquests problemes sobre el camí més curt interessen als gestors de xarxes de fluids, electricitat, gas, petroli, aigua, però també als de comunicacions terrestres.

Es poden resoldre mitjançant les matemàtiques o amb algorismes.

A la superfície de la Terra, s'han utilitzat des de fa molt temps pels mariners. Avui dia ho són pels aviadors, fins i tot per als vols de llarga distància. Per a vols espacials, aquests problemes esdevenen més complexos i involucren l'atracció gravitacional dels planetes.

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

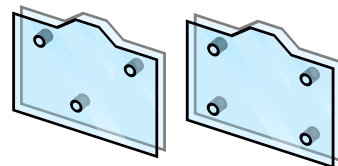
Camí més curt – Minimal – Curvatura – Gauss – Superfície desenvolupable



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 plaques de plexiglàs unides per 3, 4 o 5 varetes, 1 galleda d'aigua sabonosa

El camí més curt connectant 3 punts



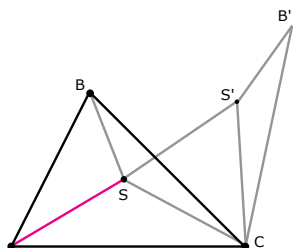
- Situeu 3 varetes entre les 2 plaques*.
- Submergiu-ho tot. Traieu-ho i observeu.
- Quants punts hi ha? I arestes? Quin angle formen?
- Situeu 4 varetes entre les 2 plaques.
- Abans de submergir-ho tot, imagineu com es repartiran les unions sabonoses. En X? En U? En Z? En H???
- Submergiu i observeu: quants punts hi ha? quantes arestes?

* Què passa si un dels angles del triangle és superior a 120°?

Què recordar

Solució sabonosa i matemàtica

La solució sabonosa mostra el camí més curt que uneix 3 punts, 4 punts i més. El problema amb 3 punts el va resoldre el suís **Joseph Steiner** al segle XIX.



Vegem-ne una solució senzilla: es construeix el triangle CS'B', obtingut per una rotació de 60° a partir del triangle CSB.

Es té:
 $SA + SB + SC = SA + SS' + S'B'$

Aquesta quantitat és mínima quan els punts A-S-S'-B' estan alineats. En aquest cas els angles BSC i CS'B' valen 120°. I el problema està resolt!

Una escola per a 3 pobles

Els 3, 4 o 5 punts es poden canviar per ciutats, granges..., el punt d'**Steiner**, per una escola, hospital, ... La resposta la dona l'aigua sabonosa.

Com resoldre aquest problema si els nombres d'habitants són diferents?

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 plaques de plexiglàs, 1 canyeta per beure

Els ruscs d'abelles

- Feu una bombolla entre les dues plaques. Es formarà un cilindre.
- Col·loqueu una successió de petites bombolles, les unes al costat de les altres. Com s'enllacen les unes amb les altres?
- Introduïu una làmina perpendicular a les dues plaques i observeu.
- Si les bombolles són de la mateixa mida, quines formes prenen? Com s'enllacen?

Per saber-ne més

Un apilament de discs deixa espais buits. L'hexàgon regular és el que ocupa l'espai més gran sense deixar forats. Es troba en els ruscs d'abelles. Han trobat les abelles la solució òptima?

Tot i així, les cel·les d'un rusc d'abelles no són la manera més eficient d'ocupar un volum donat. S'han trobat millors sistemes, sense que encara es conegui el més eficaç.

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: fets de filferro: 2 cercles – 4 varetes



Superfícies minimals entre 2 cercles, 2 rectes, 4 rectes...

- Traieu les dues anelles de la galleda i allunyeu-les una mica la una de l'altra. Quina és aquesta superfície?
- Traieu les dues varetes de la galleda, allunyeu-les una mica la una de l'altra i gireu-les una mica la una respecte l'altra. Quina és aquesta superfície?
- Refeu l'experiment amb quatre varetes unides.

Aplicacions de les matemàtiques

Aquestes superfícies minimals es troben en la física-química dels materials, en biologia i en arquitectura (estructures molt fines o fins i tot de formigó).

Les formes dels ruscs d'abelles tenen les avantatjoses propietats de ser lleugeres, resistents i rígides. Aquestes formes fetes d'alumini, s'utilitzen en les estructures de l'Airbus A340 i les del TGV, les parets de satèl·lits...

Amb cartró o polivinil aquesta forma s'usa habitualment en la construcció de portes, de plataformes de transport...

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Optimització – Superfícies minimals – Ruscs d'abelles – Estructura tensada

9. Demostrar



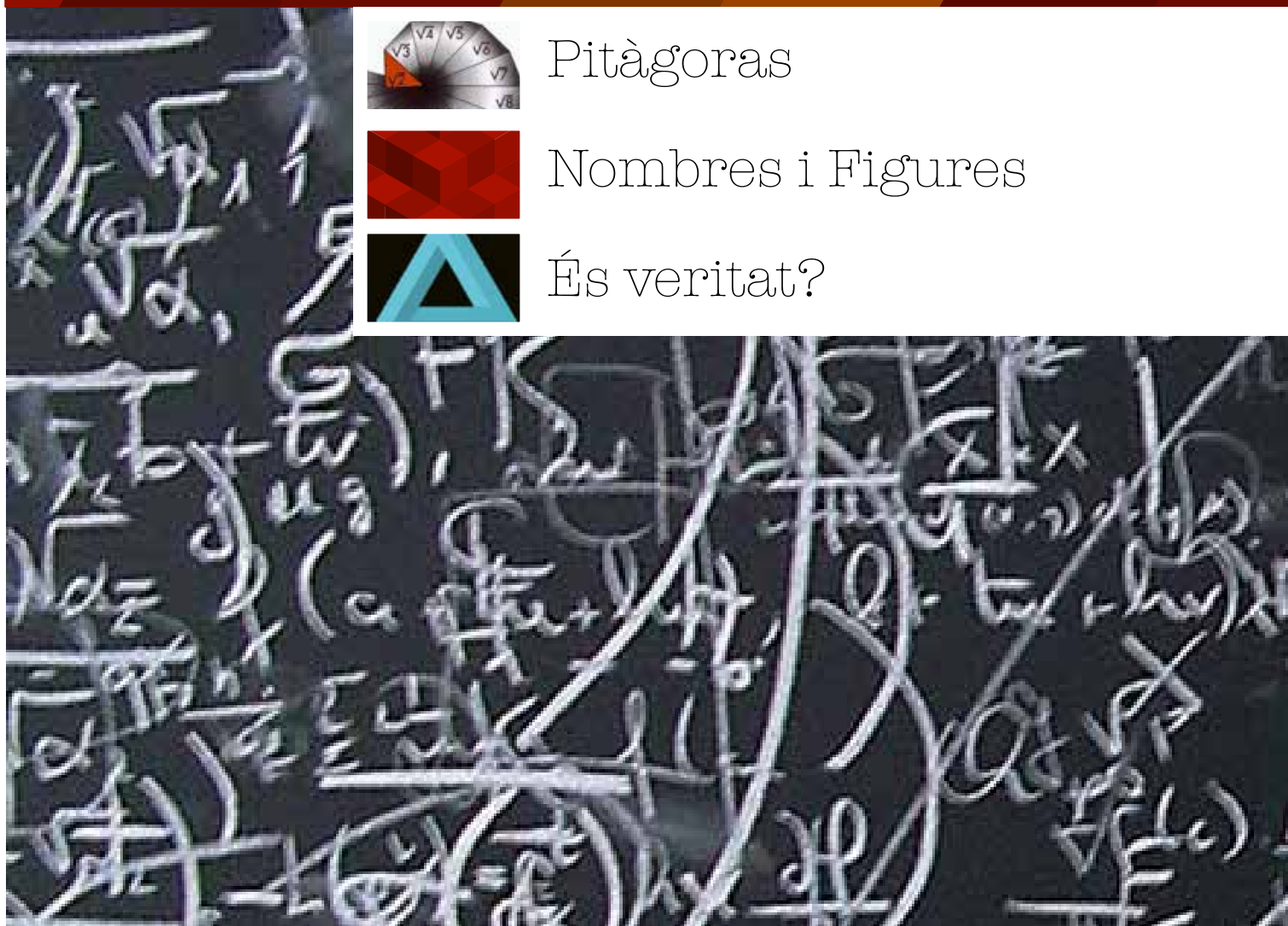
Pitàgoras



Nombres i Figures



És veritat?





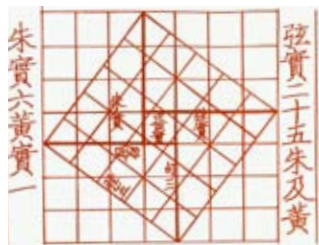
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 2 trencaclosques per a retallar

113

114

Què recordar

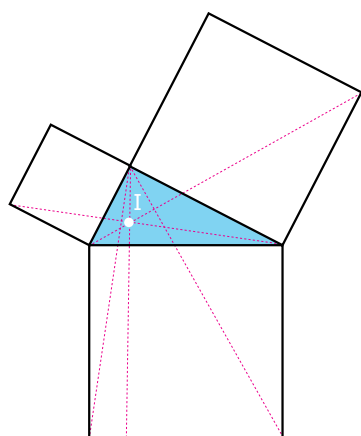


Chou-pei Suan-king
(1105 a. de C.) - Xina.

3000 anys de recerca

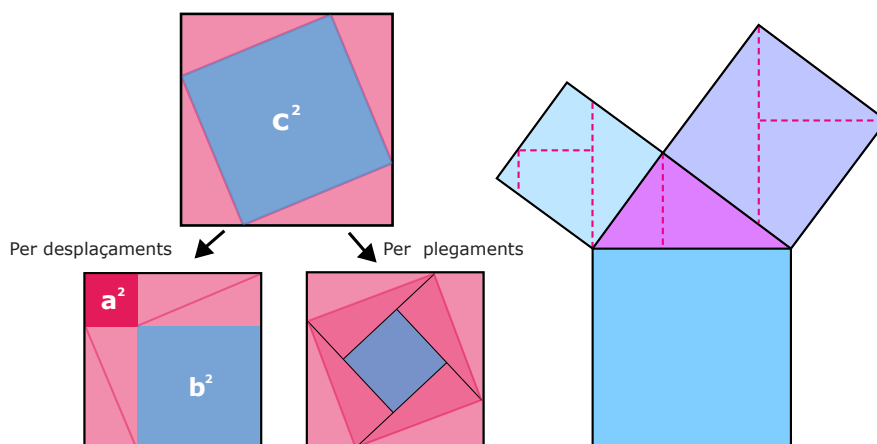
Els antics, savis d'Egipte o de Xina, coneixien ja molts dels resultats formulats amb nombres enters (com $3^2 + 4^2 = 5^2$). Els grecs van ser els primers que van intentar demostrar aquests resultats de manera general. Així **Pitàgoras** (segle VI a. de C.) va donar el seu nom al teorema sobre « El quadrat de la hipotenusa... » del qual **Euclides** (segle III a. de C.) va donar la prova més antiga que es coneix.

Existeixen prop de 400 demostracions diferents! Aquestes proves han portat a nous problemes i a nous resultats com el caràcter no racional de la diagonal dels quadrats de longitud entera.



El teorema de Pitàgoras

Desplaçant les peces da cada trencaclosques, feu aparèixer una demostració del teorema de Pitàgoras.



