



الرياضيات التجريبية



الرياضيات التجريبية

هذا المعرض الافتراضي موجه لمدرّسي الرياضيات وتلاميذهم - سيما تلاميذ المستوى الثانوي- وكذا لكل فضولي الرياضيات، والعلوم بصفة عامة.

وشأن هذا المعرض شأن المعرض الدولي المتنقل «لما الرياضيات؟»، فقد صُمّم وأنجز بمبادرة ومساهمة اليونسكو، من قبل مركز علوم Centre•Sciences والأديكوم* Adecum.

يقدم هذا المعرض الافتراضي أزيد من ٢٠٠ وضعية رياضية، وهي وضعيات تقترح على التلاميذ أن يجربوا ويتحسسوا، وأن يبادروا بوضع فرضيات، ثم اختبارها ومحاولة التأكد من صحتها، وأن يبحثوا عن البراهين والنقاش حول الخواص الرياضية. وكما هو الحال في معرض «لما الرياضيات؟» فمعرضنا هذا يقترح «تجارب مبسطة على الطاولة» من السهل القيام بها بمواد بسيطة: الفكر واليدان، الورق والأقلام، قطع من الورق المقوى، أو من الخشب أو من مواد زجاجية، سلك حديدي ومسامير... كما يقترح ضمن مقاربتة العددية «تجارب مبسطة على الشاشة» حيث يمكن القيام بالتجربة بنقرة واحدة.

ستجدون بخصوص كل موضوع:

- مقدمة تفاعلية (لإسالة اللاعب)،
- تجارب ينبغي أن يقوم بها التلاميذ،
- بعض الشروحات والمراجع التاريخية،
- بعض المهن التي تستخدم تلك الرياضيات،
- إحالات بالكلمات المفتاحية نحو شبكة الإنترنت،
- ملف في شكل 'بي دي آف'، ينبغي طبعه، يقدم بعض المساعدات.

ولما كان هذا المعرض يتوجه أيضا للمدرّسين في البلدان الجنوبية، ورغم طابعه التفاعلي، فنحن لا نريد البتة تعميق الهوة الحاسوبية. ولذا يقترح المعرض على كل من ليس له رابط بشبكة الإنترنت ولا حاسوب أن يطبع، أو يطلب طباعة، هذه الصفحات الشاشاتية - بالأبيض والأسود أو بالألوان - انطلاقا من الصفحات بشكل - 'بي دي آف' التي صمّمت، تحديدا، لهذا الغرض.

*مركز علوم: مركز ثقافة علمية وتقنية بمنطقة الوسط، مدينة أورليون Orléans (فرنسا).

*أديكوم: الجمعية من أجل تنمية الثقافة الرياضية، مدينة أورليون (فرنسا).

١ . قراءة الطبيعة

حلزونات في الطبيعة
عالم كسوري
المخروطات في الفضاء

٥

٦

٨

١٢

١٣

١٦

١٨

٣٤

٣٥

٣٧

٣٨

٥٢

٥٣

٥٤

٥٥

٦٩

٧٠

٧٥

٧٧

٨٢

٨٣

٨٤

٨٦

٩٥

٩٦

٩٧

٩٨

١٠٢

١٠٣

١٠٤

١٠٥

١٠٦

١٠٧

١٠٩

١١١

١١٧

١١٨

١١٩

١٢٠

١٢٨

٢ . تبليط سطح

فني التبليط
مشكالات (كليدوسوكوب)
أين أنا؟

٣ . ملء الفضاء

اركم البرتقال
متعددات السطوح
مسائل معقدة

٤ . الاتصال

عالم كسوري
٤ ألوان تكفي
آلو، هذا أنت؟

٥ . الحساب

فكرياً ويدوياً
أعداد أولية
صور رقمية

٦ . إنشاء

منحنيات وسرع
منحنيات وأحجام
منحنيات لطيفة

٧ . تقدير - توقع

كرتان حمراوان؟
بينغو!
والفائز هو؟

٨ . تجويد

فقاعات الصابون
أقصر طريق
أفضل شكل

٩ . برهن

فيثاغورس
أعداد وأشكال
هل هذا صحيح؟

١٠ . الخلاصة

جرب
ضع فرضيات
برهن!

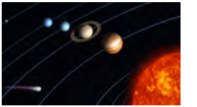
إسهامات وإعتماد



١. قراءة الطبيعة



حلزونات في الطبيعة
عالم كسوري
المخروطات في الفضاء



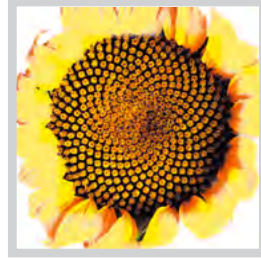


حلزونات في الطبيعة

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: قلم لباد، ثم اختر: ١ أناناس، أو ١ تفاحة صنوبر، أو ١ فراولة، أو ١ زهرة عباد

كم عدد الحلزونات في كل الاتجاهات؟



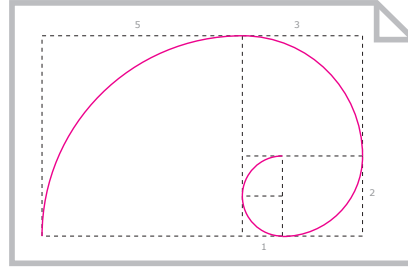
١، ٢، ٣، ٥، ٨، ...

- عَيّن العناصر الموائية لهذه المتتالية.
- تأمل في هذه الكائنات، ستظهر حلزونات، في كل الاتجاهات.
- احسبها.
- أوجد المزيد من الفواكه والزهور والأوراق... التي تتمتع بنفس الميزة.

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ ورقة، ١ مسطرة، ١ مدور، ١ قلم، ١ مقص

ارسم حلزون فيبوناتشي Fibonacci



- خذ ورقة.
- ارسم مربعات أطوال أضلاعها ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ...
- ارسم رُبّع دائرة في كل مربع كما هو مبيّن في الشكل.
- قَصّ المربعات وضعها حلزونياً كما هو مبيّن في الشكل.

بدهاب بعيداً

متتاليات فيبوناتشي:

إنها متتاليات الأعداد الطبيعية حيث يكون كل حد منها يساوي مجموع الحدين السابقين. لقد اكتشفت هذه المتتاليات، منذ ٨ قرون، من قبل إيطالي، هو ليوناردو دي بيزا Leonardo di Pisa، المسمى أيضاً فيبوناتشي.

لنرمز بـ F_n للحد ذي الرتبة n من هذه المتتالية. إن لها العديد من الخواص، منها أن F_{n+1}/F_n

F_{n+1}/F_n تؤوّل إلى نهاية هي: $(1 + \sqrt{5})/2$. يسمى هذا العدد "العدد الذهبي".

ثم إن F_n و F_{n+1} أوليان فيما بينهما. كما أن مجموع مربعيهما يحقق

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \dots$$

مهن الرياضيات

منذ عهد فيبوناتشي، اهتم الكثير بخواص النباتات. ومؤخراً أثبت باحثان فرنسيان، ستيفان دُوادي Stéphane Douady وإيف كودي Yves Couder تجريبياً بأن نمو هذه النباتات يوافق خواص تتمتع بها الجمل الديناميكية في الفيزياء. تسمى دراسة الشكل والخواص الفيزيائية للنباتات علم «انتظام الأوراق» phyllotaxy. يُعنى بهذا العلم علماء النبات والأحياء.

روابط على شبكة الإنترنت: <http://maven.smith.edu/~phylo/>, <http://www.lps.ens.fr/~douady>

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Fibonacci – Sequences – Phyllotaxis – Golden section – Golden spiral

ماذا أتذكّر؟

١، ٢، ٣، ٥، ٨،
١٣، ٢١، ٣٤، ٥٥،
٨٩، ...، ٢٣٣، ...

تتوزع بعض حبيبات الفواكه وبتلات مجموعة من الزهور وأوراق العديد من الأشجار دائماً وفق هذه المتتالية العددية: كل عدد من المتتالية يساوي مجموع العددين السابقين.

كذلك هو الأمر، في المخروط الصنوبري والأناناس، وزهرة عباد الشمس، وكذا في جذوع النخيل والتين الشوكي (وأوراقه)، وتفتح القرفة... فأعداد الحلزونات في أي اتجاه هي عناصر متوالية من هذه المتتالية، المسماة متتالية فيبوناتشي.

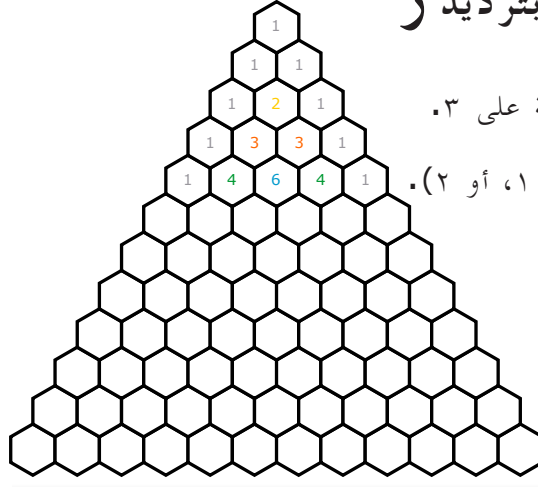


أنجز ذلك بنفسك



المستلزمات: شبكة مربعة أو سداسية ، ٤ أو ٥ أقلام أو أقلام لباد ملونة

مثلث باسكال (مثلث الكرجي) بترديد



- المطلوب ملء الشبكة وفق القاعدة المبينة.
- عوّض عدد كل خانة بباقيه في القسمة الإقليدية على ٣.
- مميّز بثلاثة ألوان مختلفة الأعداد ٠، ١، ٢.
- ثم لَوّن كل خانة باللون الموافق للون باقيها (٠، ١، أو ٢).

تأمل في الشكل.
ما هي مميزاتة؟

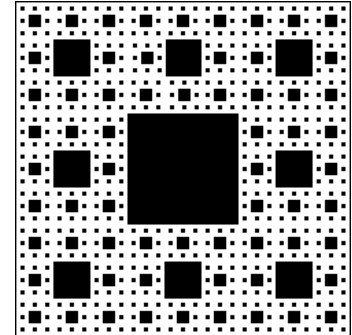
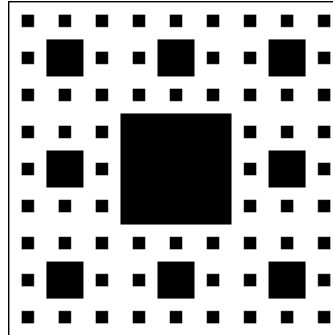
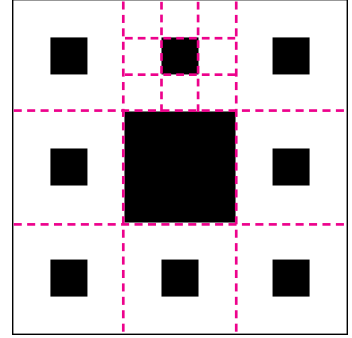
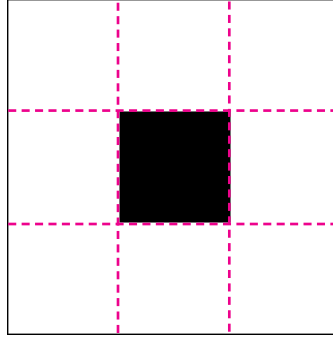
أعد الكرة واختر قاسما آخر (بدل ٣) بين ٢ و ٧.

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ ورقة كبيرة، ١ قلم، أو ١ قلم لباد ملون

متتالية أشكال ومتتالية أعداد

- انطلق من مربع كبير مرسوم على ورقة.
- قُصّه إلى ٣ قطع في كل الاتجاهات وسوّد بعض أجزائه.
- أعد الكرة باعتبار أجزائه التي ما تزال بيضاء...



ماذا أتذكر؟

مثلث باسكال

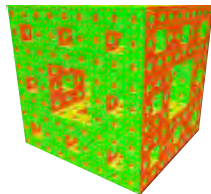
(مثلث الكرجي) بترديد ٢

يسمى مثلث الأعداد مثلث باسكال (الكرجي). في كل سطر أفقي، تشكل الأعداد الموجودة فيه المعاملات التي تظهر في قانون شهير، هو ثنائي حدود نيوتن: (أ + ب) ⁿ.

تلعب هذه الأعداد دوراً مهماً في فروع رياضية مختلفة (الجبر، الاحتمالات، ...).

بتعويض هذه الأعداد بباقي قسمتها على ٢ تظهر لنا صورة تتكرر بمستويات تتزايد حجماً. هذه الصورة تمثل كائناً كسورياً يسمى "بساط سيربينسكي" Sierpinski.

يسمح انتظام الألوان بتسهيل كشف الأخطاء الحسابية. نجد هذه التقنية في مراقبة الأخطاء وتصحيحها.



الكسوريات الثلاثية الأبعاد

قم، كما جاء آنفاً، بإنشاء مكعب كسوري.

عالم كسوري



أنجز ذلك بنفسك

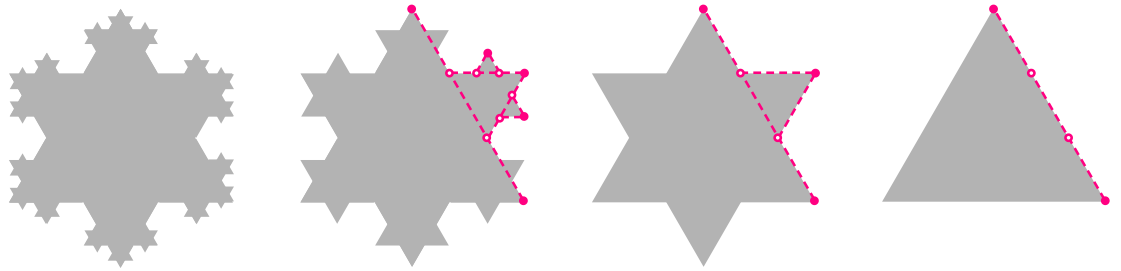
المستلزمات: ١ ورقة، ١ قلم، ١ مسطرة

ارسم متتاليات أشكال كسورية أخرى

- ارسم مثلثا متساوي الأضلاع.
- قص كل ضلع إلى ٣ قطع مستقيمة متساوية.
- عوض القطعة المستقيمة الموجودة في الوسط بقطعتين أخريين لهما نفس الطول.
- ثم أعد الكرة على كل قطعة مستقيم تحصل عليها مجددا.
- ...

نشاط آخر حول هذه الأشكال الكسورية:

في كل مرحلة من المراحل السابقة، احسب محيط ومساحة السطح، ثم احسب نهايتها.



وفي الطبيعة؟



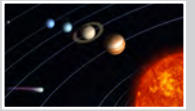
مهن الرياضيات

تظهر الكائنات الكسورية وتستخدم في العديد من المجالات: الأرصاد الجوي، الاقتصاد، ضغط الصور، الطب، وحتى الفن... الكسوري.