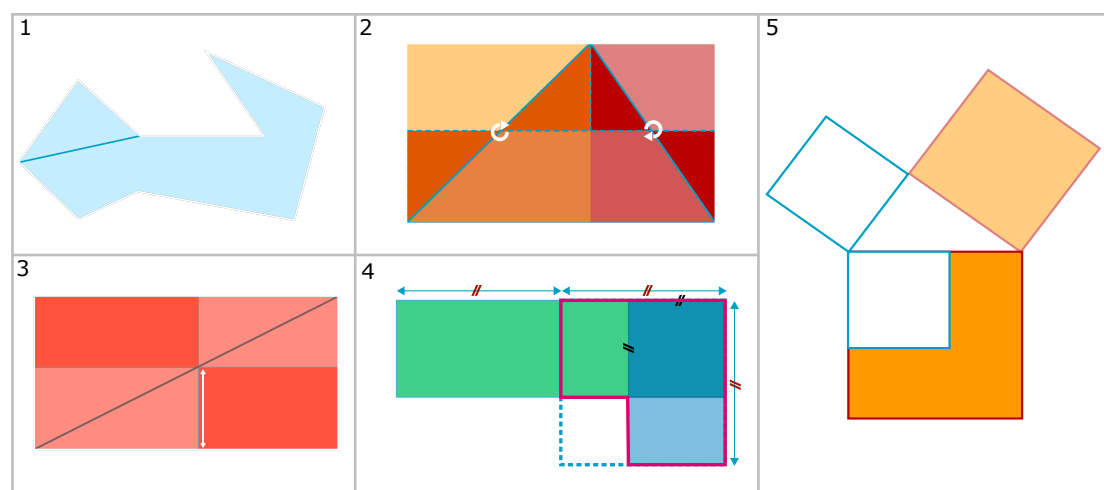
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper, llapis, tisores

D'un polígon al quadrat de la mateixa àrea

Retallant, recupereu les demostracions del teorema d'Euclides:

- 1. Tot polígon es pot descompondre en una suma de triangles.
- 2. Tot triangle es pot descompondre per reconstruir un rectangle de la mateixa àrea.
- 3. Tot rectangle pot ser retallat en un altre rectangle de la mateixa àrea amb l'amplada fixada.
- 4. Tot rectangle es pot considerar com la diferència de 2 quadrats.
- 5. Gràcies al teorema de Pitàgoras, es pot construir un quadrat igual a la diferència de 2 quadrats!



Conclusió

Tot polígon es pot reatallar per reconstruir-se en un quadrat de la mateixa àrea. A partir dels grecs, el càlcul d'àrees es redueix a comparar la superfície amb la d'un quadrat. Es diu que la superfície és **quadrable**. Noteu que es mesura en «**cm², m², km²...**».



Feu-ho vosaltres mateixos

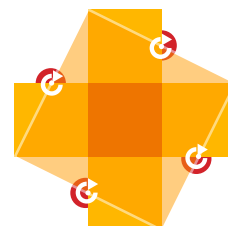
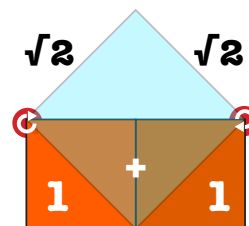
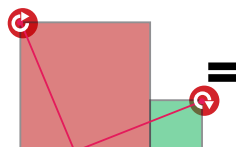
MATERIAL: Paper, llapis, tisores

Dupliqueu, tripliqueu...

Construiu, retallant, un quadrat:

- igual a la suma de dos quadrats,
- igual a dues vegades un quadrat donat,
- igual a tres vegades, 5 vegades... un quadrat donat.

Utilitzeu el mínim de retalls possibles.



Què recordar

Els Xinesos consideraven els problemes matemàtics, aritmètics i geomètrics, com trencaclosques.

Pels **Grecs**, els problemes de quadratura o de duplicació els van conduir a problemes cèlebres:

- la irracionalitat de la diagonal d'un quadrat de costat 1,
- la duplicació del cub,
- la quadratura del cercle.

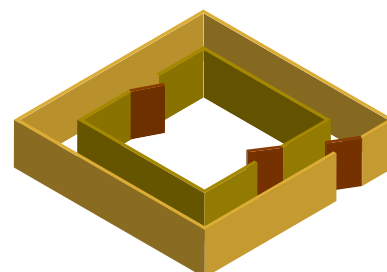
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper, llapis

El sofà

- Quines són les dimensions màximes d'un sofà que s'ha de transportar per un passadís d'un metre d'amplada i girant en angle recte?
- Pot entrar en l'habitació central?
- I si es tractés simplement d'una post (o una escala)?

Nota: les portes fan 80 x 210 cm!



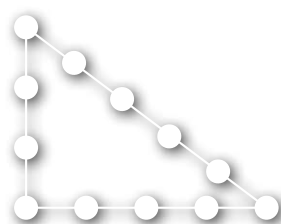
Aplicacions de les matemàtiques

La recerca de proves, de demostracions que utilitzen resultats matemàtics ja coneguts està en la base de l'activitat d'un matemàtic i de fet en la seva originalitat.

El teorema de Pitàgoras té la seva utilitat pràctica en la construcció de longituds irracionals com $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... però encara avui dia també l'usen els paletes, arquitectes, i els transportistes d'objectes grans!

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Pitàgoras – Euclides – Hipotenusa – Nombre irracional – Duplicació – Quadratura





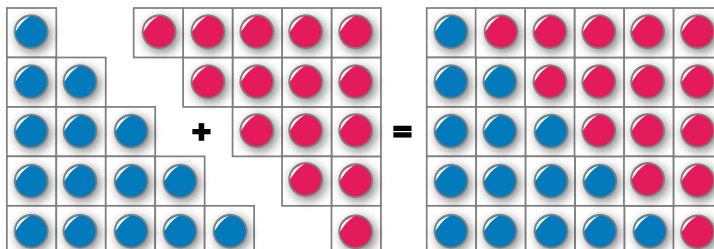
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Fitxes rodones o quadrades

Els nombres triangulars: 1, 3, 6, 10, 15...

Són la suma dels primers nombres enters.

Dos mètodes per trobar aquests nombres T:



$$\begin{aligned}
 &0: \quad 01 + 02 + 03 + 04 + 05 + 06 + 07 + 08 + 09 + 10 + 11 + 12 \\
 &\quad + 12 + 11 + 10 + 09 + 08 + 07 + 06 + 05 + 04 + 03 + 02 + 01 \\
 &= \quad 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 \\
 &= 12 \times 13 \\
 &\quad \text{d'on } T = \frac{12 \times 13}{2}
 \end{aligned}$$

i proveu, més generalment, que: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$

Què recordar?

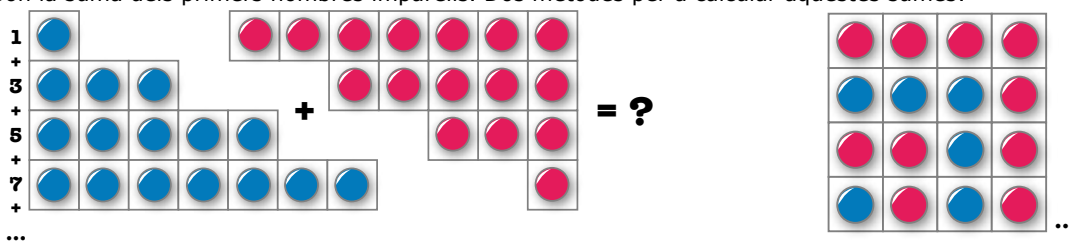
De les primeres proves simples, comprensibles per a un alumne de primària i realitzades amb figures geomètriques, hem passat avui dia a proves que ocupen centenars de pàgines, que necessiten l'ús d'ordinadors i que només són verificables per un petit nombre d'especialistes.

Aquestes successions de nombres, representades per punts van ser estudiades per **Pitàgores**, **Diofant** i també per **Pascal**.

En dimensió 3, es troben també els nombres piramidals, cúbics...

Els nombres quadrats: 1, 4, 9, 16...

Són la suma dels primers nombres imparells. Dos mètodes per a calcular aquestes sumes:

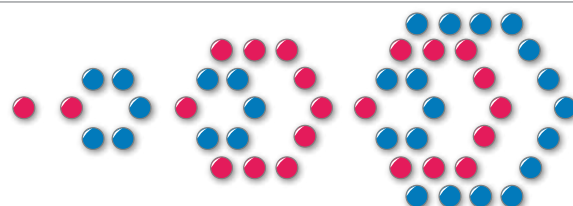


I proveu, més generalment, que: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$

Verifiqueu amb els primers nombres enters que cadascun s'escriu com a suma de com a molt 4 nombres quadrats.

Els nombres pentagonals, hexagonals...

Són les sumes dels primers nombres representats en un pentàgon, un hexàgon... Trobeu-los i deduiu una fórmula general.



Verifiqueu amb els primers nombres enters que cadascun s'escriu com a suma de com a molt 5 nombres pentagonals, 6 nombres hexagonals...

Nombres i Figures



Feu-ho vosaltres mateixos

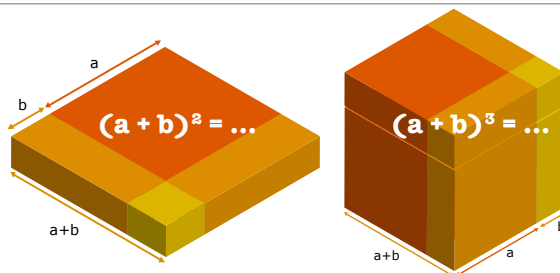
MATERIAL: Blocs de fusta o peces de cartró

Àlgebra i Geometria

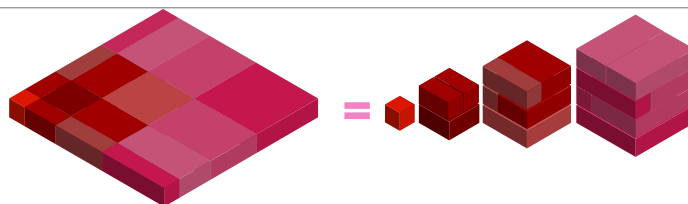
Amb aquestes peces, recupereu les fórmules:

I recupereu també les fórmules:

$$(a - b)^2 = \dots \quad a^2 - b^2 = \dots$$

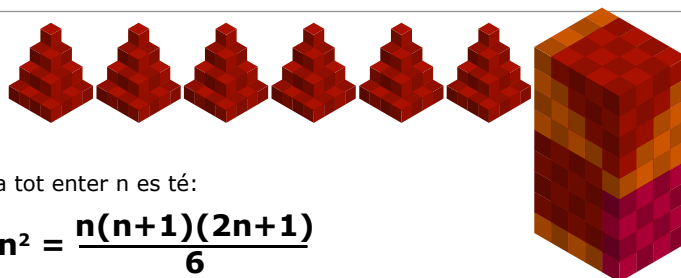


Amb aquestes peces, recupereu les fórmules:



$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots$$

Amb 6 blocs d'aquest tipus, construïu una torre compacta.



I proveu més generalment, que per a tot enter n es té:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper, llapis



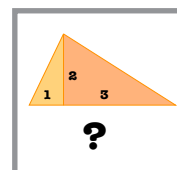
De conjectures a proves

Els triangles de Pitàgores

Trobeu els primers triangles rectangles amb les longituds dels costats nombres enters de manera que dos d'ells són consecutius (com 3 - 4 - 5). Intenteu deduir tots els triplets que verifiquen aquesta propietat.

Els quadrats de Fermat

Trobeu els primers nombres primers que s'escriuen com a suma dels quadrats de dos nombres enters (com $5 = 1^2 + 2^2$). Intenteu deduir tots els nombres primers que es poden escriure així.



Aplicacions de les matemàtiques

La primera activitat d'un científic i un matemàtic és trobar i formular un « bon » problema.

Què és un bon problema?

Com va dir **David Hilbert** durant el congrés mundial de matemàtiques a París el 1900 un problema que pugui entendre qualsevol alumne de primària!

Però també és un problema que encara que no sigui resolt faci avançar els coneixements. Això ha passat amb l'última conjectura de **Fermat** que ha donat lloc a nombrosos resultats abans de ser demostrada per **Andrew Wiles** el 1994, 350 anys més tard.

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Nombres figuratius – Successions d'enters – Conjectura

Es veritat?



Feu-ho vosaltres mateixos

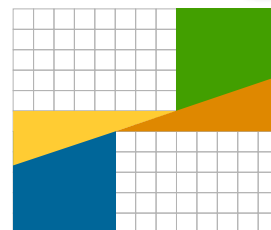
MATERIAL: 2 trencaclosques de 4 peces

115

$$63 = 64 = 65$$

Amb aquestes 4 peces de trencaclosques, fabriqueu un quadrat i després un rectangle.

- Quina àrea té cadascun?
- I l'àrea de la superfície inicial?



Qüestió: Per què intervenen els nombres de la successió de **Fibonacci**?

Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: 1 model a reconstruir

116

Il·lusió o Realitat?

Existeixen aquests objectes? Podeu construir-los? La resposta es troba en una frase de l'humorista francès Pierre Dac: « *Tot depèn del punt de vista en què es miri!* »



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper, llapis

De Pitàgores a Wiles

• Verifiqueu que: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$ $7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$

- Trobeu altres cubs que es puguin descompondre en tres cubs.

Què recordar?

Es sabia, molt abans de **Pitàgores**, que existeixen nombres enters que verifiquen:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Trobeu-ne d'altres diferents de (0,0,0) i de (3,4,5).

Pierre de Fermat va enunciar el 1641 la **conjectura** de que un cub de costat enter no es pot descompondre en dos cubs de costats enters i, més generalment, que per a $n \geq 3$, l'equació:

$$x^n + y^n = z^n$$

no té solucions enteres tret de les solucions amb 0 o 1.

Abans de ser provada 350 anys més tard per **Andrew Wiles**, va ser objecte de noves conjectures: era veritat? indemostrable? indecidible?

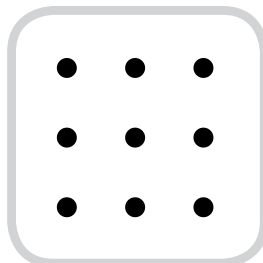
És veritat?



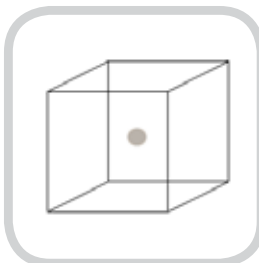
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Paper, llapis, 6 llumins

Canvieu el punt de vista



• Uniu aquests 9 punts per 4 segments sense aixecar el llapis del paper.



• En aquest cub de cares transparents s'ha fet un forat. En quina(es) cara(es) pot estar?



• Feu un triangle amb 3 llumins, 2 triangles amb 5 llumins... 4 triangles amb 6 llumins!



• Seguiu la successió...

Què recordar?

Utilitzades en tests psicològics, aquestes qüestions mostren que en matemàtiques, com en la vida, s'ha de saber ser "flexible" i abordar els problemes des de tots els angles.

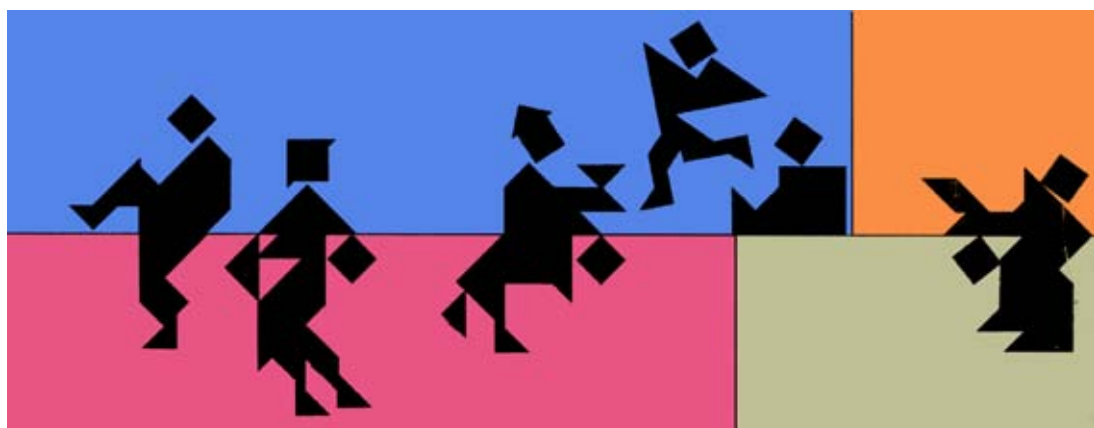
Aplicacions de les matemàtiques

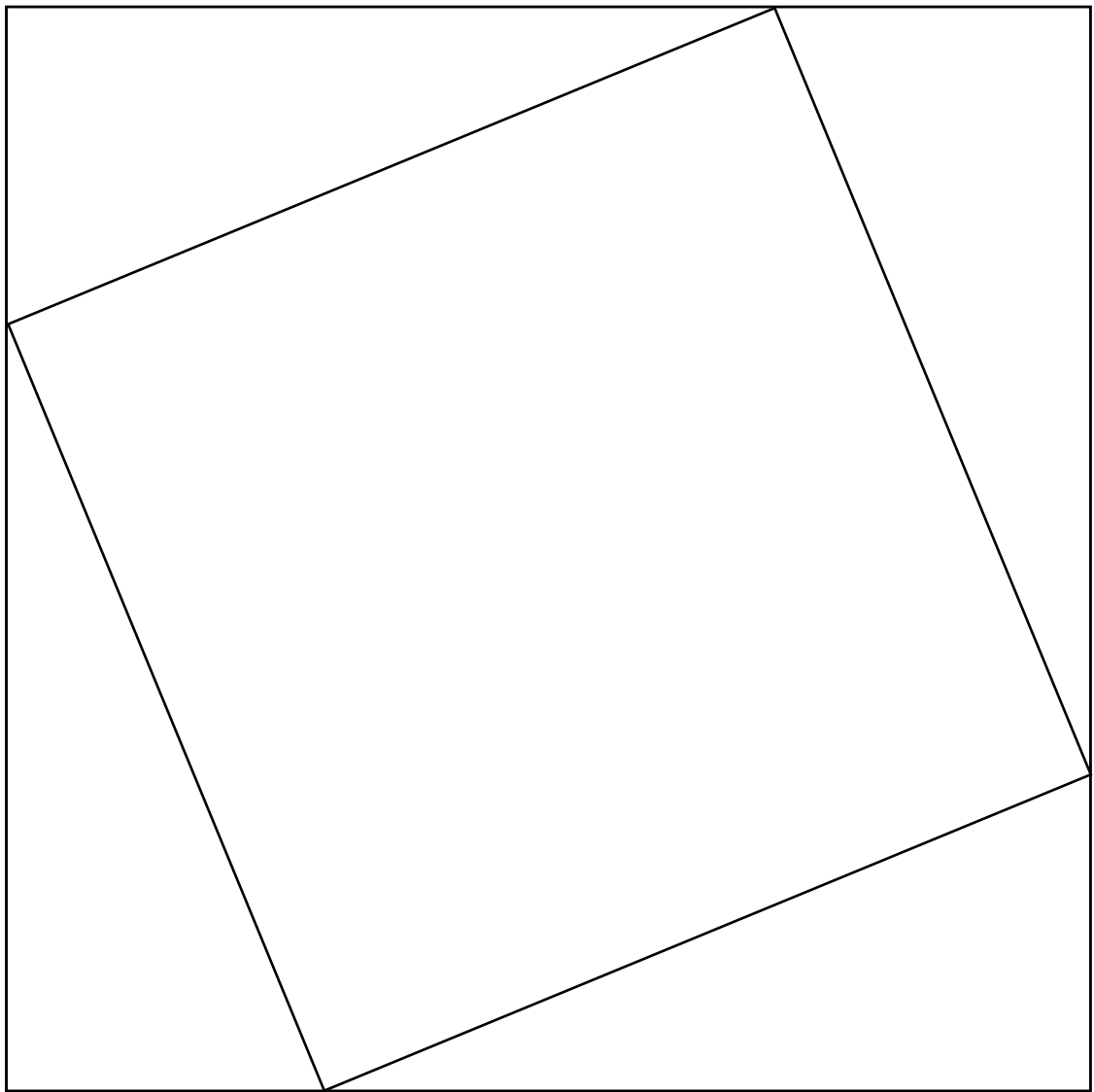
Podem demostrar sempre alguna cosa que sabem que és veritat?

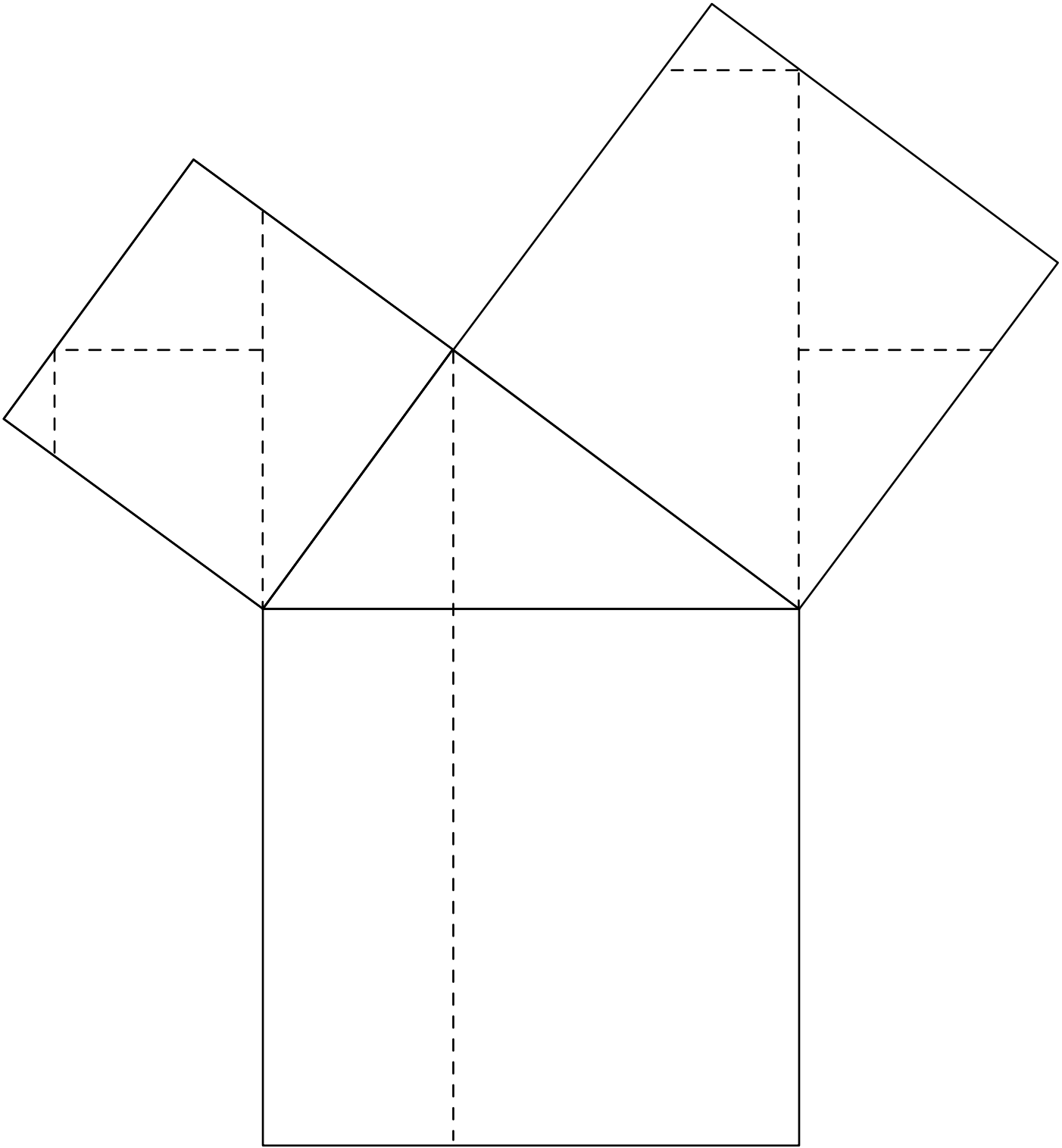
En 1931, **Kurt Gödel** va respondre negativament a aquesta pregunta amb el famós teorema «d'incompletesa». Va provar que les dues nocions de veritat i de demostrabilitat no són coincidents demostrant – en un exemple aritmètic – que una conjectura pot ser veritat però també indemostrable. Des de llavors, tant en matemàtiques com en informàtica, els problemes considerats fins avui dia irresolubles són objecte d'investigacions constants.