روابط على شبكة الإنترنت: <http://commons.wikimedia.org/wiki/Fractal>

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Fractal - Fractal figures sequences - Fractal dimension - Mandelbrot



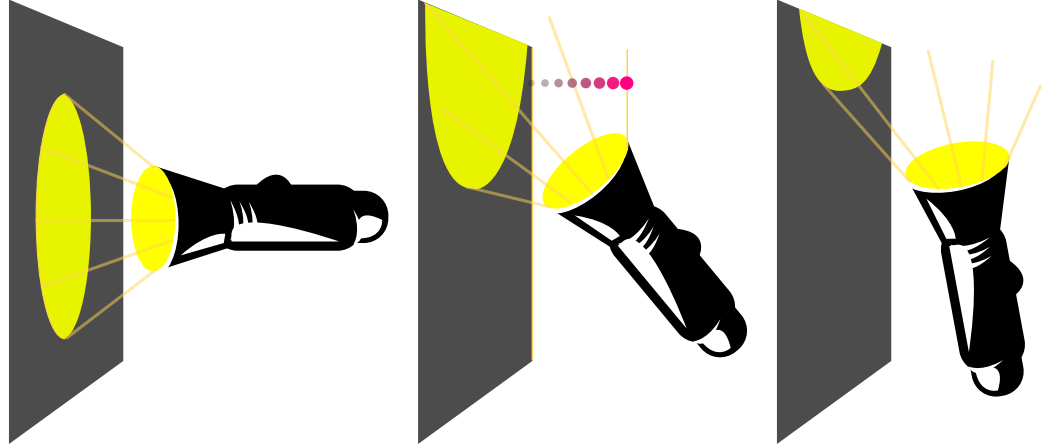
المخروطات في الفضاء

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ مصباح كهربائي أو ١ مصباح جيبى، ١ جدار أبيض أو ١ شاشة بيضاء

أضواء ومخروطات

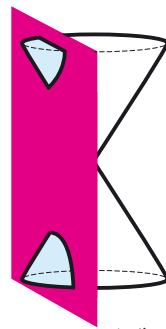
- أنر الجدار أو الشاشة بالمصباح.
- ستظهر بقعة ضوئية.
- ما شكلها؟ هل يمكنك تغييرها؟ كيف؟



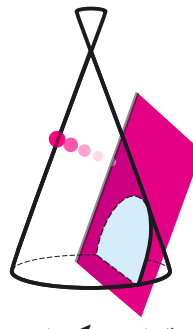
ماذا أتذكر؟

المخروطات هي المنحنيات المحصل عليها بتقاطع مخروط ومستوى. فحسب اتجاه المستوي بالنسبة إلى المخروط نحصل على مختلف أشكال المخروطات.

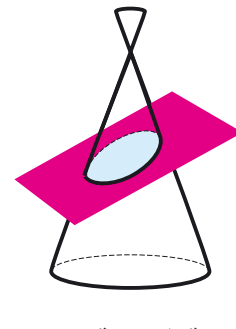
عندما تكون الشاشة عمودية على محور المخروط فإننا نحصل على دائرة. وحينما تتغير الزاوية يظهر لنا على التوالي قطع ناقص، و قطع مكافئ (هذا عندما يكون ضلع لمخروط الضوء يوازي الشاشة)، وفي الأخير، فرع أو فرعين لقطع زائد. هل يمكن الحصول على نقطة، أو مستقيم، أو مستقيمين؟



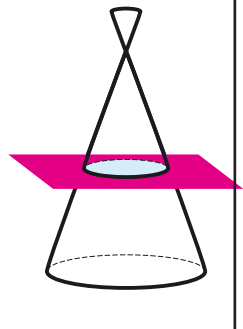
قطع زائد



قطع مكافئ



قطع ناقص



دائرة



المخروطات في الفضاء

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ ورقة، ١ مسطرة، ١ مدور، ١ قلم

قم بإنشاء مخروطات بالطي (الثني)

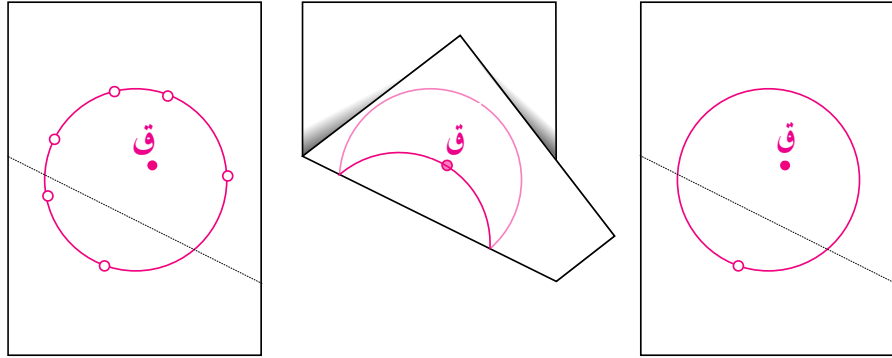
ارسم دائرة.

سجل نقطة **ق** بداخل أو خارج الدائرة.

قم بطي الورقة بحيث تتطابق نقطة من الدائرة مع النقطة **ق** وعلم آثار الطية.

أعد الكرة عشرين مرة على الأقل.

ماذا يظهر أمامك؟



ماذا أتذكر؟

● إذا كانت النقطة **ق** داخل الدائرة فإن الطيات التي تحمل علامات تغلف منحني يمثل قطعاً ناقصاً.

● إذا كانت النقطة **ق** خارج الدائرة فإن الغلاف المشار إليه يكون قطعاً زائداً.

ما الذي نحصل عليه عندما نعوض الدائرة بمستقيم؟

للذهاب بعيداً

نجد المخروطات في عديد الظواهر الطبيعية.

القطع المكافئ: من نافورة الماء إلى مسار كائن إذا ما قذف أماناً. نجده أيضاً في الأضواء البعيدة المدى في السيارة وفي بعض الأفران الشمسية.

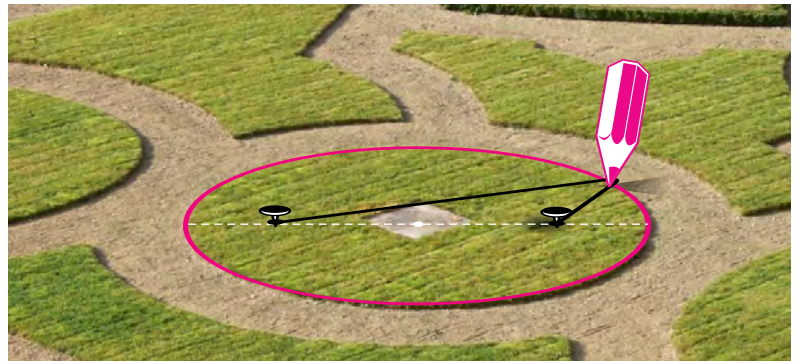
أما القطع الناقص فنصادفه في الهندسة المعمارية وفي رسومات الدوائر بالمنظور.

لقد بنيت قوانين كبلر Kepler (١٦١٩)، ثم قانون الجاذبية لنيوتن (١٦٨٧) بأن مدارات الأجرام السماوية، الطبيعية أو الاصطناعية، تمثل مخروطات (في حال عدم وجود أي تشويش).

مهن الرياضيات

من يستعمل المخروطات؟

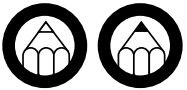
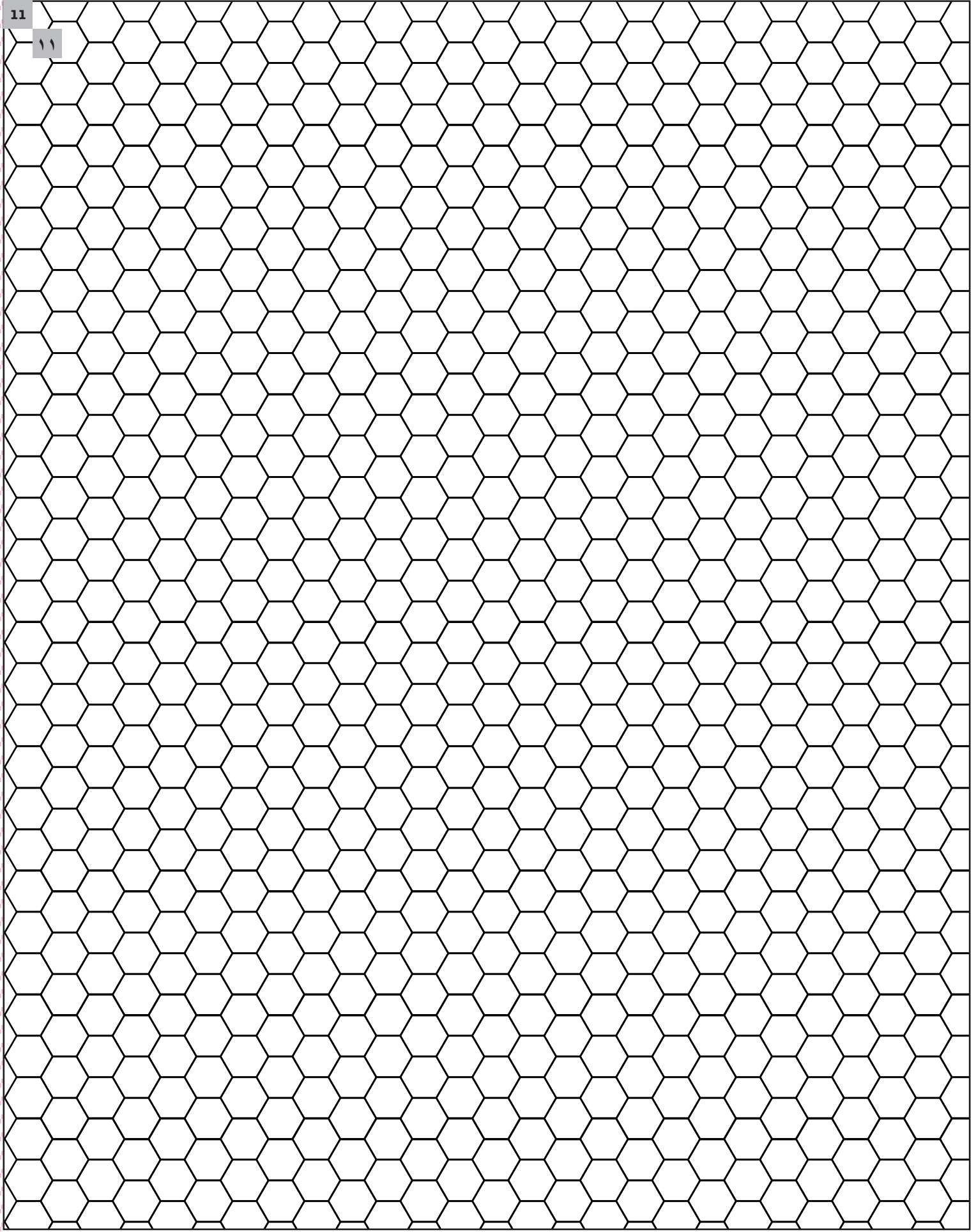
المهندسون، سيما في الصناعة الفضائية، وبطبيعة الحال علماء الفلك. كما يستعملها المعمارون الذين يشيدون الجسور المعلقة وملاعب الرياضة؛ وكذا البستاني والمختص في الإنارة بالمرشح والسينما، وأيضاً العاملون في الرسم الحاسوبي.

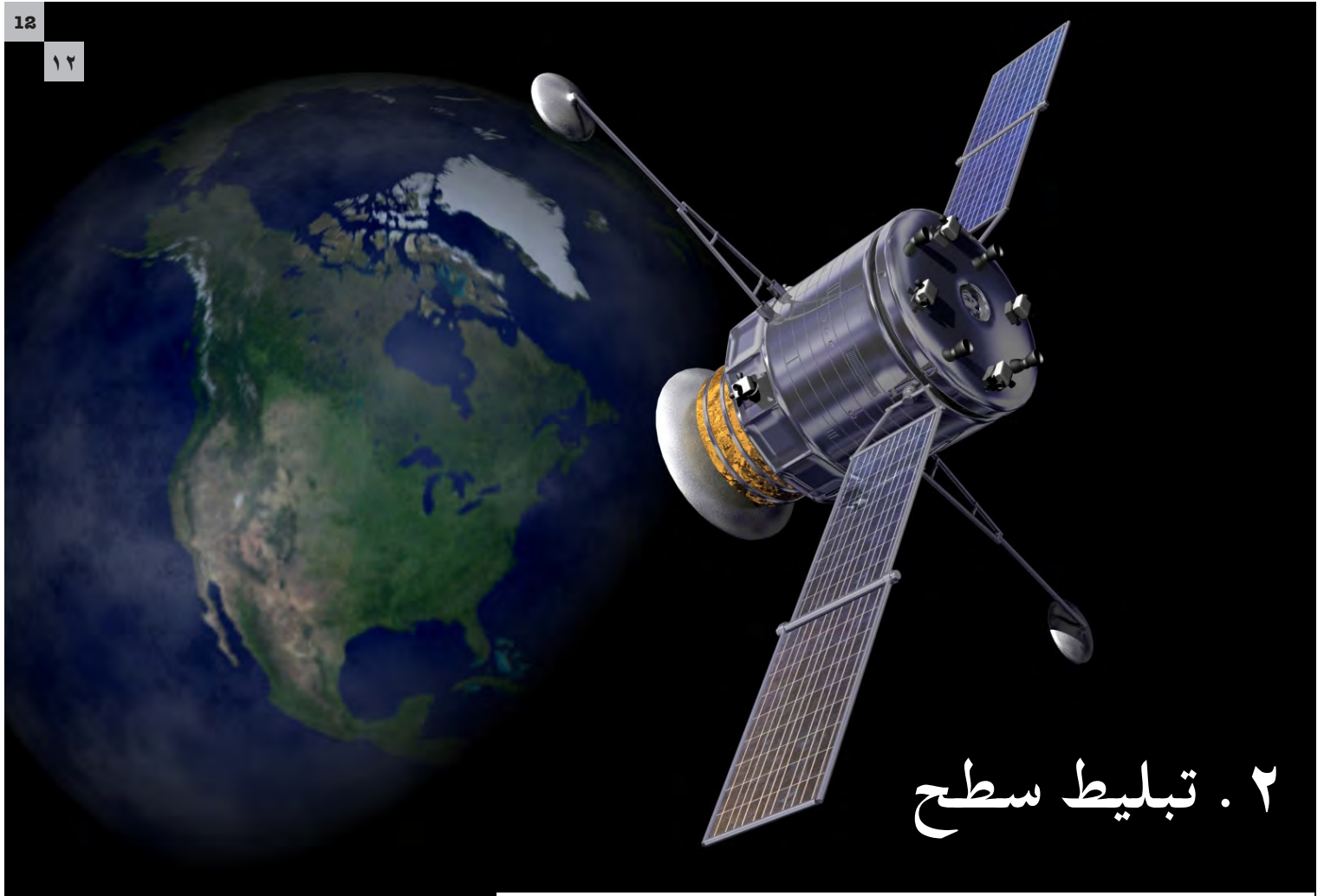


الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Conic - Ellipse - Parabola - Hyperbola - Envelope curves









فن التبييط

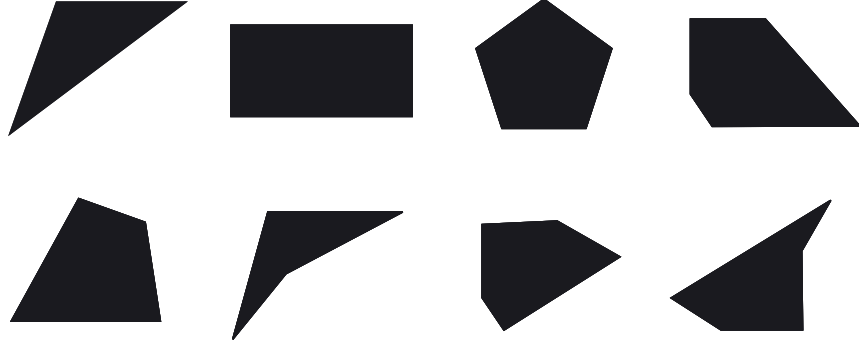
أنجز ذلك بنفسك



المستلزمات: ١ مِرْسام من الأشكال للقصّ، ٤ أو ٥ أقلام أو أقلام لِبَاد ملونة، ١ مقطع أوراق

قم بإنشاء أجمل التبييطات باستخدام شكل من الأشكال

اختر شكلا وحاول إنشاء تبييط للمستوي، دون ترك أي ثقب ودون السماح بأي تداخل (تراكب) للأشكال. يمكنك أيضا تلوينه. بعد إنشاء أي تبييط، حاول التعرف إلى أية مجموعة تبييطات منتظمة (من بين الـ ١٧ المبينة في الصفحة ١٥) ينتمي التبييط المنشأ.