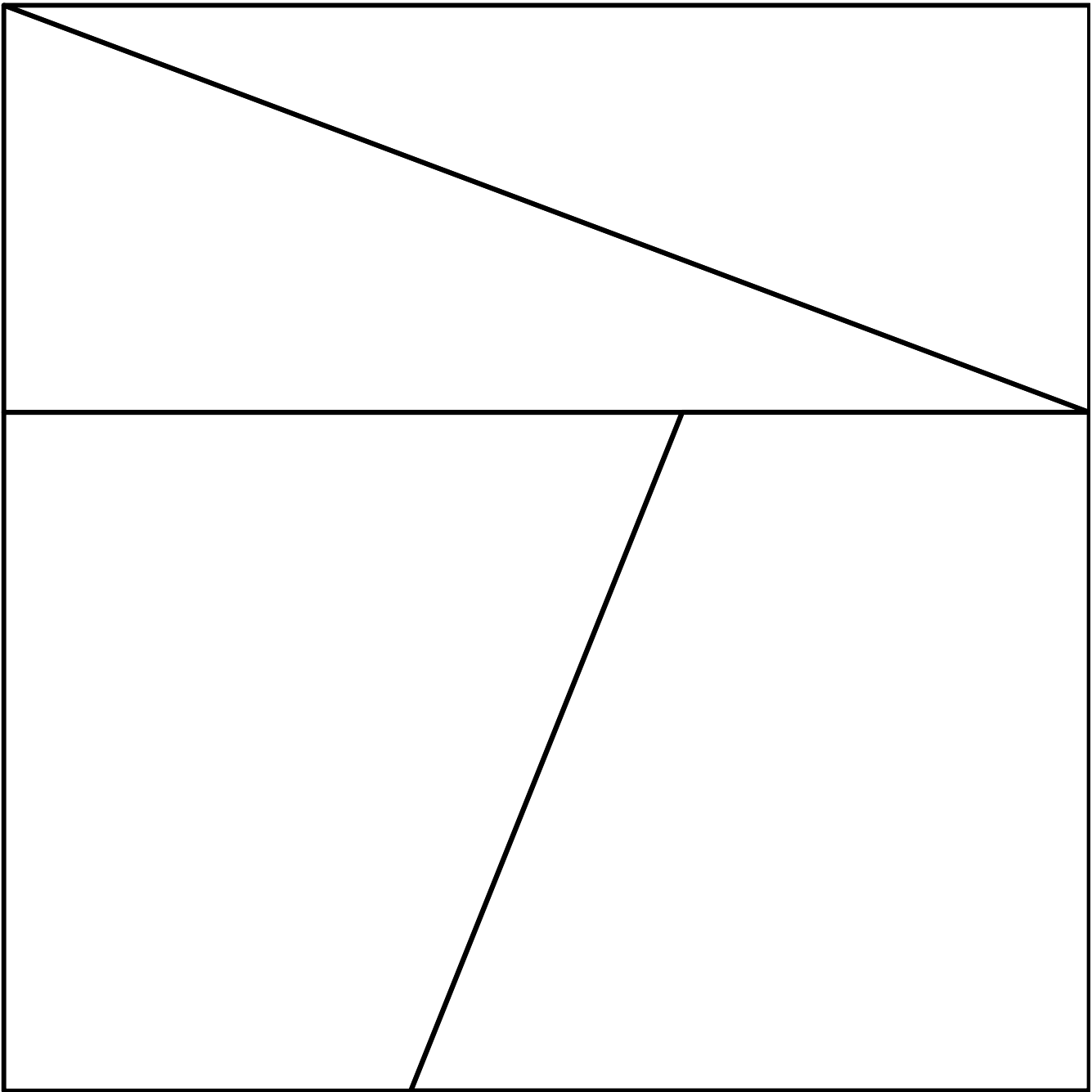
PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Indecidable – Calculable – Gödel – Problemes P-NP



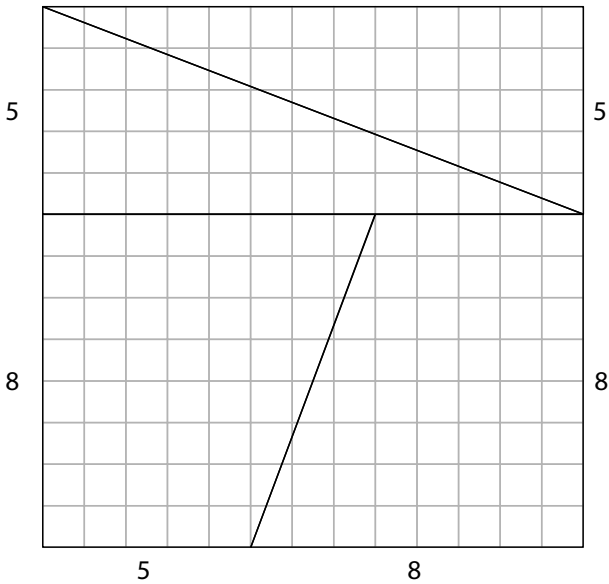
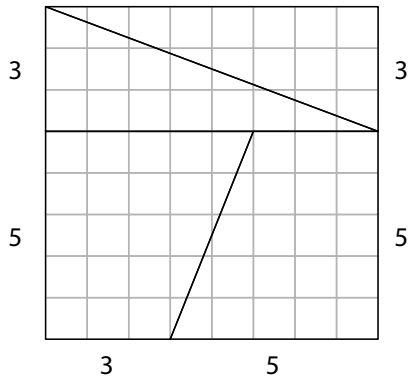


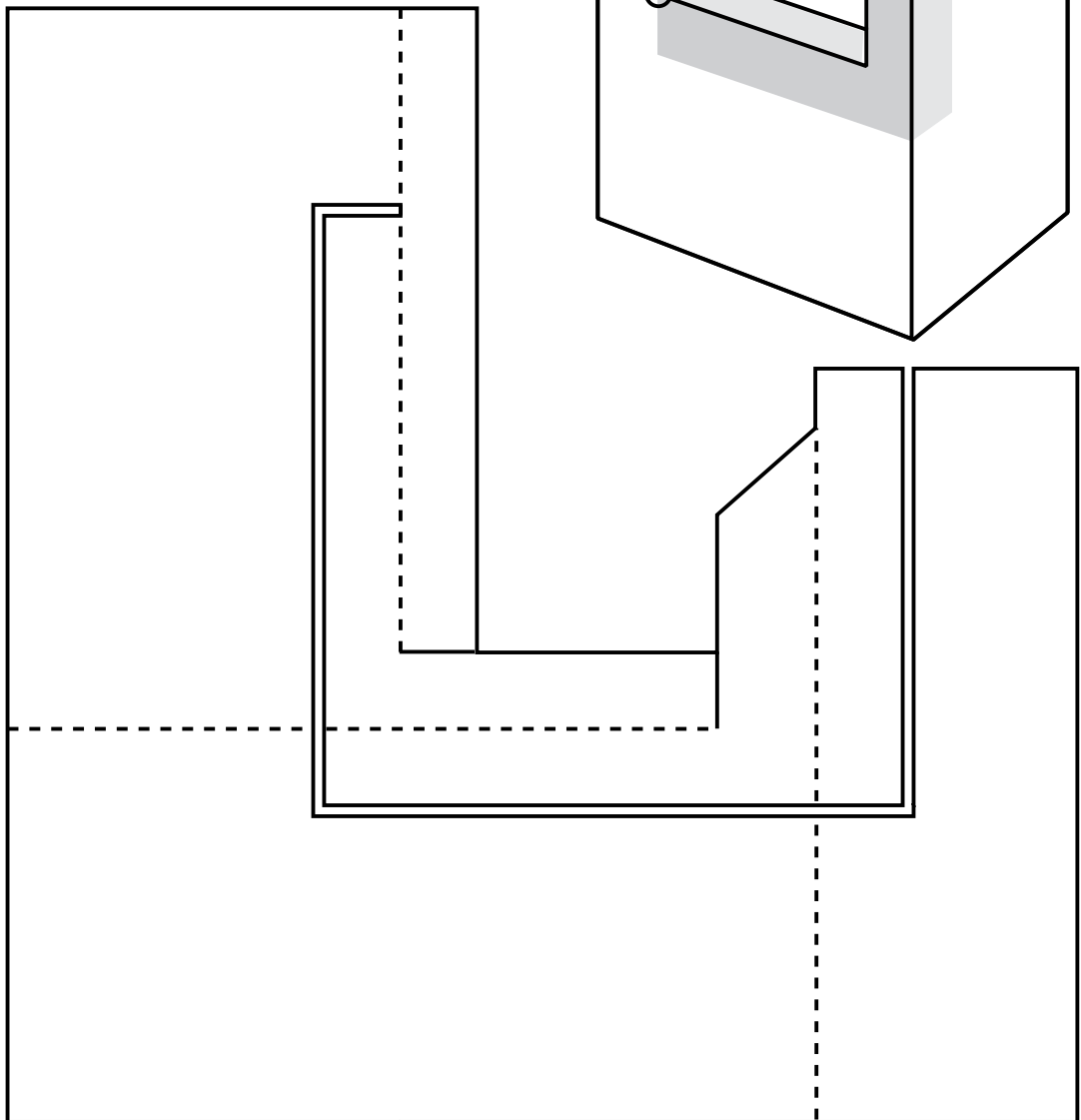
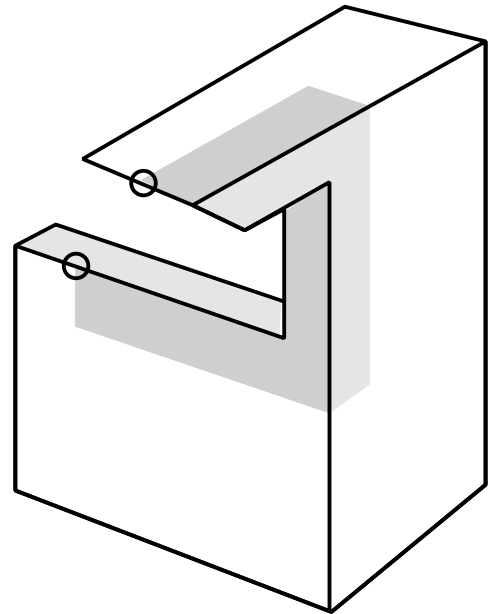