ماذا أتذكر؟

هل يمكن تغطية سطح باستخدام أي شكل دون ترك ثقب ودون السماح بأي تداخل (تراكب) للأشكال؟

هناك العديد من الأشكال الهندسية والرمزية التي تسمح بإنجاز تبييط للمستوي، لكن هذه الخاصية لا تتمتع بها كل الأشكال، مثال ذلك المضلع الخماسي المنتظم.

التبييطات المنتظمة للمستوي تتكرر دوريا عبر الانسحابات وذلك في اتجاهين. وثمة تبييطات تتكرر عبر الدوران أو التناظرات المحورية.

هذه الانسحابات والدورانات والتناظرات تسمح بالتمييز بين ١٧ زمرة. ودراستها تندرج ضمن نظرية الزمر التي يرجع منطلقها إلى إفريست غالوا Evariste Galois (١٨٣٢-١٨١١).

تجد التبييطات تطبيقات في الرياضيات، وعلم البلورات، ونظرية التشفير، وفيزياء الجسيمات . . .

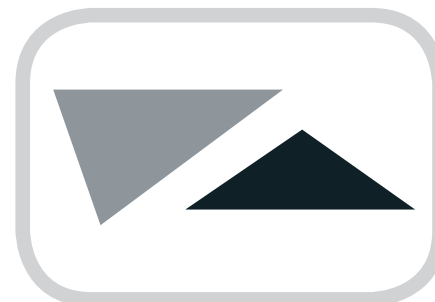
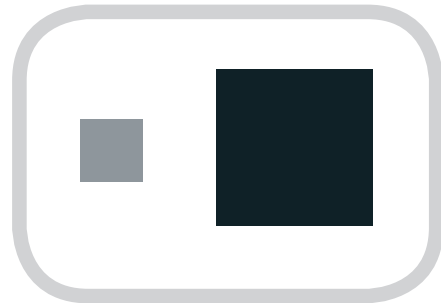
أنجز ذلك بنفسك



المستلزمات: ١ ورقة رسمت عليها أشكال للقصّ، ٤ أو ٥ أقلام أو أقلام لِبَاد ملونة، ١ مقطع أوراق أو مقصّ

قم بإنشاء تبييطات باستخدام شكلين مختلفين

- اختر شكلين من أزواج الأشكال أدناه.
- حاول إنشاء تبييط للمستوي دون ترك أي ثقب ودون السماح بأي تداخل (تراكب) للأشكال.
- هل التبييط منتظم؟ إذا لم يكن كذلك، هل يمكن معرفة السبب؟
- تقيّد بتطابق أقواس الدوائر.





فن التبليط

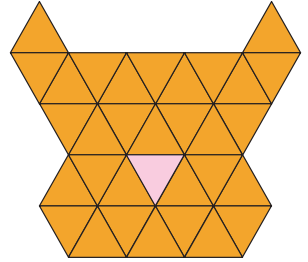
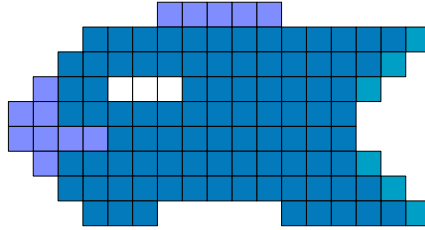
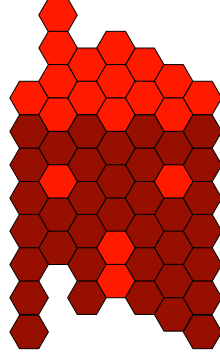
أنجز ذلك بنفسك



المستلزمات: ٣ شبكات هندسية، ٤ أو ٥ أقلام أو أقلام لباد ملونة

قط، سمكة، بيت

حوّل شكلا بسيطا (مثلث، مربع، ...) إلى نموذج رمزي يمكن استخدامه في التبليط. حتى نساعدك، انطلق من الشبكات التي وضعت من أجلك.

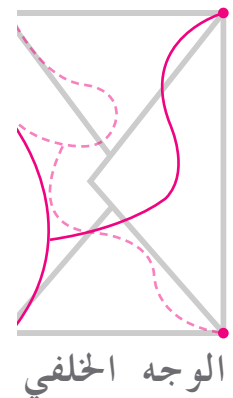
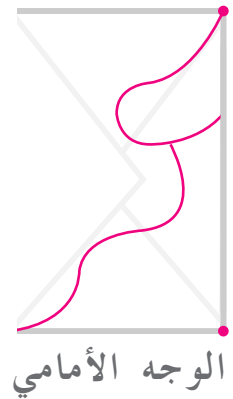
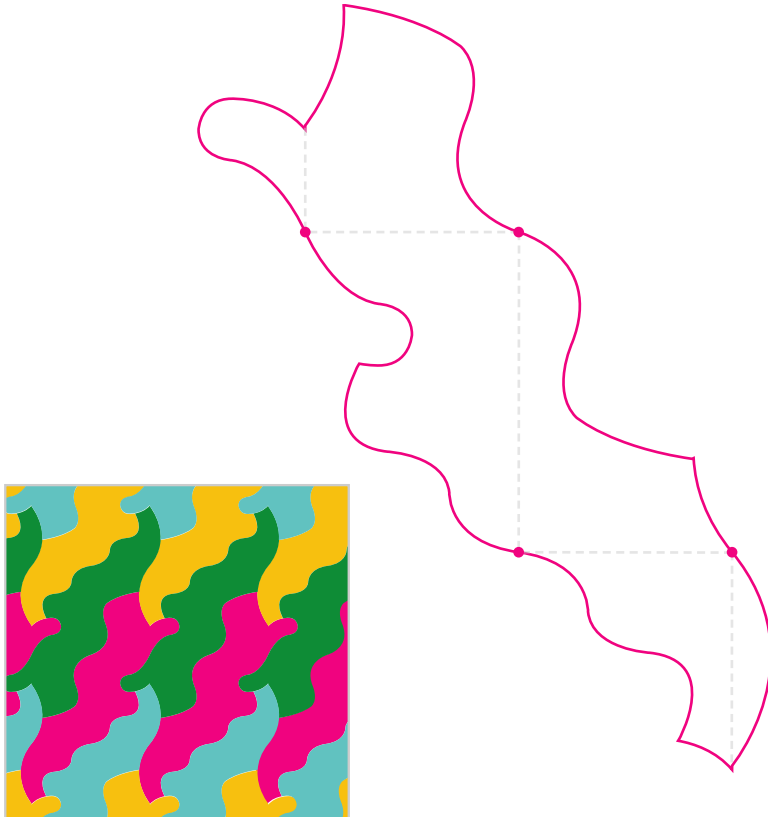


أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: أغلاف مغلق، ١ قلم، ١ مقطّع أوراق أو مقصّ

تقنية الأغلفة

- اصنع غلافا مغلقا، مربعا، مستطيلا، مثلثيا...
- ارسم خطا يربط رؤوس الغلاف. يمكن أن تمرر خطك على وجه واحد أو على وجهي الغلاف.
- قصّ الغلاف وفق الخط المرسوم.
- انشر الغلاف، ثم قم بعملية تبليط.

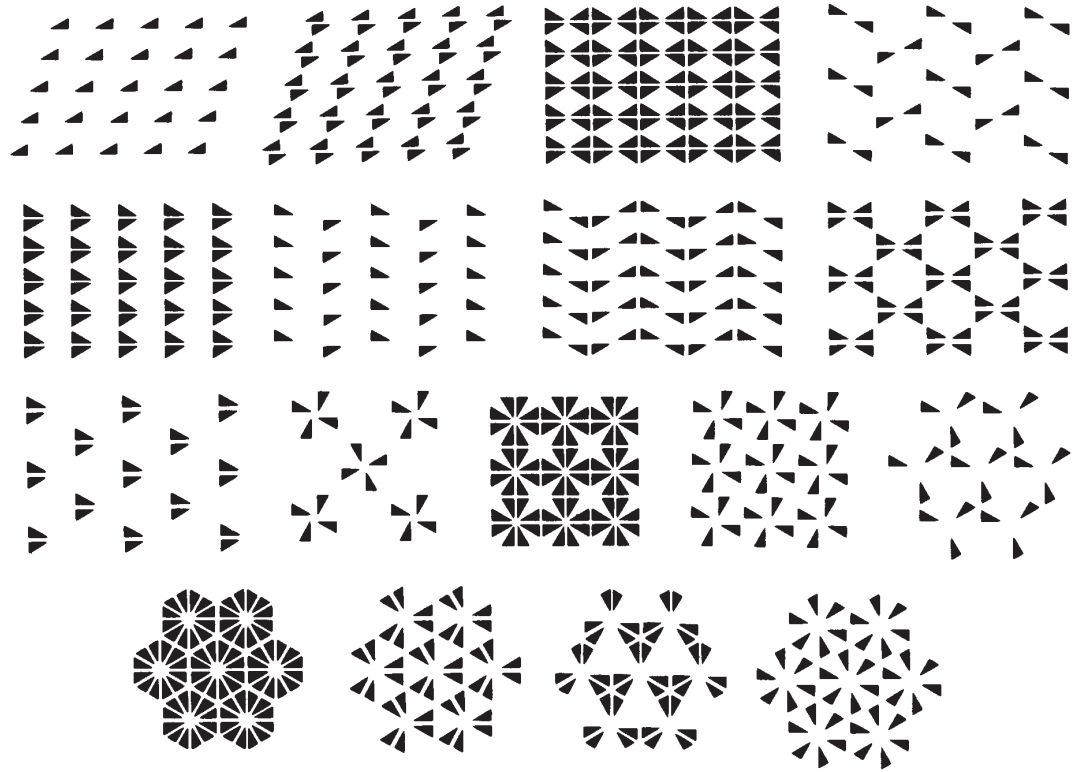




فن التبليط

للذهاب بعيداً

الزمر الـ ١٧ للتبليطات المنتظمة



مهن الرياضيات

نجد فن التبليط في عديد المهن، من الورق الجداري المنقوش إلى رصف مختلف الأماكن (المطبخ، الحمام...)، ومن أقمشة اللباس إلى الحياكة الإفريقية.

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Tiling - Tiling Groups - Evariste Galois - Escher

مشكالات (كليدوسوكوب)

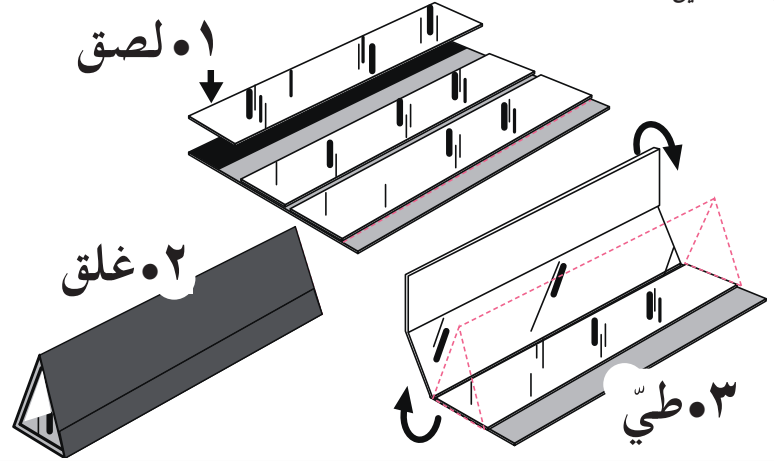


أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ٢ نماذج من المشكالات، ٣ مرايا، ١ صندوق من الورق المقوى، ١ أنبوب غراء، ١ شريط ٢٧

صناعة مشكالين

قم بإنشاء نموذجين أولهما على قاعدة مثلث متساوي الأضلاع، والثاني على قاعدة مثلث قائم ومتساوي الساقين.

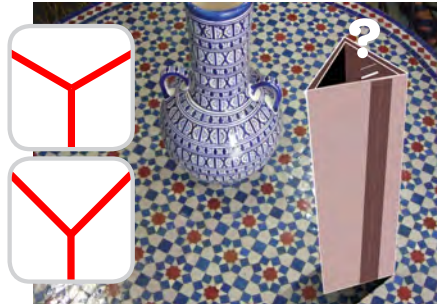


أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: أمثلة فسيفساء للتأمل، مشكالان ٢٨ ٢٩

اختر فسيفساء

- ضع المشكال المناسب في المكان المناسب.
- ستجد مجدداً، بحجم أكبر، نفس الفسيفساء.
- ضع إحدى المرايا على الخطوط الحمراء.
- ستكتشف تبليطاً لأرضية البيوت.



أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ آلة تصوير، مقص أو مقطع أوراق

اختر فسيفساء

- قم بتصوير أحد الوجوه
- قصها إلى قسمين بالتناظر وأنجز هذه الأشكال المرآتية !
- أي الوجوه أصح؟



ماذا أتذكر؟

التبليط المنتظم هو تكرار لانتهائي لنفس الشكل. هنا بواسطة التناظر - المرأة سيتكرر الشكل مولداً تبليطاً بمربعات، وبمضلعات سداسية، وكذا بأي مضلع له عدد زوجي من الأضلاع. وقد استخدم نفس التقنية فنانون، مثل إيشر Escher بأشكال أكثر رمزية.



مشكالات (كليدوسوكوب)

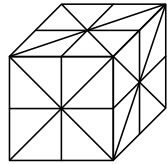
أنجز ذلك بنفسك



المستلزمات: ٣ نماذج من الأهرامات، ١ مقطع أوراق أو ١ مقص، ٣ مثلثات مرايا، ١ أنبوب غراء

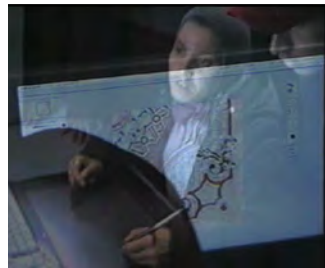
الأهرامات المرايا

- أنجز هرما - مرآة بواسطة النماذج التي وُفّرت لك.
- ضع أشياء أو سائلًا من اختيارك في قاع المشكال.
- ماذا تلاحظ؟



للذهاب بعيداً

عندما نقصّ متعدد سطوح منتظما (مكعب، رباعي سطوح...) وفق كل مستويات تناظره نحصل على أهرامات تسمح، عند تحويلها إلى مشكالات، بإعادة إيجاد متعدد السطوح الذي انطلقنا منه، إضافة إلى مجموعة من الأحجام المختلفة التي لها نفس التناظرات الأساسية.



مهن الرياضيات

- حرفيون يصنعون الفسيفساء انطلاقاً من «الزليج» (فاس - المغرب)
- تقنيون يصنعون تبليطاً جديداً على الحاسوب (القنيطرة - المغرب)

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Kaleidoscope - Mosaic tiles - Tiling - Symmetries - Escher



أين أنا؟

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ غلاف كروي من بوليسترين أو ١ كرة قدم، ١ قلم أو قلم لباد

تبليط غلاف كروي

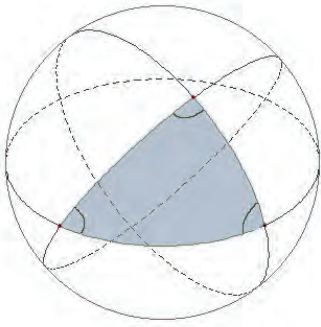
تأمل في هذه التبليطات لغلاف الكرة. هل يمكنك تخيل تبليطات أخرى؟ حاول رسمها على غلاف كروي. من أجل كل تبليط، احسب زوايا المضلع (أو المضلعات) المستخدم في التبليط.



ماذا أتذكر؟

كما هو الحال في المستوي فإن تبليط الغلاف الكرة ينبغي أن يكون بدون ثقب ودون تراكم للأشكال، ويتم ذلك بمضلع أو بعدة مضلعات كروية (أي تلك التي تنطبق على غلاف الكرة).

يكون التبليط منتظماً إذا استعمل شكلاً واحداً (مثلث متساوي الأضلاع، مربع...) موزعاً بنفس الطريقة حول كل رأس. والتبليطات المنتظمة لغلاف الكرة تمثل تشوهات كروية لمتعددات سطوح منتظمة. فعلى سبيل المثال، يسمح تبليط غلاف الكرة بتعريف العدد الأمثل للأقمار الصناعية اللازمة لتغطية كل نقطة من الأرض.



للذهاب بعيداً

- بحساب زوايا المضلعات المرسومة على غلاف الكرة ستكتشفون خواص من الهندسة الكروية:
- ما هو مجموع زوايا مثلث كروي؟
- أي يمكن إنشاء مثلث بـ ٣ زوايا قائمة؟
- ما هي العلاقة بين مجموع زوايا مضلع كروي ومساحته؟

قصة صياد الدببة

تعقب صياد أثر دب فصار متجهاً نحو الجنوب خلال ساعة. ثم لاحظ أن الدب اتجه شرقاً. فاتبع اتجاه الدب وسار مدة ساعة أخرى حتى وصل إلى نقطة اتجه فيها الدب نحو الشمال. ولم يكن في وسع الصياد إلا أن يتبع اتجاه الدب فصار مجدداً خلال ساعة نحو الشمال. والآن؟ لقد لاحظ الصياد أنه عاد إلى نقطة... الانطلاق!

السؤال ١: ما هو لون الدب؟
السؤال ٢: كم عدد حلول هذه المسألة؟

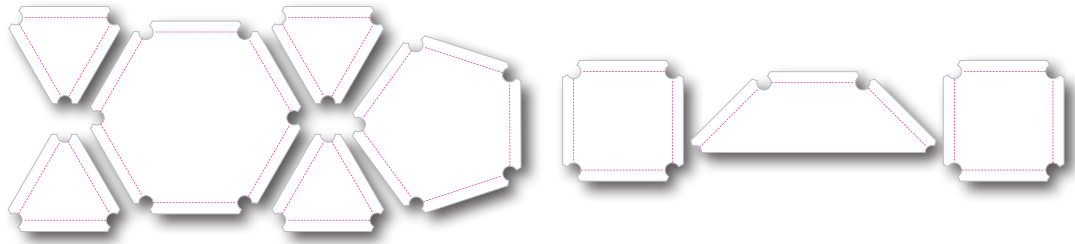
أنجز ذلك بنفسك

٣٣

المستلزمات: ١ ورقة من نماذج مضلعات منتظمة، ٢ إلى ٣ صناديق من الورق المقوى اللين، خيوط مطاطة

صناعة كرة من الورق المقوى

أنجز بهذه المضلعات المنتظمة كرة يكون شكلها أقرب ما يمكن من الغلاف الكروي.

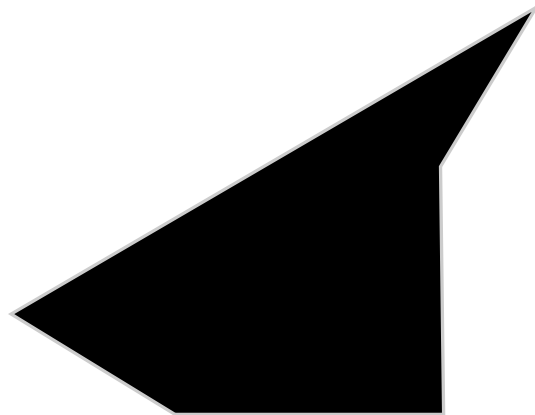
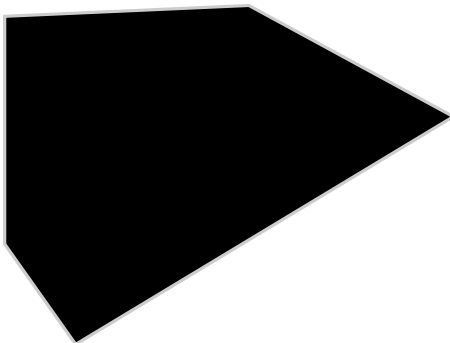
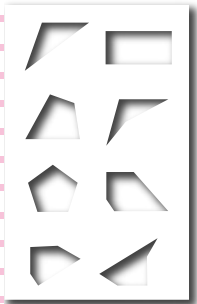
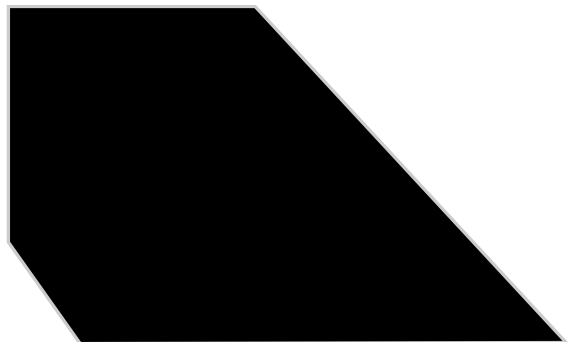
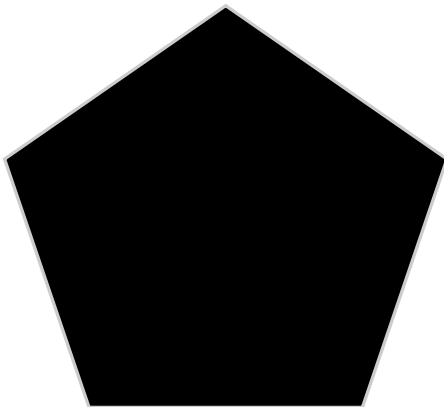
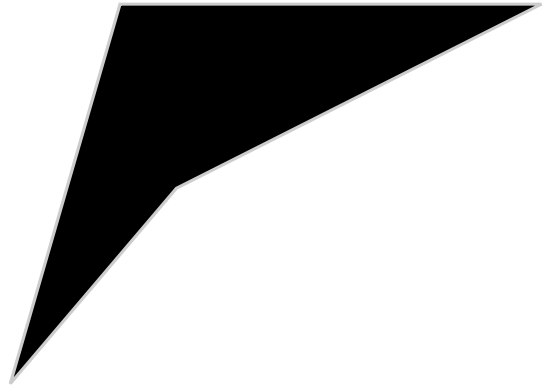
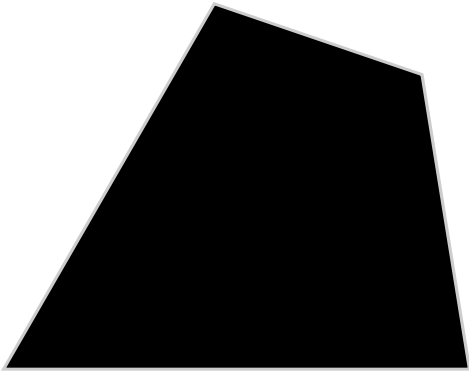


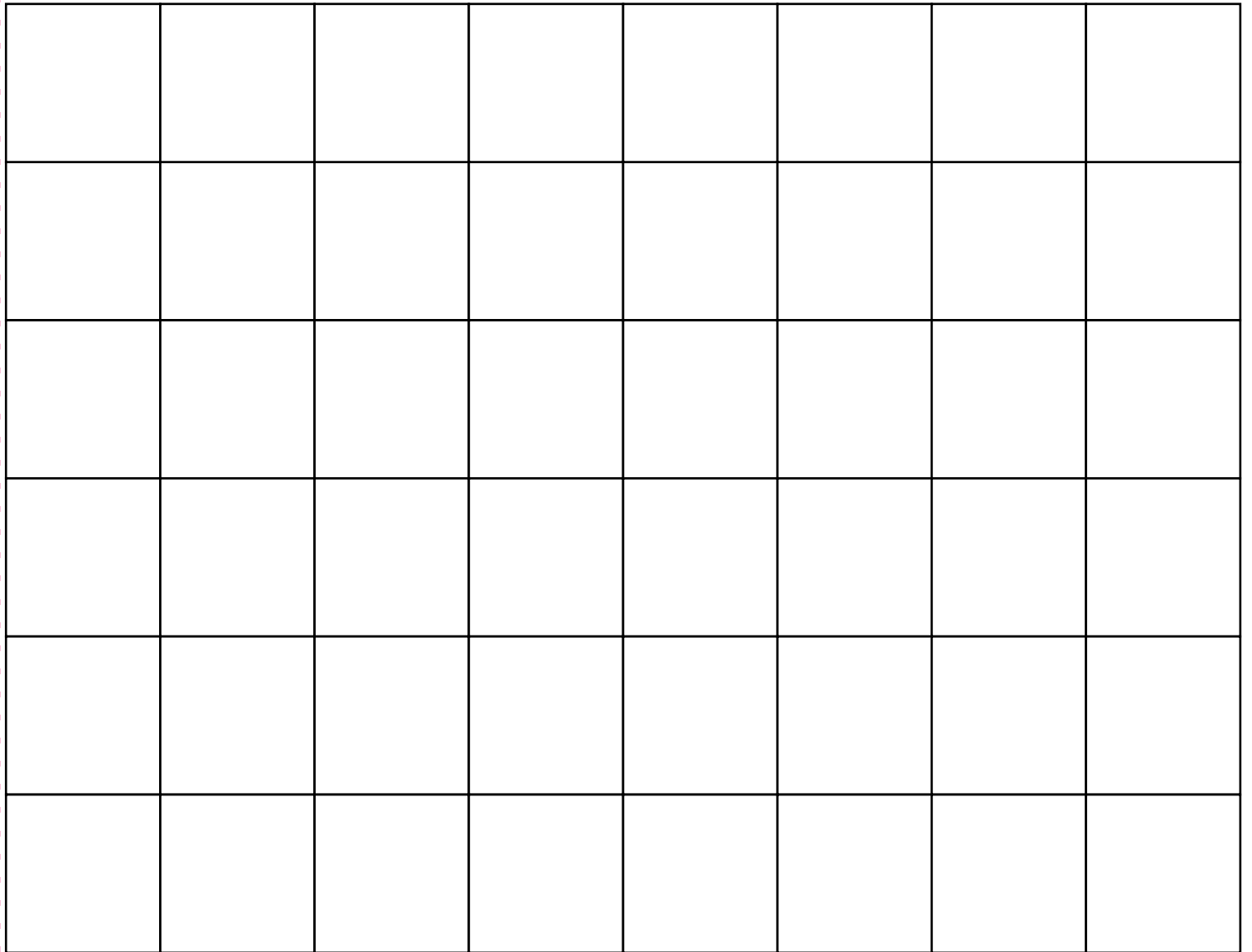
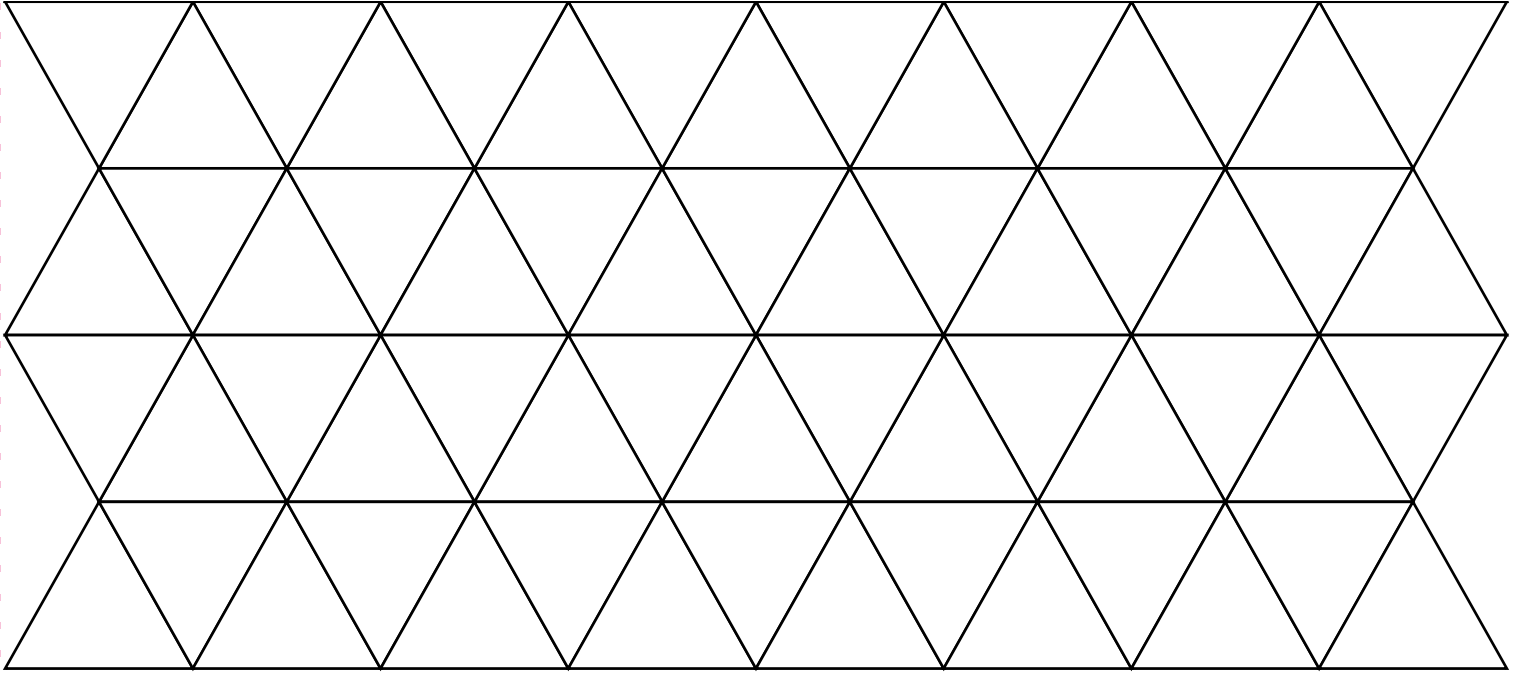
مهن الرياضيات