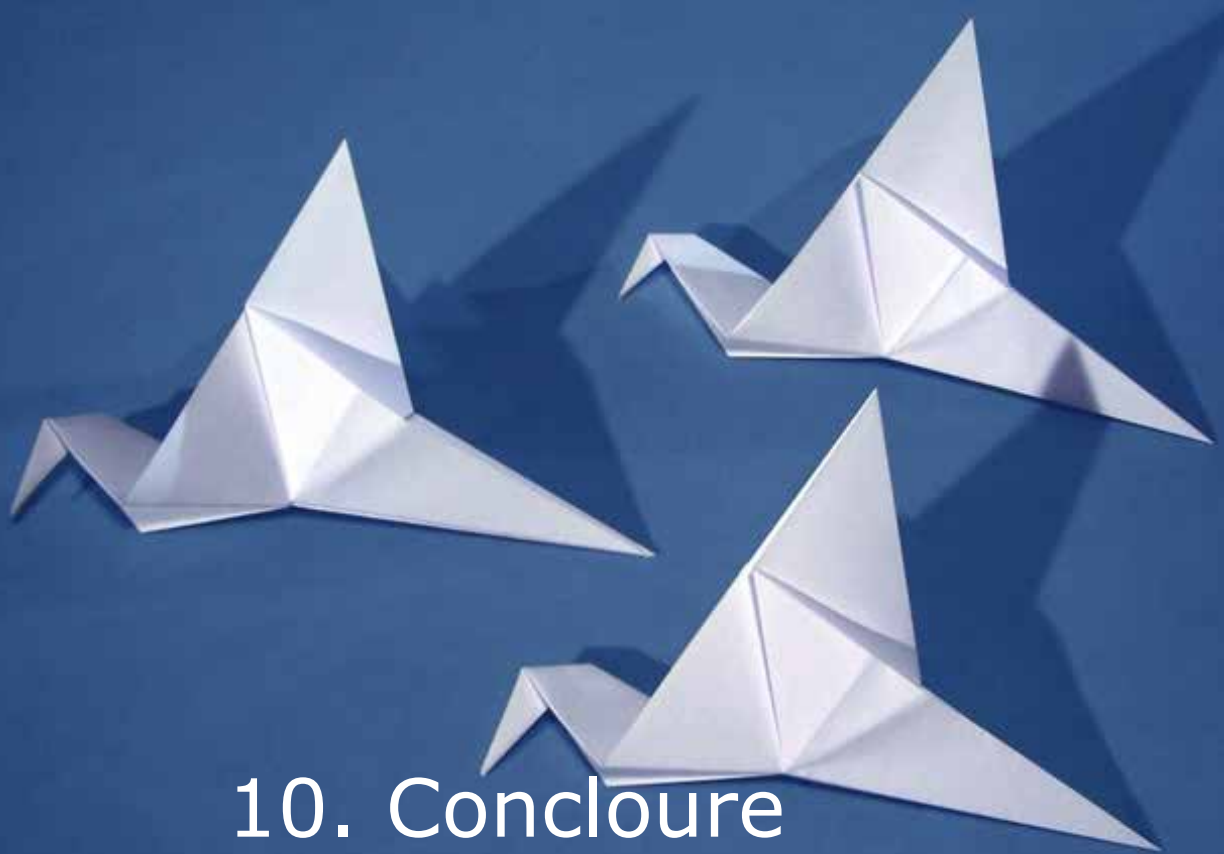


8

13







10. Concloure



Experimenteu



Formuleu hipòtesis



Demostreu!





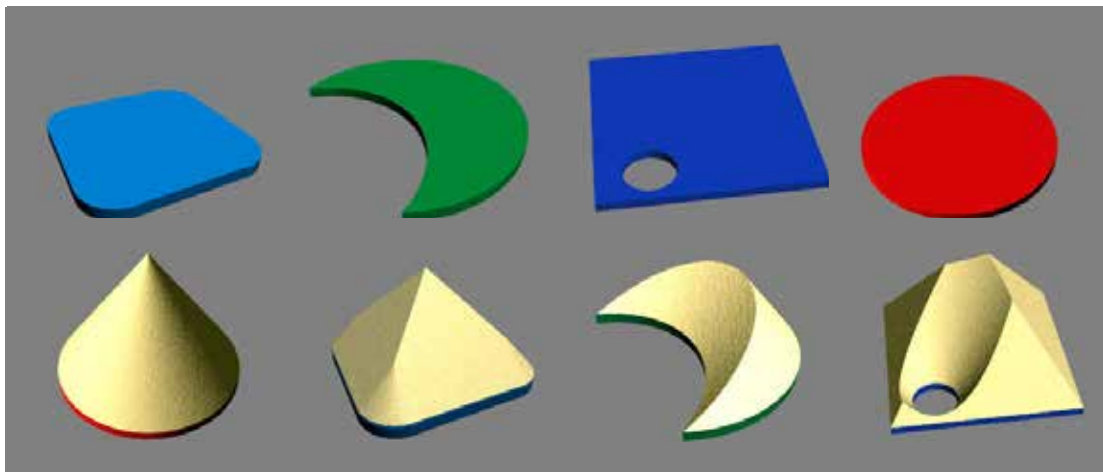
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Polígons de cartró, 1 cubell de sorra seca i fina

La geometria d'una pila de sorra

Escolliu una placa. Vesseu-hi sorra al damunt fins que es desbordi.

- Quan s'obté una piràmide? Un con?
- On es situa el vèrtex?
- En els altres casos, quina és la forma de les cares?
- Com es situen les arestes? Les arestes superiors?
- Què passa quan les plaques tenen un forat?



www.tasdesable.com

Què recordar?

Al llarg d'aquest dossier hem proposat una sèrie de situacions on vosaltres, i sobretot els vostres alumnes, sou convidats a experimentar. Aquestes situacions han estat extretes de treballs de matemàtics, de físics, de docents de matemàtiques, de pedagogs i de didàctics, als quals se'ls dona les gràcies des d'aquí.

Han estat extretes també d'experiències proposades en l'exposició «**Per què les matemàtiques?**» (en anglès «**Experiencing Mathematics!**»).

Totes es poden realitzar amb material molt simple. Moltes poden ampliar-se utilitzant l'ordinador.

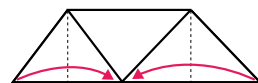
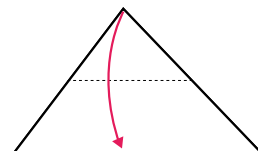
Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Fulls de paper A4, **dissenys de plects**

121 122 123

Matemàtiques & Plects

- Quines són les dimensions d'un full de paper? I la seva massa?
- Plegueu el full en dos. Quines són les noves dimensions?
- Comproveu que són proporcionals a les precedents.
- Verifiqueu que $L_4/L_4 = L_5/L_5 = \dots = \sqrt{2}$
- És veritat per a tot full de paper?
- Per què es diu que és un paper de 80g (o 120, 150,... 250g)?
- Amb aquests fulls, com es pot aconseguir un quadrat amb plects?
- un triangle equilàter...?
- Són els més grans?



La suma dels angles d'un triangle és 180° .

- Verifiqueu que les bisectrius d'un triangle es creuen en un mateix punt.
- Feu el mateix amb les altures, les mediatrises...
- Com es pot fer un pentàgon regular, un hexàgon?



Aplicacions de les matemàtiques

El mètode experimental és un dels mètodes usats pels científics. També pot ser el del matemàtic que, havent-se proposat una -bona- pregunta, busqui donar-li respostes. En certs dominis científics, en astronomia, en física de partícules, en biologia, per exemple, pot ser impossible realitzar aquest mètode per raons pràctiques, ètiques...

L'enfoc del docent de matemàtiques: aprendre a proposar situacions experimentals on cada alumne s'apropriï d'una qüestió i intenti donar-hi respostes.

L'enfoc de l'alumne de matemàtiques: aprendre a formular hipòtesis, a testejar i provar si són veritat... o falses.

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Mètode experimental – Mètodes científics

Formuleu hipòtesis



Què recordar?

Petites qüestions, grans problemes

Les matemàtiques sempre han ofert enunciats de problemes divertits i sorprenents. Entre tots aquests problemes recreatius, alguns proposen bones qüestions, és a dir, qüestions tals que la recerca de les respostes i fins i tot les pròpies respostes permeten treure a la llum un fet matemàtic o científic, o un mètode de raonament important.

Una bona qüestió pot ser una qüestió que permeti posar al descobert els **mètodes implícits** dels alumnes i fer comprendre el seu aspecte no operacional.

És el que aquestes qüestions proposen aquí: conservació de les quantitats per a l'aigua i el vi, topologia per a la banda, modelització per al cafè, mostreig per a l'arròs, lògica per als pals...



Aigua dins del vi!

Dues copes contenen el mateix volum, una d'aigua i l'altre de vi (o de cafè...).

Agafeu una cullerada d'aigua, buideu-la dins el vi i barregeu.

Agafeu una cullerada de la barreja, buideu-la dins l'aigua.

- Hi ha més aigua en el vi que vi dins l'aigua?
- Com demostrar la vostra hipòtesi?



La banda de Möbius

Fabriqueu una polsera amb una tira de paper.

Amb dos cops de tisores en podeu fer tres.

Fabriqueu una banda de Möbius fent mitja volta a la tira de paper.

- Quants cops de tisora us calen per fer-ne tres?



Nusos primers

Fabriqueu tots aquests nusos.

- Quants encreuaments tenen com a mínim?
- Intenteu trobar els primers nusos amb 3, 4, ... encreuaments.



Un quilo de cafè?

1 kg de boles d'un cm de diàmetre.

1 kg de boles d'un mm.

- Quin ocupa un volum més petit?
- I si es substitueixen les boles per cafè en gra i cafè mòlt.



Un quilo d'arròs!

• Quants grans d'arròs hi ha en un quilo d'arròs?!

• Trobeu com a mínim 2 mètodes per donar una resposta.



Una hora!

2 pals (o 2 cordes), tot i que diferents, es cremen cadascun en una hora.

- Com mesurar 1/4 h? 1/2 h? 3/4 h?
- Trobeu com a mínim un mètode.

Aplicacions de les matemàtiques

Saber, és simplement prendre consciència de la pròpia ignorància?
(El Menon – Plató)

En matemàtiques, els alumnes, sobretot en secundària – però també després – mostren molt poca habilitat per **debatre** i convèncer amb arguments matemàtics i lògics.

Per això els cal aprendre a expressar els diferents punts de la seva argumentació, a explicar les relacions lògiques que condueixen a les seves conclusions.