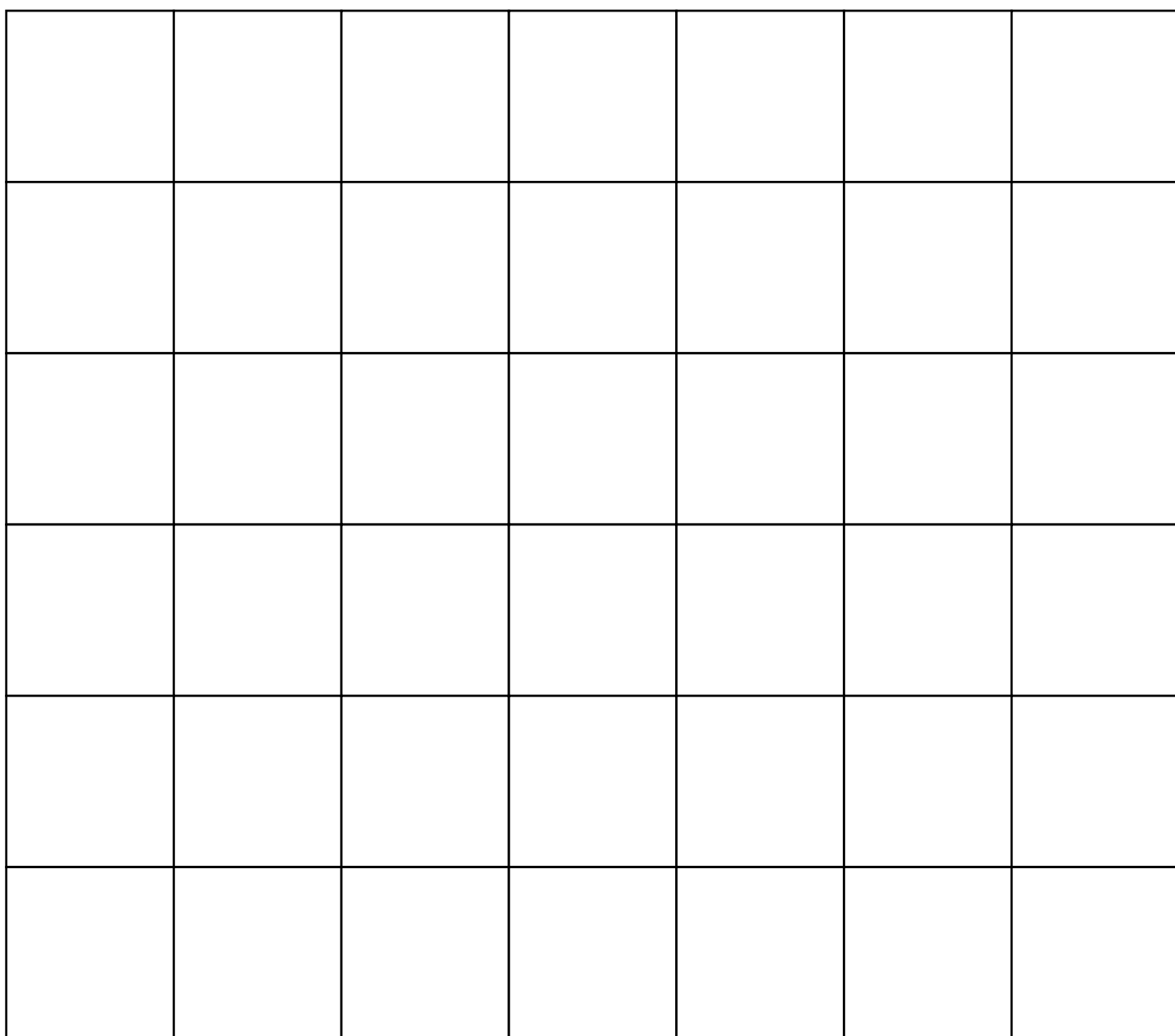
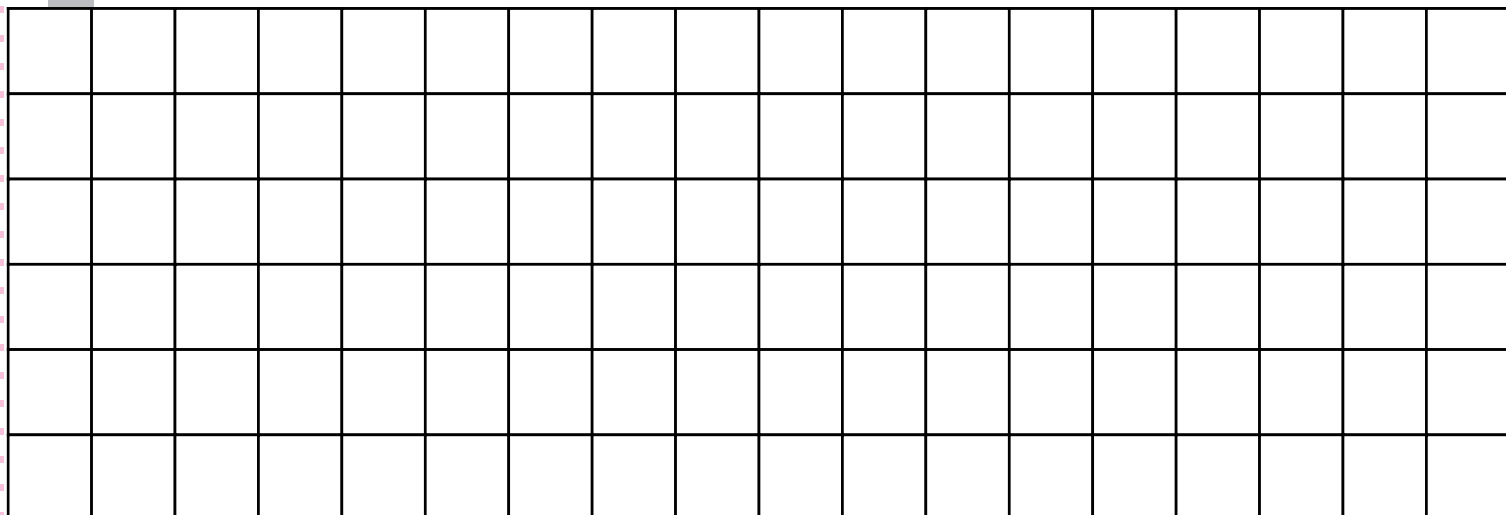
يستوحي المعمارون أحياناً أفكارهم من الهياكل الكروية. مهن الاتصالات عبر الأقمار الصناعية وأنظمة التموضع العالمي («جي بي آس» GPS أو غاليليو Galeleo) التي تبحث عن تغطية الكرة الأرضية بأقل عدد ممكن من الأقمار الصناعية.

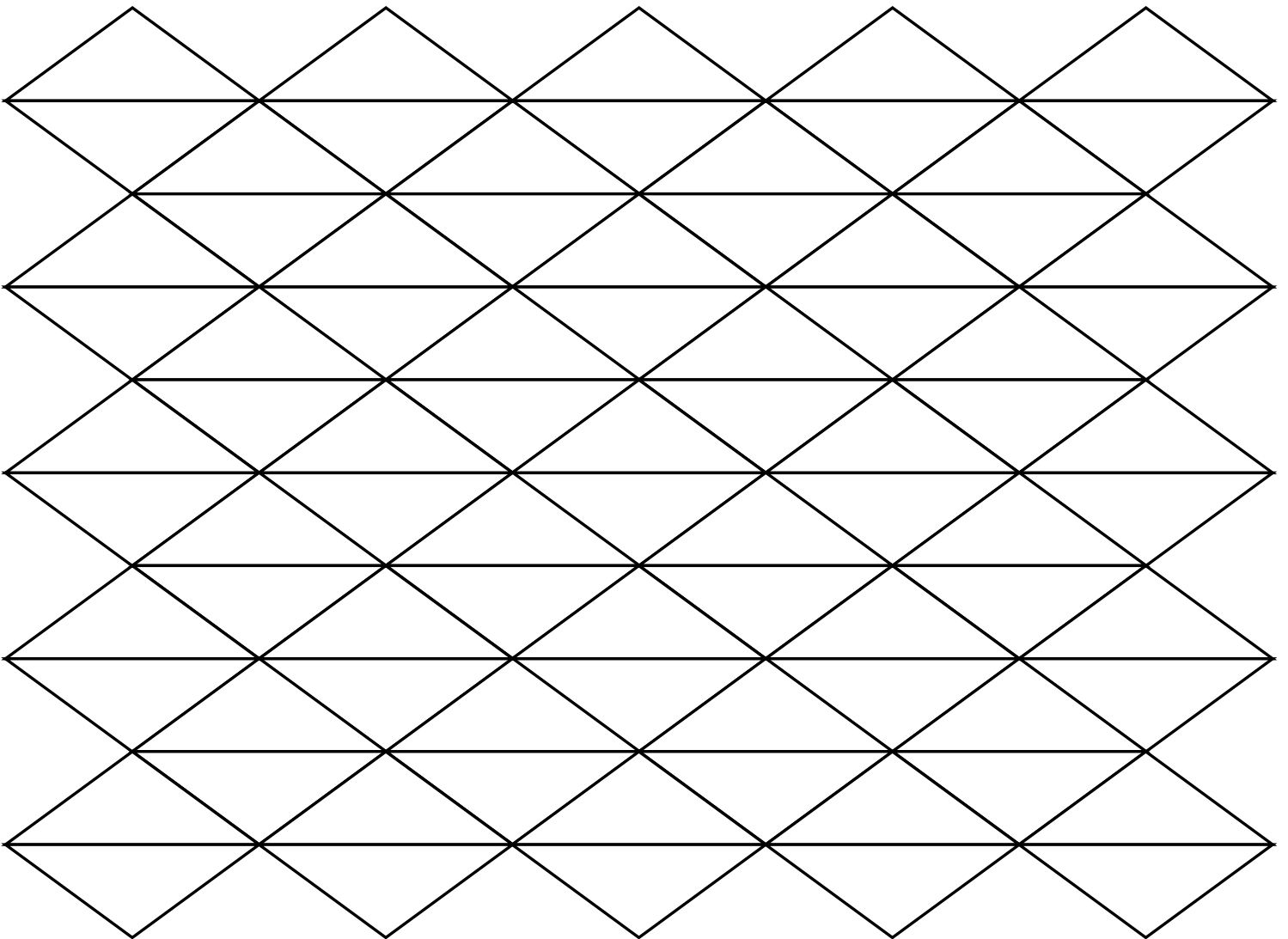
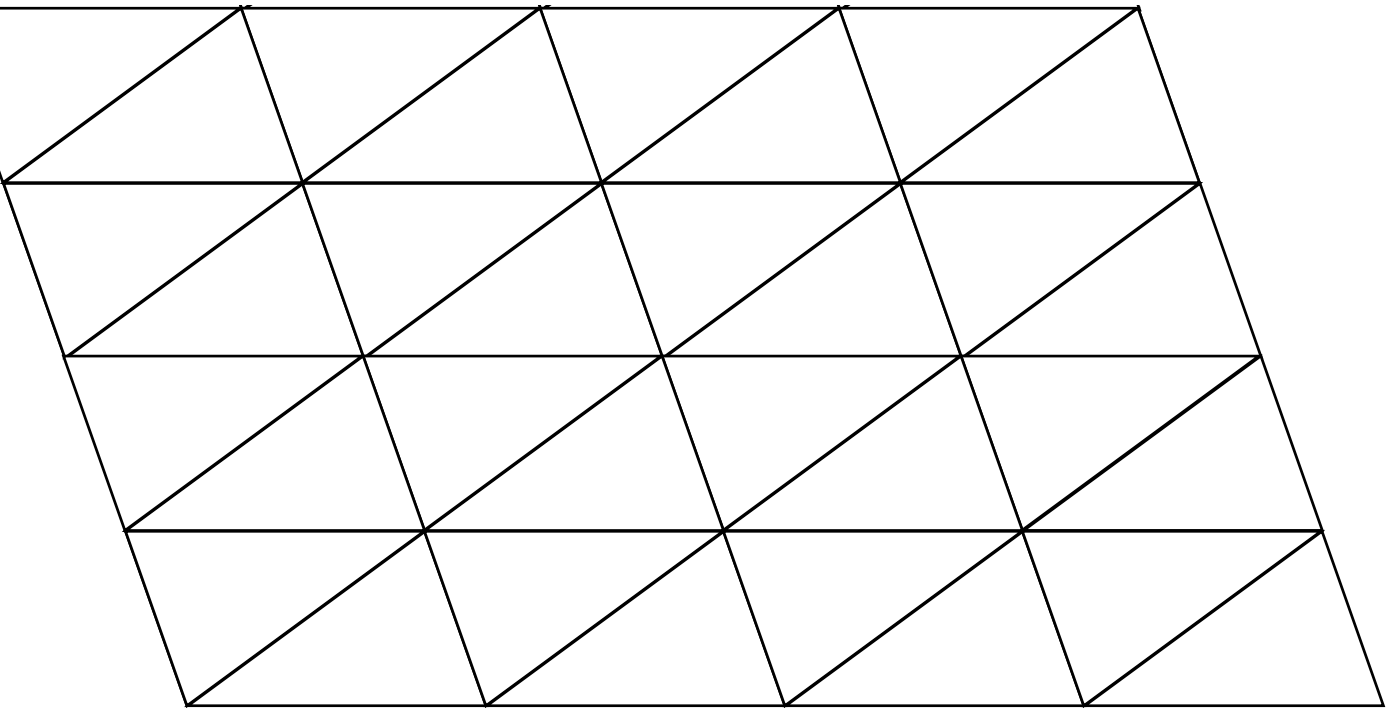
الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

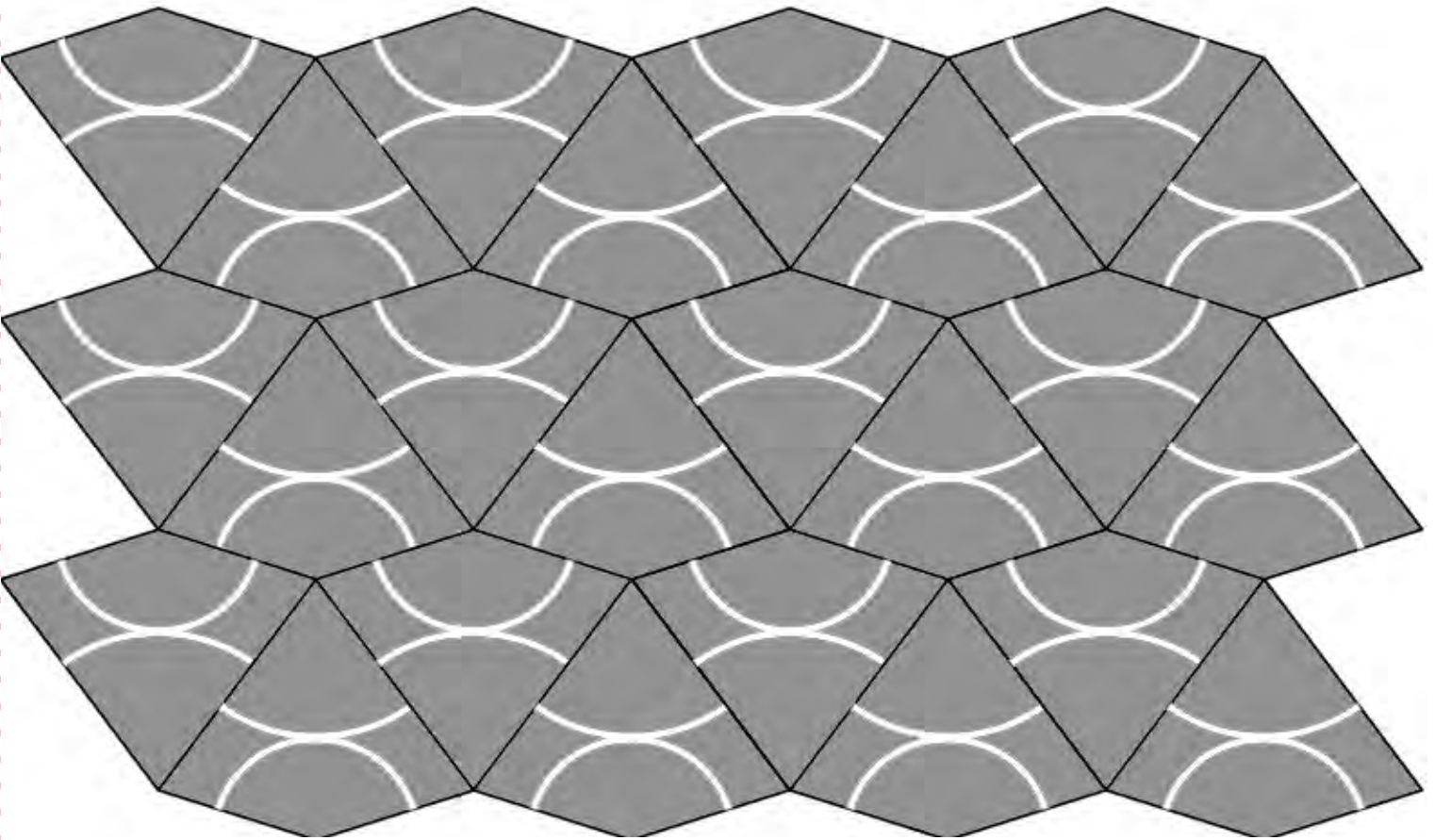
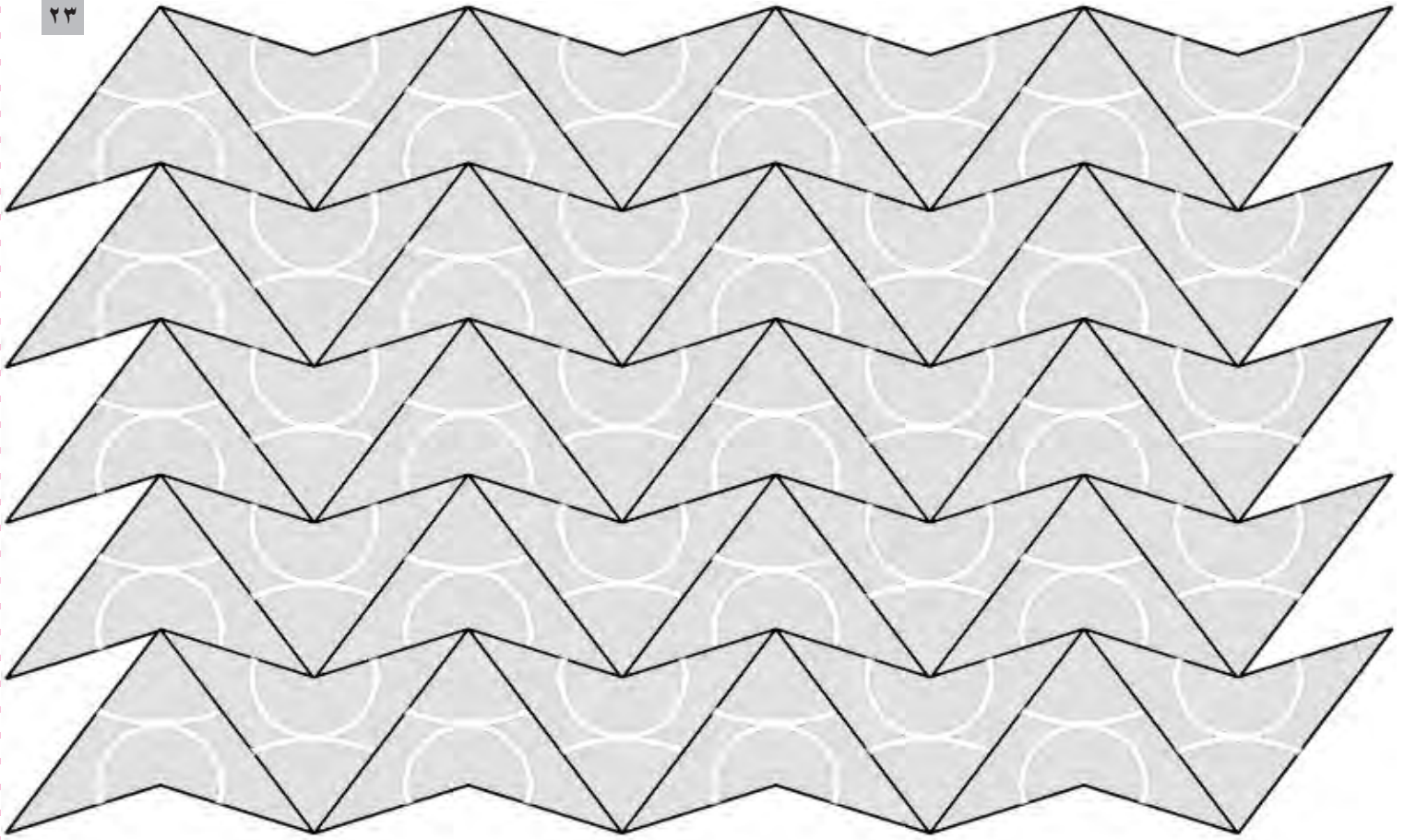
Spherical geometry - Sphere tiling - Escher

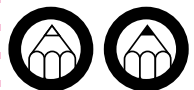


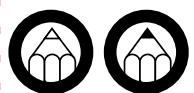


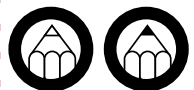












[illegible]

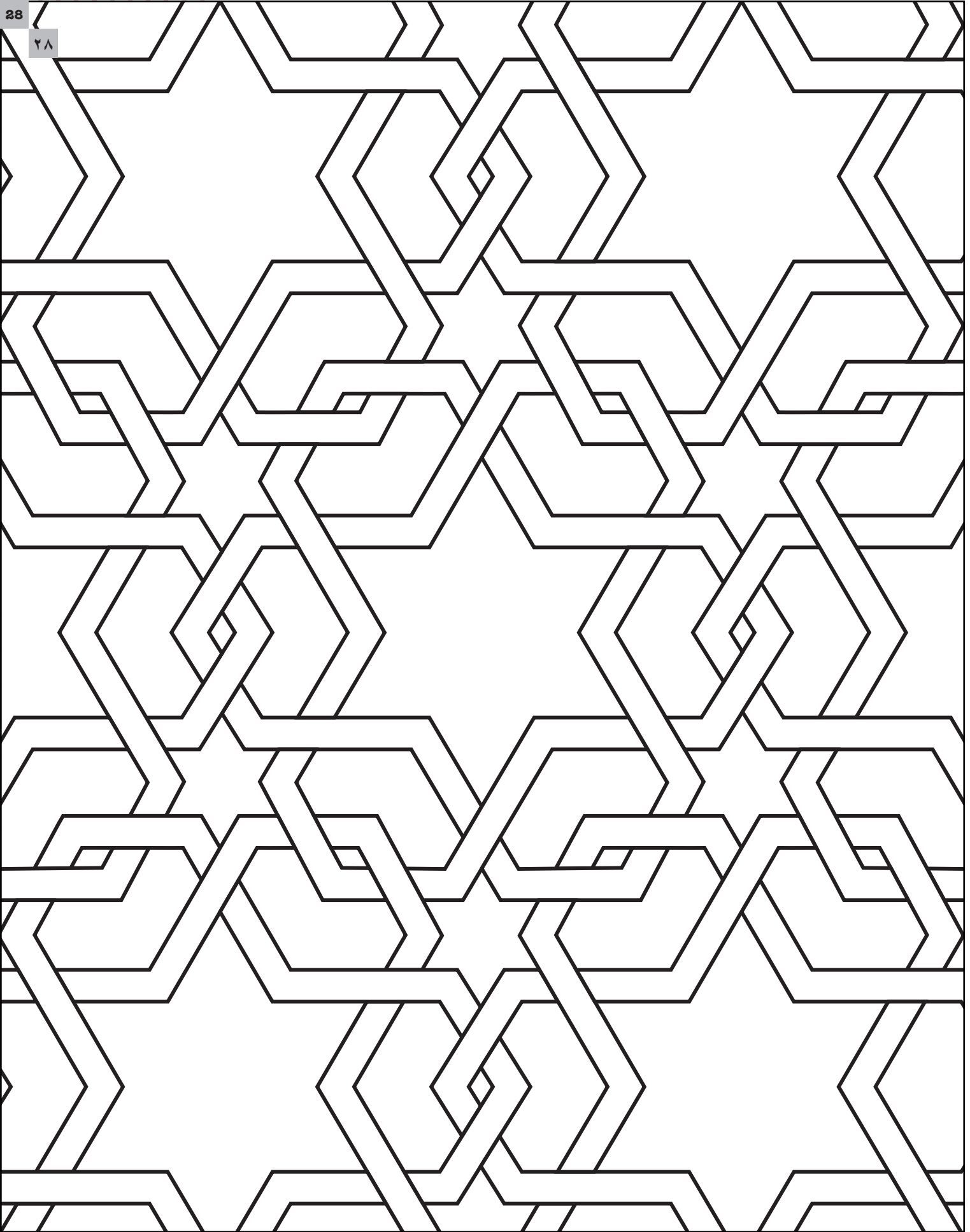
२.३३

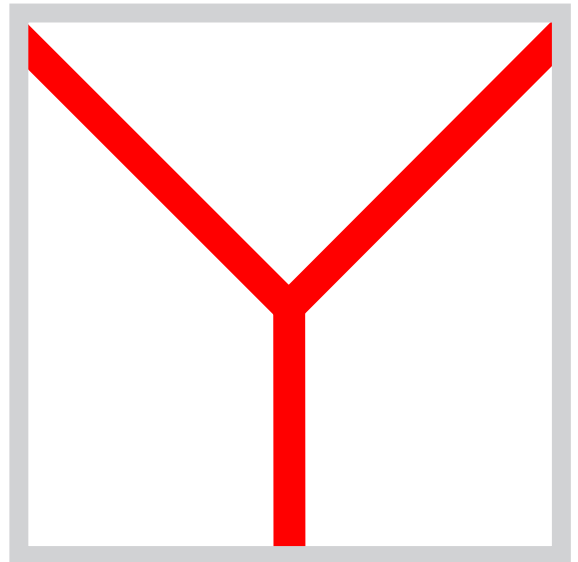
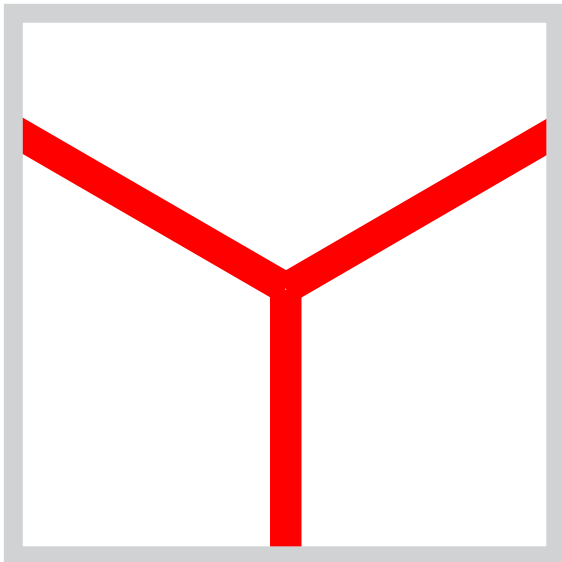
۱۸۰ مسم

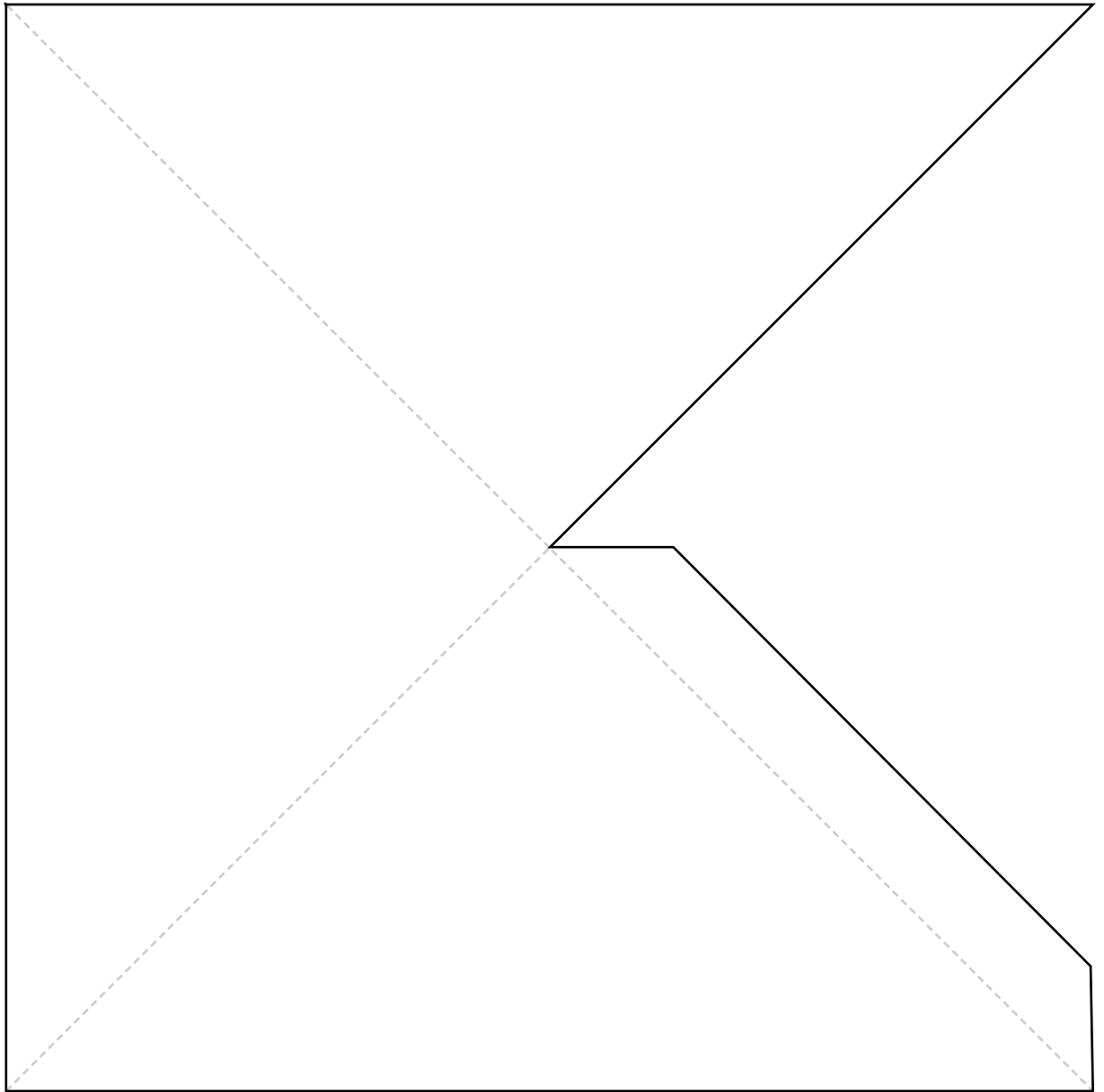
[illegible]