Saber demostrar, és aprendre a debatre enunciant arguments matemàtics, científicament vertaders. Saber demostrar, també és saber el que és una prova, apropiar-se-la i reutilitzar-la.

PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

Debate – Mètode – Lògica – Aristòtil – Plató – Descartes

Demostreu!



Feu-ho vosaltres mateixos

MATERIAL: Cartró per retallar, "Flip books" per a muntar

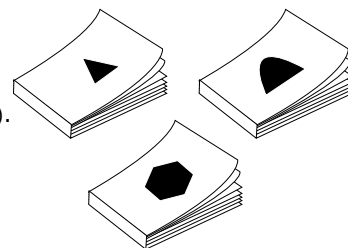
124 125 126

Flatland: un món pla

Qui sóc?

Amb cada família de dibuixos, realitzeu un llibre animat ("flip book"). Cada "flip book" mostra les traces deixades per un objecte que travessa una pantalla plana.

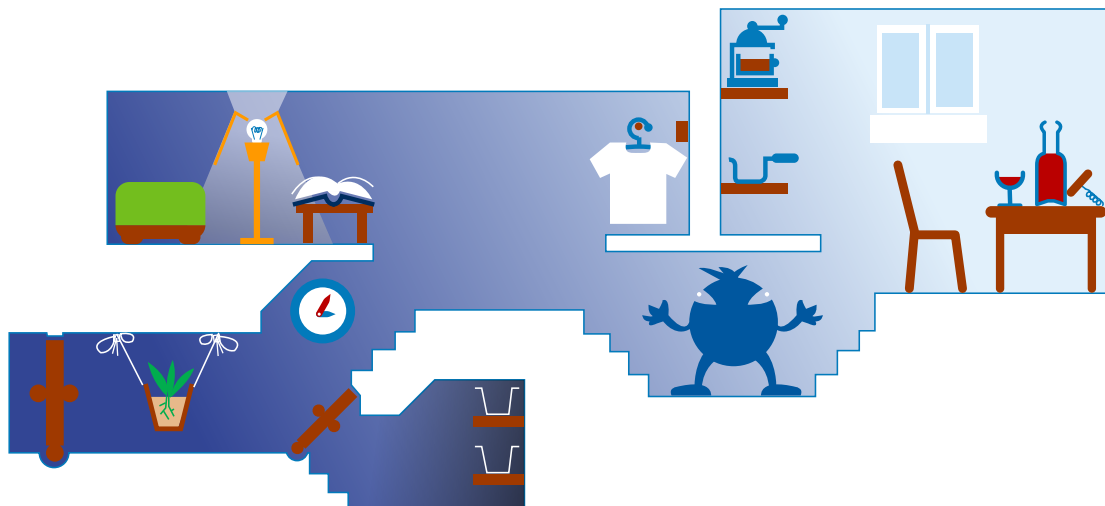
- Per a cada "flip book", quin és l'objecte?



Per anar més lluny La vida a Flatland

Aquest dibuix representa la casa d'un habitant d'un planeta imaginari que només té dues dimensions, on tot seria pla!

- Intenteu trobar els 7 errors.
- Imagineu altres objectes que podrien existir – o no existir – dins d'aquest país pla.



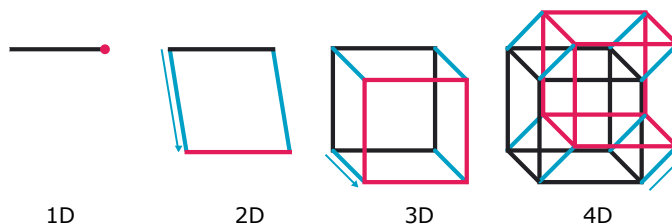
Què recordar?

Proposar als alumnes un mètode experimental en matemàtiques no consisteix únicament en fer manipular objectes geomètrics, nombres i lletres.

Aquestes experiències els han de permetre apropiarse de la situació (és la **fase d'experimentació**), expressar oralment o per escrit les hipòtesis (**fase de formulació**) i finalment validar aquestes hipòtesis (**fase de validació**). En aquesta aproximació experimental hi resta una última fase pel docent:

donar rellevància als coneixements matemàtics adquirits pels alumnes, els que fan referència als continguts o els corresponents a estratègies de raonament.

Cap a la quarta dimensió



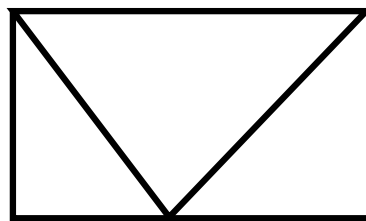
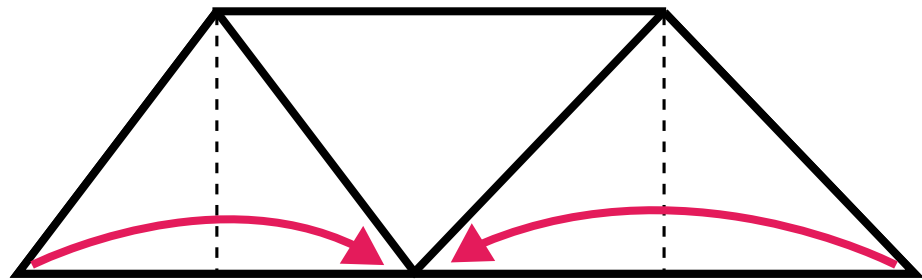
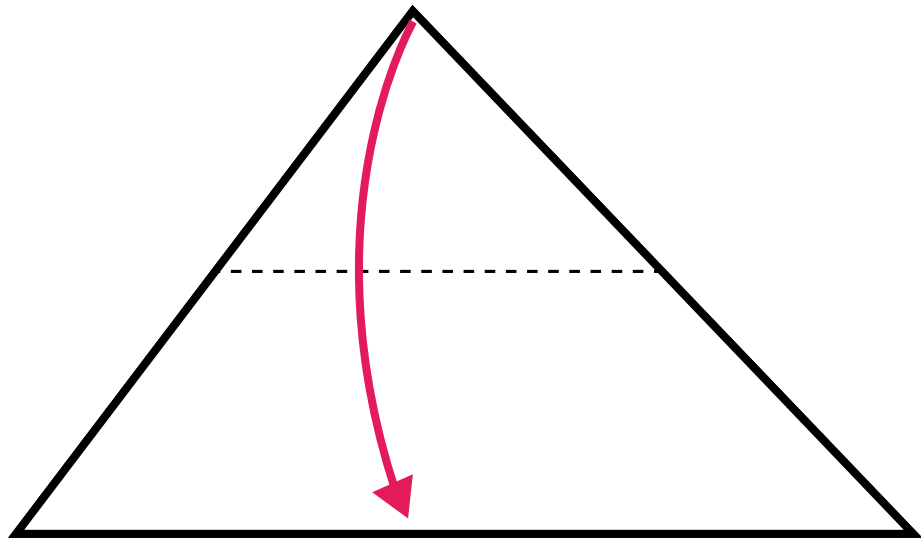
Aplicacions de les matemàtiques

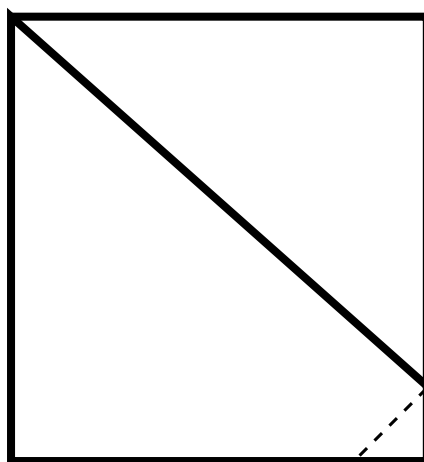
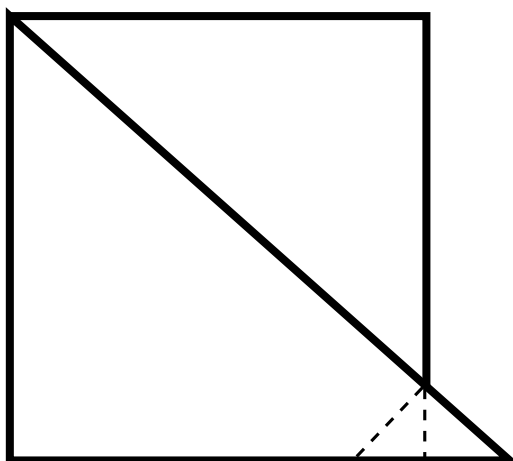
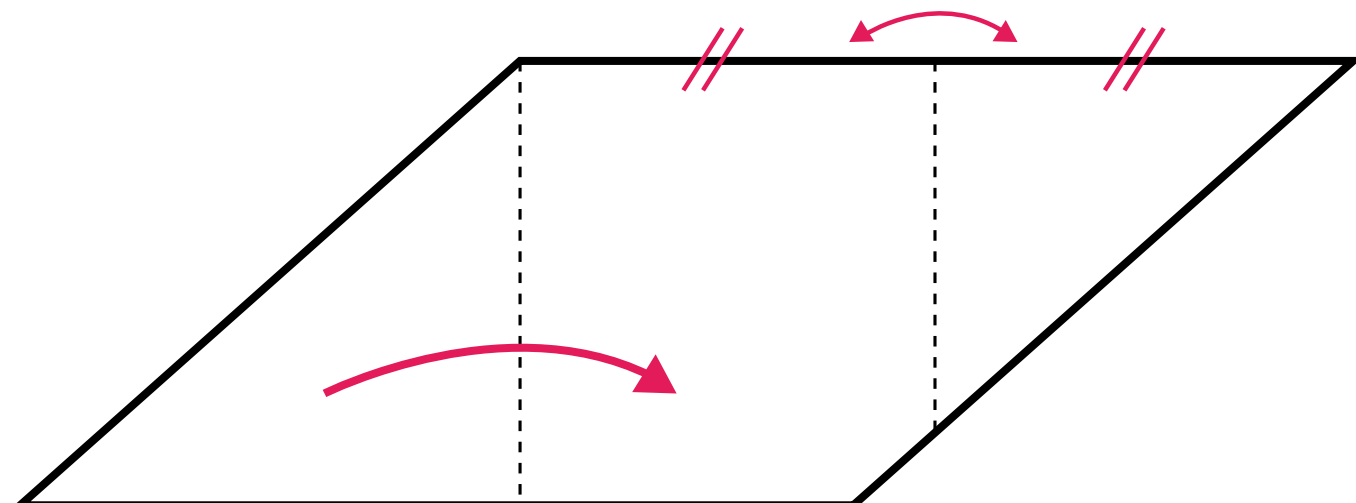
Com el matemàtic, el físic i tot científic, el docent matemàtic ha d'aprendre a demostrar i sobretot a ensenyar als alumnes a provar, a debatre i a proporcionar arguments basats en les eines matemàtiques: els fets matemàtics i la lògica matemàtica.