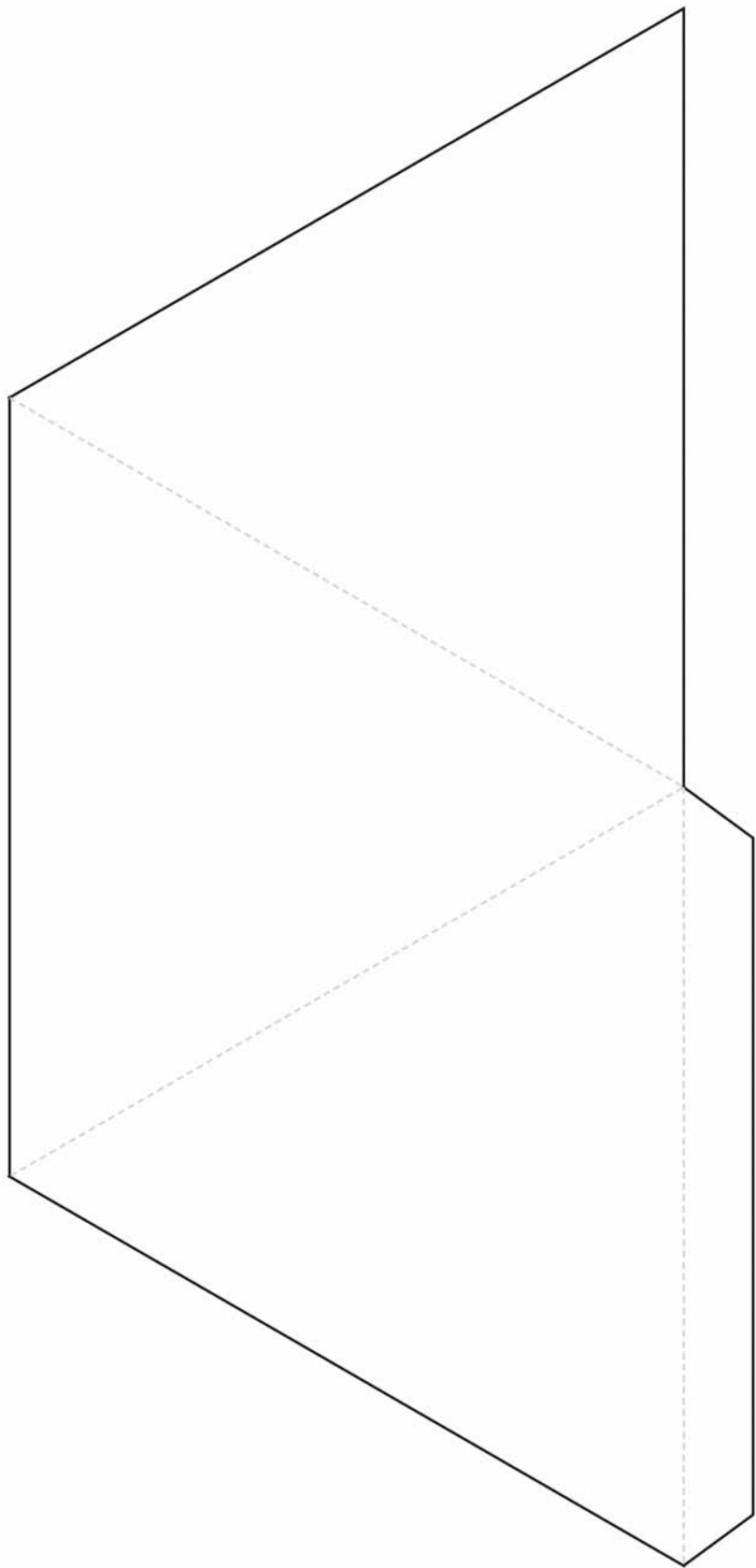
二、三

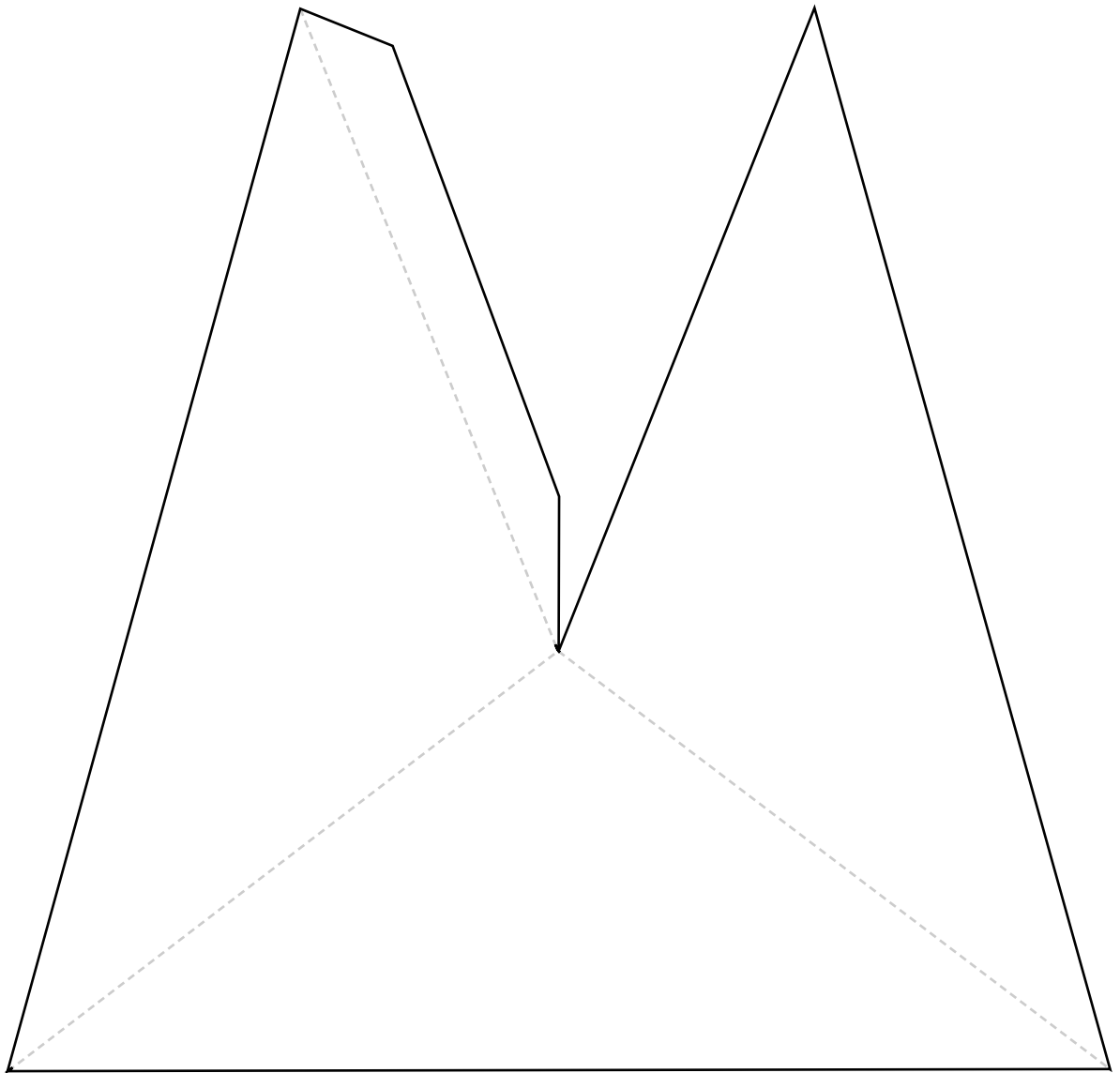


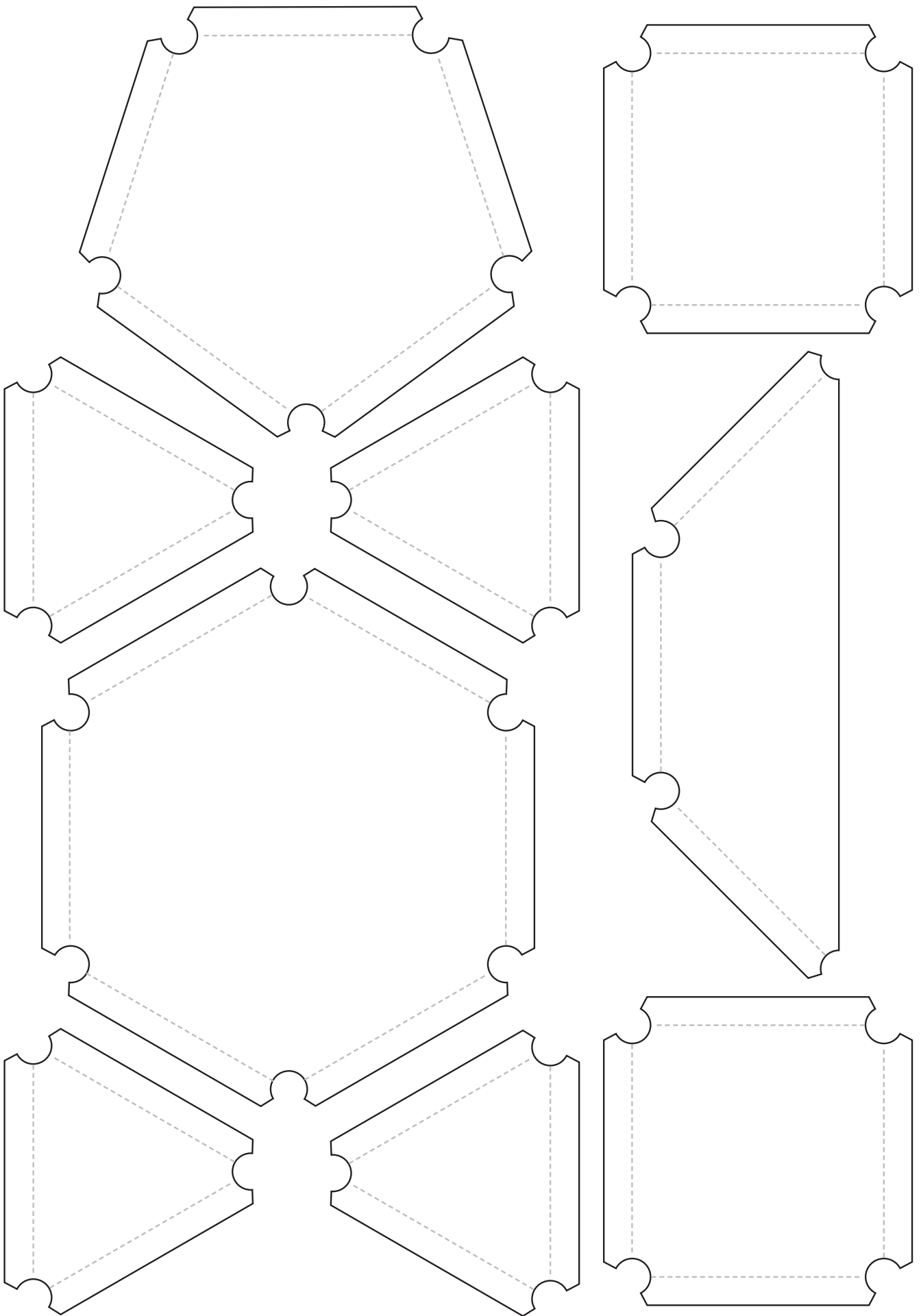










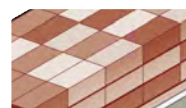




٣. مَلءُ الفضاء



ارْكُم البرتقال
متعددات السطوح
مسائل معقّدة





اركم البرتقال

أنجز ذلك بنفسك

٣٩

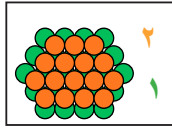
المستلزمات : ١ ورقة رسمت عليها شبكة، قطع نقدية، كريّات أو بعض البرتقال ...

اركم، اركم ...

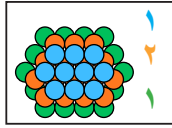
- ضع أكبر عدد ممكن من القطع المتطابقة في مربع طول ضلعه ١، ٢، ٣، ...، ١٠ وحدات.
- ضع أكبر عدد ممكن من كرات الوحدة (أي طول نصف قطرها يساوي ١) في مكعب طول كل من أضلاعه ١٠ وحدات.
- احسب كثافة كل كومة.



ماذا أتذكر؟



في مربع ضلعه ١٠، يمكنك وضع أكثر من ١٠٠ قرص! ابتداءً من أية رتبة يمكن أن نضع أقراصا عددها يفوق مربع الضلع؟ في المستوي، الكثافة* العظمى المحصل عليها بأقراص متطابقة هي ٩٠,٦٪. بمعنى أن هناك فراغا يقل حجمه عن ١٠٪.



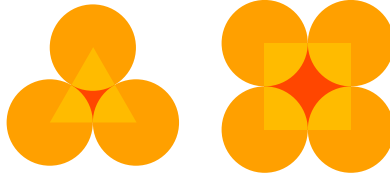
في الفضاء، عندما يكون الركم منتظما فإننا نحصل على كثافة* عظمى (كما هو الحال في شبكات البلورات) حينما تكون الكريّات في رؤوس، وفي مراكز السطوح (الوجوه).

يسمى هذا الركم «ركما مكعبا بسطوح ممرزة». أما كثافته فهي ٧٤٪.

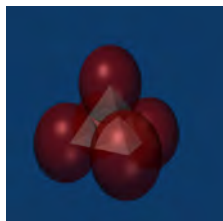
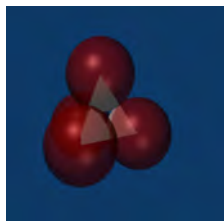
فيما يخص ركم الكريّات ذات الأقطار المختلفة أو ذات الأشكال المسطحة فإن مشكل الكثافة العظمى ما زال مطروحا.

* الكثافة هي نسبة المساحة أو الحجم المملوء بالكريّات داخل الغلاف الذي يحتويها (هنا، المربع، الهرم، المكعب).

للذهاب بعيداً



حساب كثافة هذه الكومات من الأقراص يُرَدّ إلى المقارنة -في المربع (أو المثلث)- بين مساحة الجزء المملوء بالأقراص وبين مساحة المربع (أو المثلث).



حساب كثافة هذه الكومات من الكرات يُرَدّ إلى المقارنة -في المكعب (أو رباعي السطوح)- بين حجم الجزء المملوء بالكرات وبين حجم الهرم (أو رباعي السطوح).



اركم البرتقال

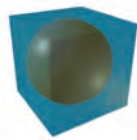
للذهاب بعيداً



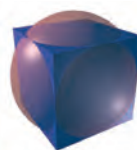
السؤال ١

إذا قارنا حجم كلغ من البن المطحون وكلغ من حبوب البن، فأيهما أصغر؟

السؤال ٢



ضع في مكعب كرة تمسّ وجوه المكعب الستة. في نظركم، ما هي نسبة الحجمين (لا تقم بأية حسابات)؟
أجب عن نفس السؤال باعتبار نسبة المساحتين. تأكد بالحساب بأن النسبتين متساويتان! تلك هي طريقة سمحت لأرخميدس بإيجاد مساحة وحجم غلاف الكرة.



السؤال ٣

ضع في مكعب كرة تمسّ أحرف المكعب.
أجب عن نفس الأسئلة السابقة.
التعليق هذه المرة سيكون كالتالي: نسبة الحجمين يساوي ضعف الكثافة العظمى لركم الكرات.

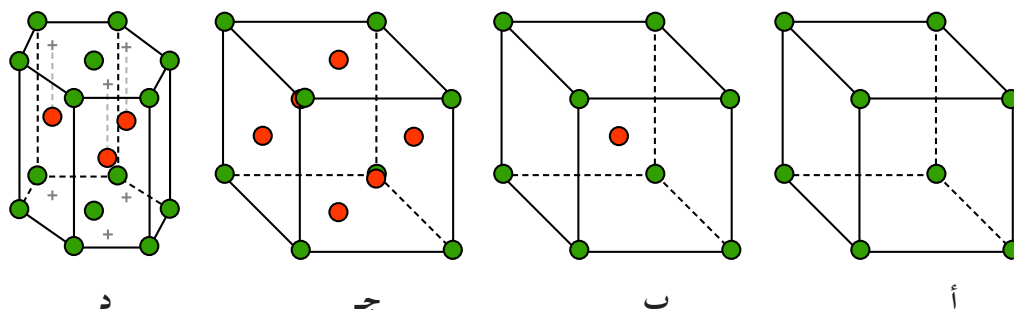
بعض النتائج التي يسهل التأكد منها

(أ) ركم مكعب بسيط. الكثافة: $\frac{1}{6}$

(ب) ركم مكعب ممرّز. الكثافة: $\frac{8}{3\sqrt{2}}$

(ج) ركم مكعب ذي وجوه ممرّزة. الكثافة: $\frac{6}{2\sqrt{2}}$

(د) ركم سداسي متراص. الكثافة: $\frac{6}{2\sqrt{2}}$



مهن الرياضيات

كل المؤسسات التي تُعنى بتجهيز المواد والحفاظ على الحبوب وتعبئة الأدوية...
الفيزيائيون والمهندسون الذين يهتمون بدراسة المواد وركم الذرات. ويستعمل الركم أيضا في التشفير المعلوماتي للبرقيات وتصويب أخطائها تلقائيا (شفرات هامينغ Hamming)!