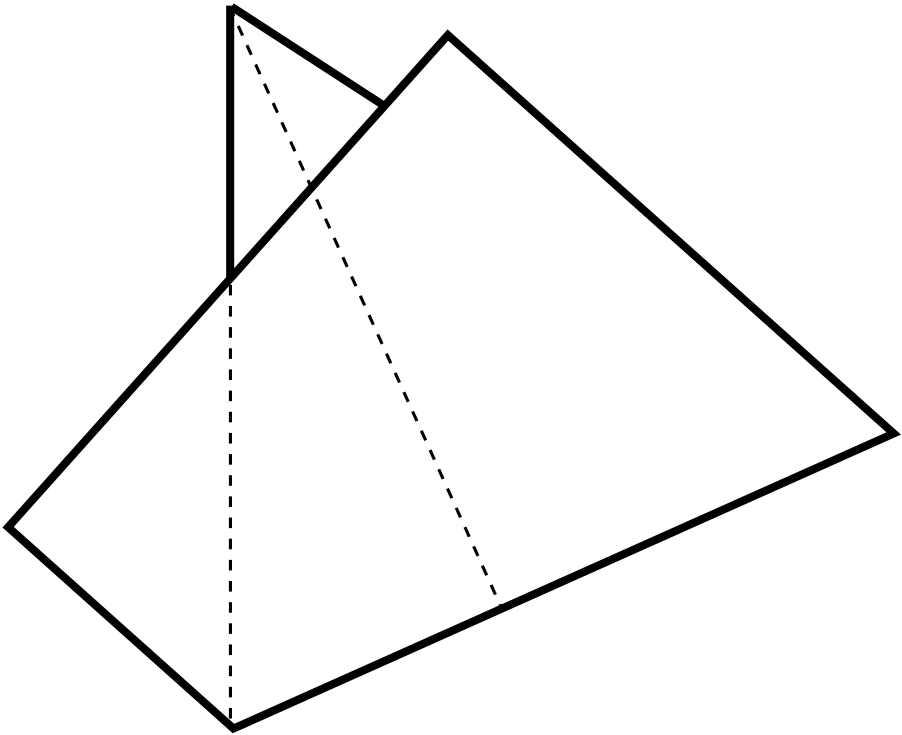
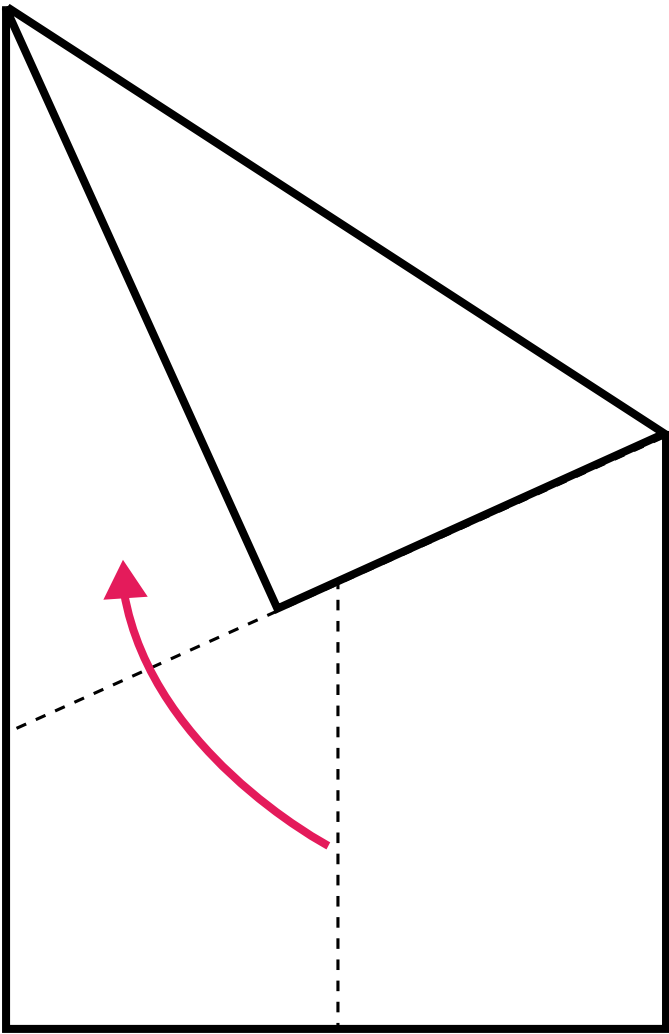
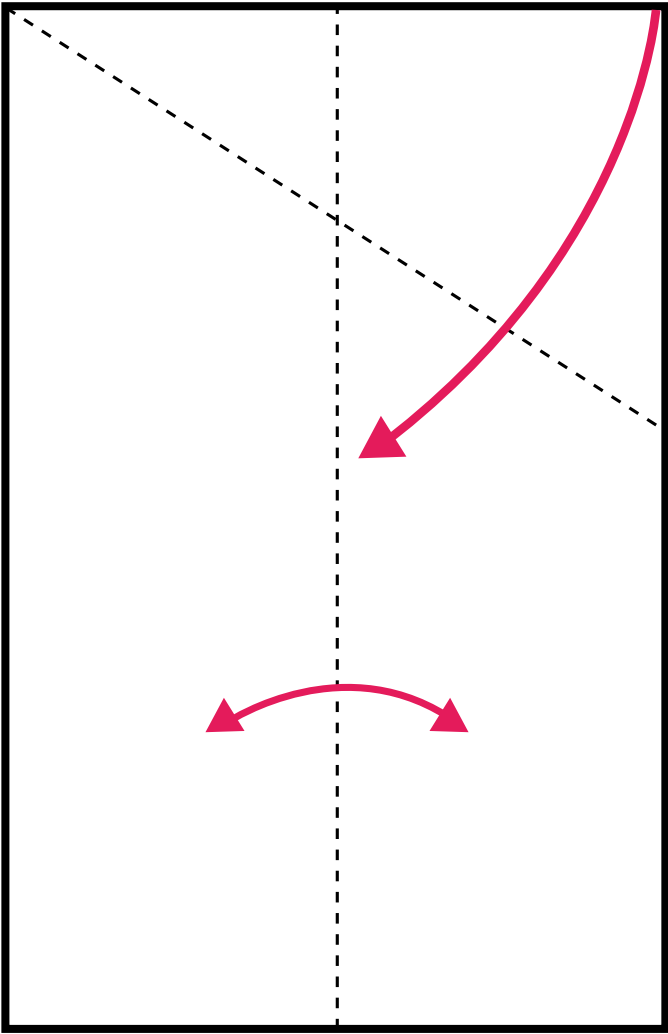
Aprendre a demostrar que una solució existeix o no existeix, que un enunciat és vertader o fals o – més difícil encara – que no és possible de demostrar, si més no amb els coneixements de l'alumne en el moment donat.

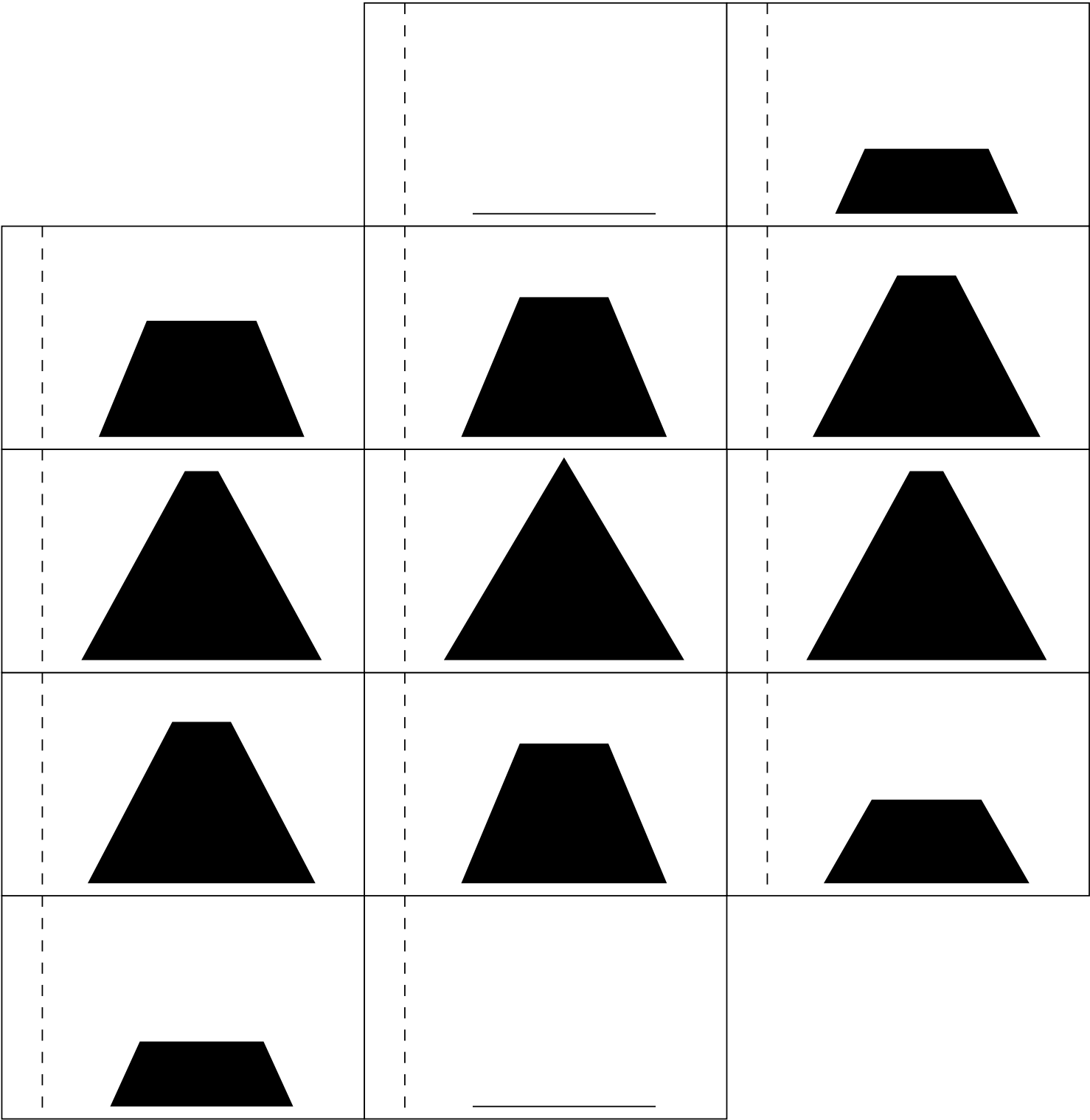
PARAULES CLAU PER A PÀGINES WEB:

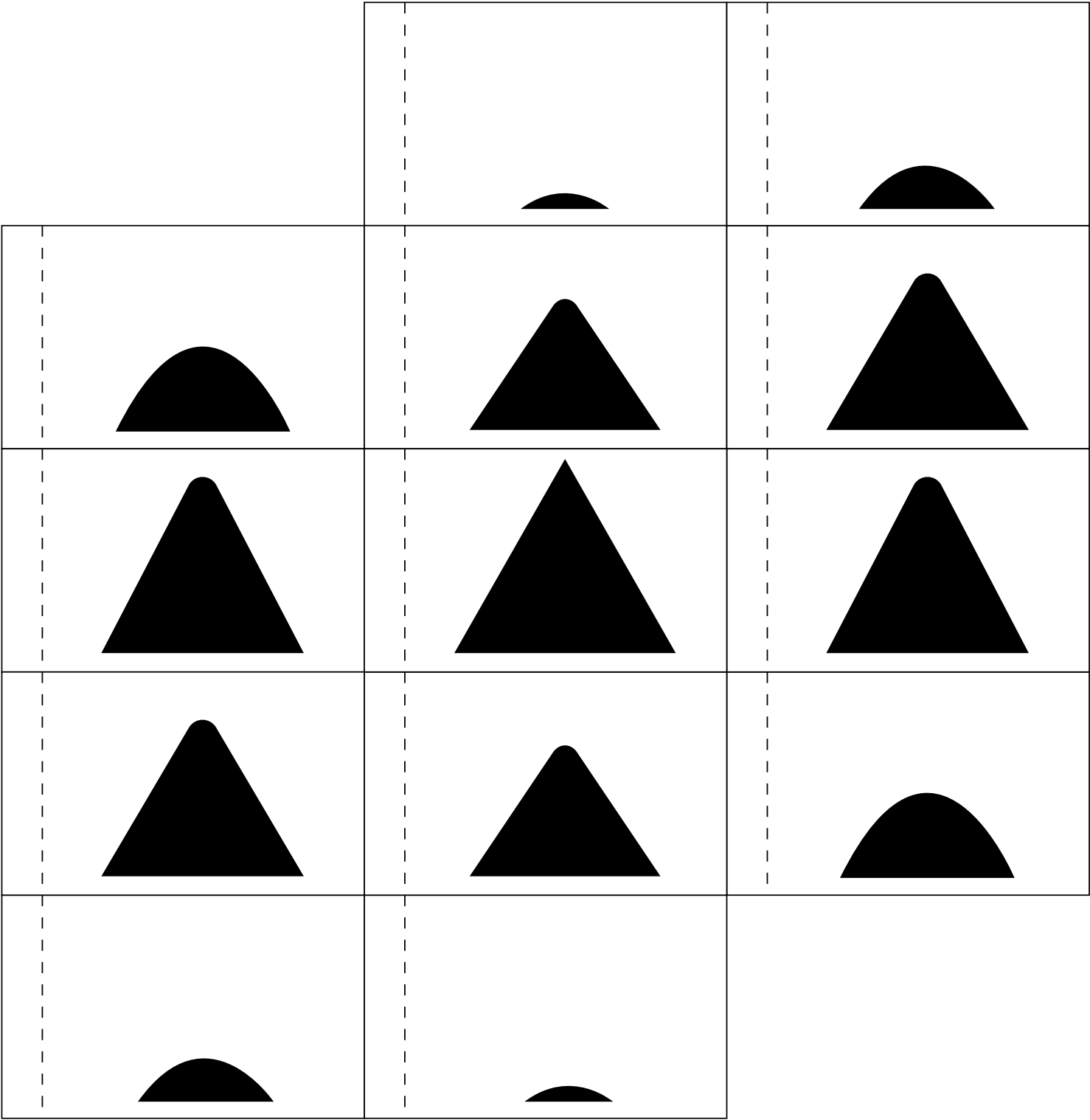
Matemàtiques – Professor de matemàtiques – Matemàtic

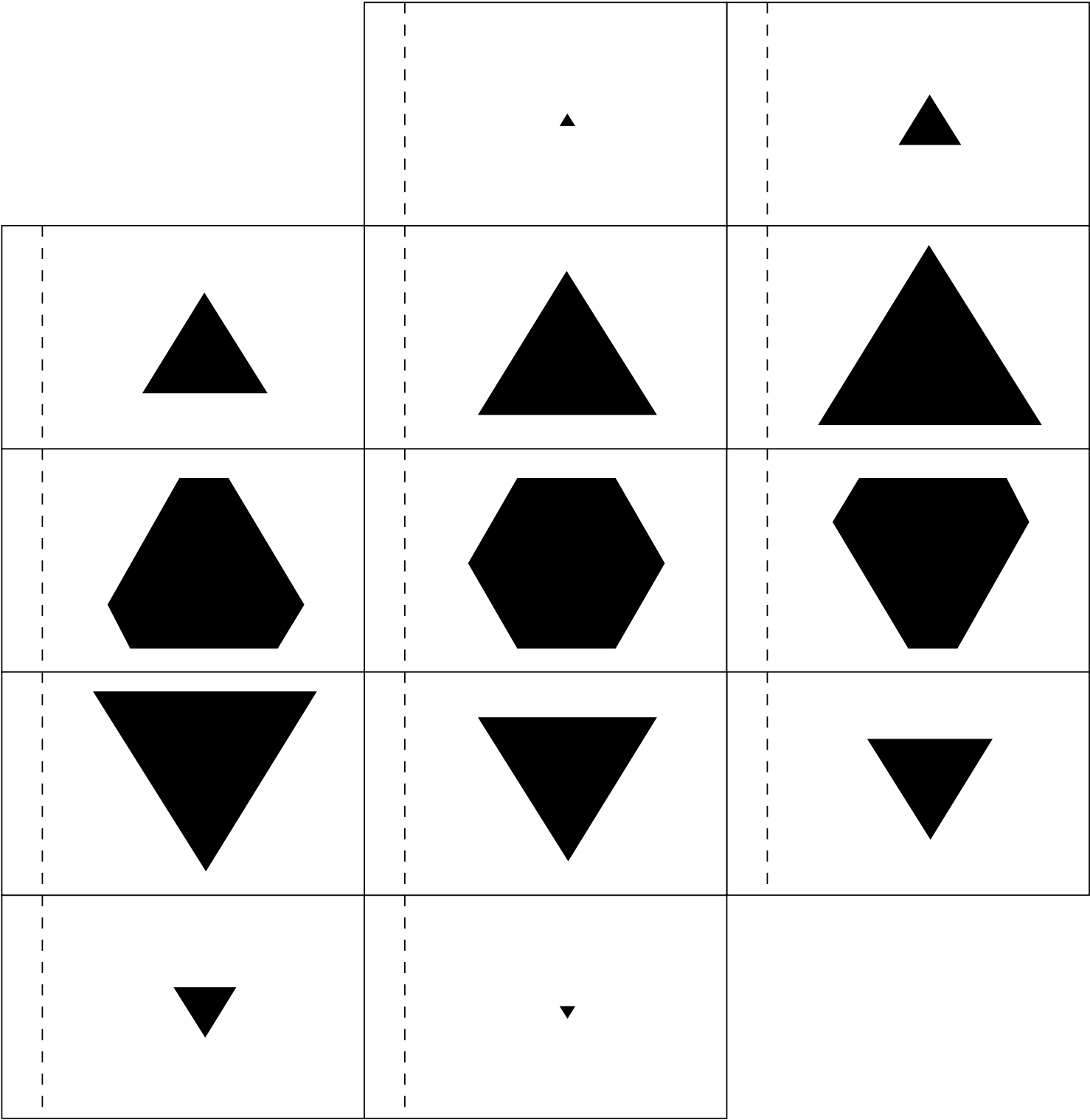














scitobes



Aquesta exposició virtual ha estat concebuda i realitzada a iniciativa d'Alexandros K. Makarigakis (Oficina de la UNESCO – Windhoeck - Namíbia), per Michel Darche, Centre•Sciences i Adecum.

S'ha enriquit amb les observacions, crítiques i contribucions de tots els que hi han participat directament:

Sophie Auger-Léger (Orleans), Jean Brette (París), Marie Laure Darche-Giorgi (Orleans), Bento Louro (Lisboa), Marta Macho-Stadler (Bilbao), Benoît Matrimon (Orleans), Boubaker-Khaled Sadallah (Alger), Antony Templier (Orleans) Però també dels treballs en didàctica i en divulgació científica Guy Brousseau (Bordeaux), Etienne Guyon (París), Claude Janvier (Montréal), Richard Pallascio (Montréal), Antonio Pérez Sans (Madrid), André Rouchier (Bordeaux), Gérard Vergnaud (París), als quals s'envia un sincer agraïment.

Ha estat concebuda a partir de la exposició interactiva

« **Per què les matemàtiques?** » **realitzada sota la direcció científica**

de: Minella Alarcon, responsable de ciències bàsiques a la UNESCO i Mireille Chaleyat-Maurel, vicepresidenta del comitè RPAMaths de l'EMS.

Amb la col·laboració de:

Jun Akiyama, Universidad de Tokai, Japó
Michèle Artigue, Presidenta de l'ICMI
Jean Brette, Palais de la Découverte, París
Michel Darche, Centre•Sciences, Orleans
Mari-Jo Ruiz, Ateneo de Manila University, Filipines
Gérard Tronel, Any mundial de les matemàtiques, París

Concepció i coordinació: Michel Darche – Adecum & Centre•Sciences

Programació i desenvolupament interactiu:

Antony Templier – www.sotodesign.org (Orleans)

Grafisme: Benoît Matrimon – www.tvwar.org (Orleans)

Traduccions: En: Sophie Auger-Léger (Orleans)

Sp: Marta Macho-Stadler – Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea - Bilbao

Pt: Bento Louro – Universidade Nova de Lisboa

Ar: Boubaker-Khaled Sadallah - Ecole Normale Supérieure - Kouba-Alger

Ct: A. Gasull i G. Guasp – Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

En català, versió realitzada per iniciativa i amb el suport de la Comissió nacional andorrana per a la UNESCO (CNAU - www.unesco.ad), el Centre de Recerca Matemàtica i la Universitat Autònoma de Barcelona, als quals s'envia un sincer agraïment.

© Crèdits fotogràfics & il·lustracions:

• centre sciences • adecum • 99.9 sarcone • wikipedia • Dbenbenn GNU • nasa • antony templier • benoit matrimon • **Fotolia.com** : • Remo Liechti • Sandra Carmona • Federico Romano • goce risteski • Julien Eichinger • Udo Kroener • Isabelle Barthe • arnowssr • photo-dave • Denis Pepin • Eric Isselée • VisualField • philippe Devanne • Creativeeye99 • Roman Sakhno • Vieloryb • Rich Johnson • Andrzej Toknaski • Marko Plevnjak • Alexey Klementiev • Olga Shelego • Allein • Christophe Villedieu • Jose Gil • FranckBoston • choucashoot • Marvin Gerste • Tjall • Guillermo lobo • Elena Elisseeva • Forgiss • Francois Doisnel • Mariano Ruiz • Zoran Karapancev • LVI • claudio • Tad Denson • Alx • tdoes • piccaya • Monika Lassaud • Paco Ayala • Emilia Kun • Peterfactors • thierry burot • martine wagner • Philip Lange • Sascha Burkard • Terry Morris • Detlef Gwinner • Kenneth Groms • Paul Bodea • Guy Pracros • Eric Gevaert • Emin Ozkan • imagine • Khayel • Michael Drager • Gabriel Moisa • Tatiana • sébastieá lagrée • Caroline Duhamel • sam richter • Pawel Bielecki • Alexandre Quillet • Stanisa Martinovic • Yurok Aleksandrovich • Martina Misar • Steven Pepple • Edouard Hardy • Danielle Bonardelle • Mauro Rodrigues • sébastien russier • Orlando Florin Rosu • Francois Doisnel • Leonid Karchevsky • Rob Byron • Natalia Pavlova • mrkeenano • danimages • Gérard.Kremmer • Petr Gnuskin • Udo Kroener • trialart.info • Joel Bramley • Steve Thompson • Stephen Sweet • shocky • Nikontofeur • Eric Isselée • auris • David G • Jordi Soro • Jason Stitt • Indigo • milosluz • AndreasG • Bruce Shippee • Zimon • jimmythecure • claudio calcagno • Stephen Coburn • cmapuk_Online • Martine Lefebvre • ordus

Contacte: centre•sciences@wanadoo.fr

Matemàtiques

EXPERIMENTALS

experimentals

Unesco – Centre•Sciences – Adecum – www.experiencingmaths.org