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Packing - Density - Kepler - Hale



متعددات السطوح

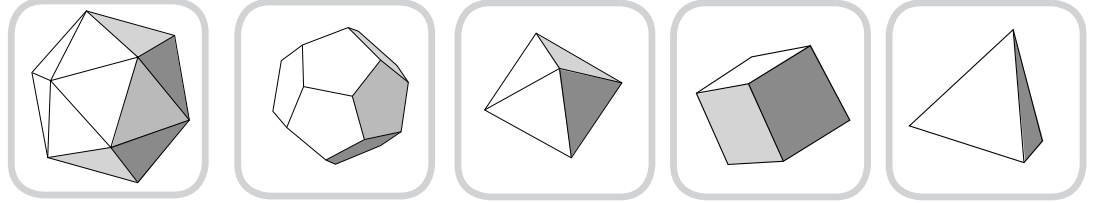
أنجز ذلك بنفسك

٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤

المستلزمات: نماذج من متعددات السطوح، مقص أو مقطع أوراق، غراء

إنشاء متعددات سطوح

- انطلاقاً من نموذج من الورق المقوى أو من تجميع مضلعات منتظمة، المطلوب إنشاء مجسمات إفلاطون الخمسة، ورباعي سطوح منتظمين، وهرم مربع القاعدة...
- اختر متعدد سطوح وأدره.
- كم له من وجه، من رأس، من حرف؟



ماذا أتذكر؟

متعدد سطوح منتظم هو مجسم وجوهه مكونة من نفس المضلع المنتظم، وموزعة بنفس الكيفية حول كل رأس. ثمة ٥ متعددات سطوح من هذا القبيل تسمى مجسمات إفلاطون.

نقول عن متعدد سطوح إنه نصف منتظم إذا كانت الوجوه من نوعين أو ثلاثة أنواع من المضلعات المنتظمة. هناك ١٣ متعدد سطوح من هذا الصنف تدعى مجسمات أرخميدية.

بخصوص متعددات السطوح المحدبة المنتظمة أو غير المنتظمة هناك علاقة بين عدد الرؤوس والأحرف والوجوه وهي:

$$R + C = 2 + A$$

اكتشف هذه العلاقة أولر Euler عام ١٧٥٢.

ماذا يحدث في حال بيان مستو؟ وفي حال مجسم بثقب؟ بثقين؟

المطلوب ملء الجدول التالي:

متعدد السطوح	الوجوه	الرؤوس	الأحرف
مكعب	٦	٨	١٢
...			

... هل هناك علاقة بين هذه الأعداد؟

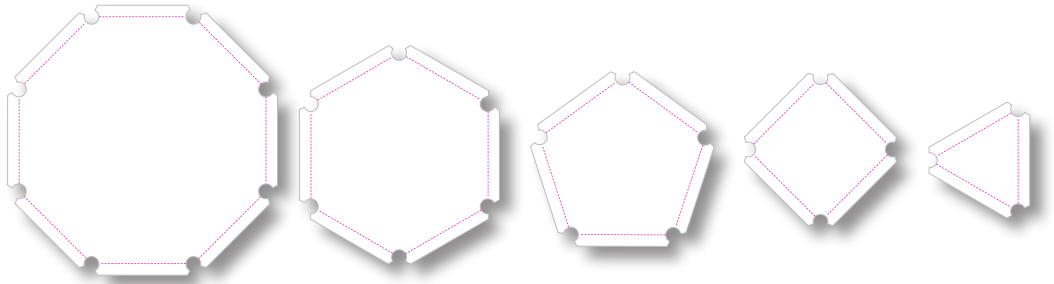
أنجز ذلك بنفسك

٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩

المستلزمات: نماذج المضلعات، ٢ ورق مقوى، مقص، مثقاب، مقطع عجينة

أنجز واختتم...

- قص كما هو مبين مضلعات منتظمة عدد أضلاعها ٣، أو ٤، أو ٥، أو ٦، أو ٨.
- جمّعها لتشكيل منها متعدد سطوح منتظم، ونصف منتظم.
- كيف يمكن إنشاء متعددات سطوح منتظمة مختلفة؟ ومتعددات سطوح نصف منتظمة؟



مهن الرياضيات

تستعمل هذه الهياكل الفضائية من قبل المعمارين. لكننا نجد أيضاً في الطبيعة إذ يُعنى بها الفيزيائيون (مسائل الركم)، والبيولوجيون، وعلماء الطبيعة (عند اهتمامهم بـ «الديناميات» وهي نوع من الطحالب النهرية).

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Polyhedra - Euler - Plato - Archimede



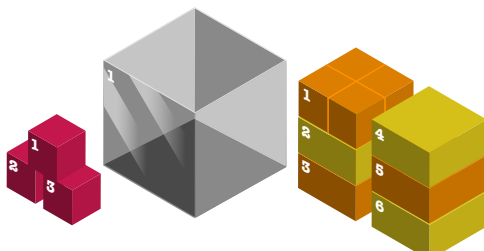
مسائل معقدة

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ٣ مكعبات صغيرة خشبية (أو من مادة الإسفنج)
٦ صفائح (من نفس المادة) مصنوعة من ٤ مكعبات منشورة، ١ مكعب من $3 \times 3 \times 3$

املا الصندوق!

التحدي: املا الصندوق الكبير ذي الأبعاد $3 \times 3 \times 3$ وحدات بالصناديق الأصغر المحاذية له!



أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: محفظة ظهر، وأدوات من أجل وضعها في المحفظة

مسألة محفظة الظهر

التحدي: املا محفظة الظهر بأقصى قيمة (نقدية) للأدوات بدون تجاوز وزن ١٥ كغ.



أنجز ذلك بنفسك

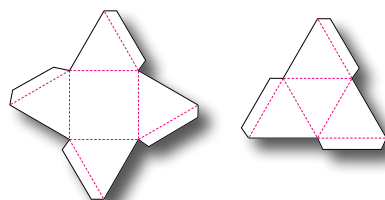


المستلزمات: ٢ نموذجاً رباعي سطوح، ١ مقطع أوراق أو ١ مقص، ١ أنبوب غراء

الهرم الكبير

شكل ٦ رباعيات سطوح منتظمة و ٦ أهرامات مربعة الأساس بنفس الوجوه المثلثية.

بهذه الأهرامات الصغيرة قم بإنشاء هرم ارتفاعه ضعف ارتفاع الأهرامات الصغيرة. قارن أحجام هذه الأهرامات.



مهن الرياضيات

فضلاً عما يجري في الحياة اليومية فإن هذه المسائل، الخاصة بمميزات الملء الأقصى، تستخدم من قبل عمال النقل البري والجوي والبحري، وكذا كل المؤسسات التي تشتغل بتجهيز وتكييف مختلف المواد.

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Pyramid volumes - Complex Problems - P-NP Problems

ماذا أتذكر؟

في الحياة اليومية نصادف دائماً هذه المسألة: وضع أكبر كمية ممكنة من الأشياء، أو من الصناديق في صندوق أكبر.

يعتبر الرياضياتيون - وغيرهم - أن الأمر يتعلق بمسألة معقدة: كلما زادت تلك الأشياء كلما زادت المدة التي يستدعيها الحل. والملاحظ أن هذه المدة تتزايد أسياً مع عدد الأشياء.

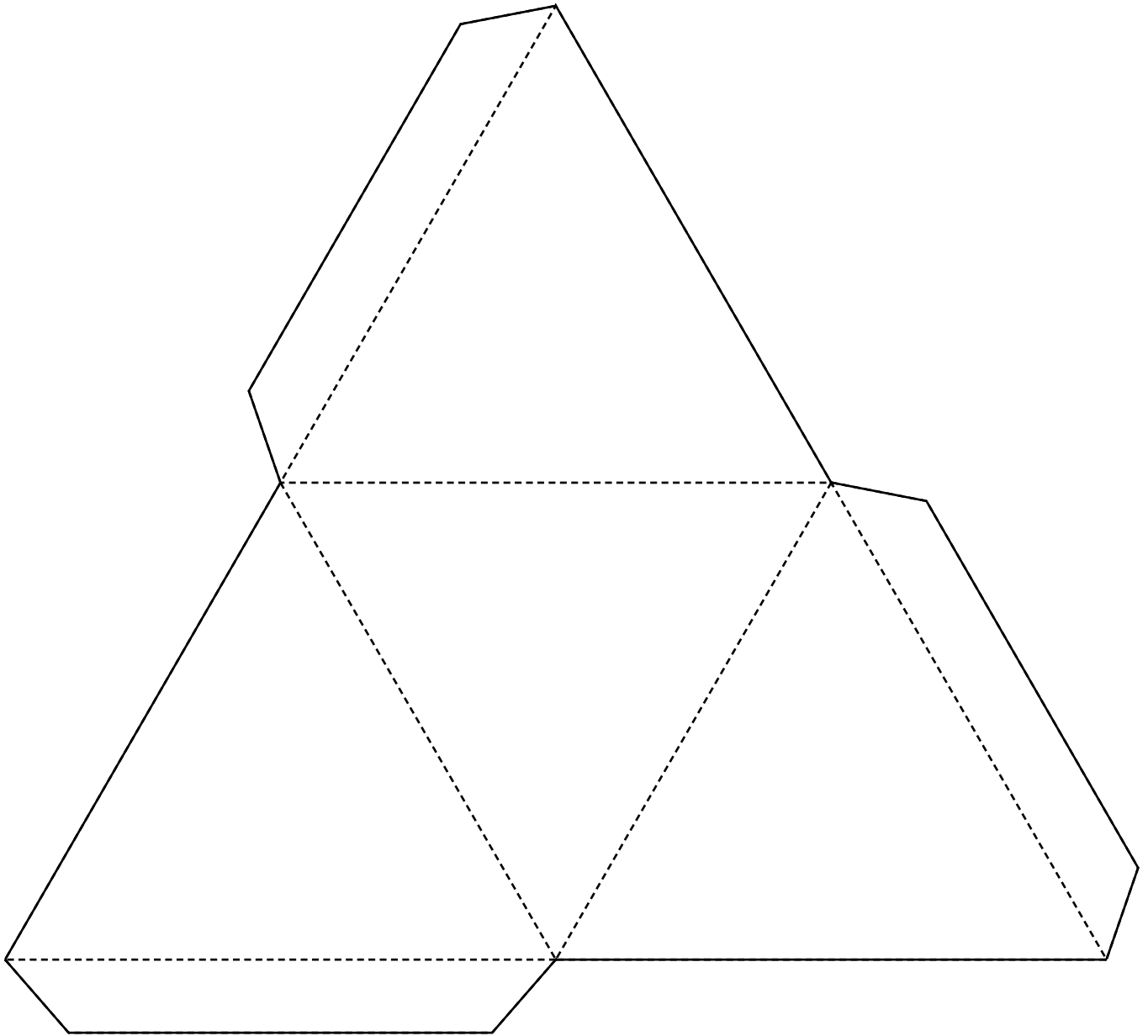
ماذا أتذكر؟

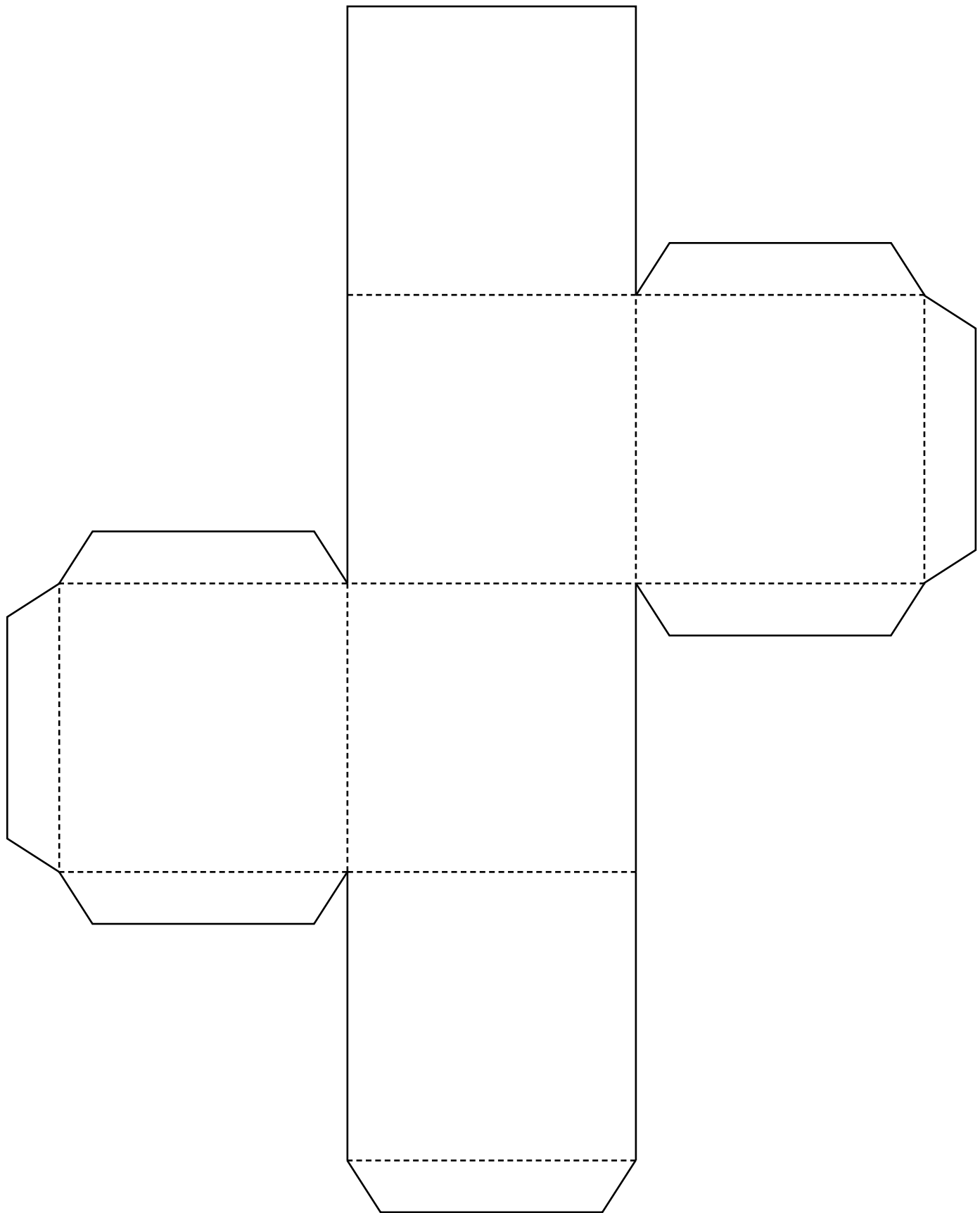
الهرم الذي يتضاعف ارتفاعه له حجم يزداد بـ ٨ أضعاف. وهكذا نستطيع بإعادة تركيب مقارنة حجوم هذين النوعين من الأهرام. وباعتبار ٣ مرات الارتفاع يمكننا إعادة إيجاد قانون حجم أي هرم: الحجم = (القاعدة × الارتفاع) / ٣. نتأكد مسائل الركم عموماً إذا ما اعتبرنا متعددات سطوح أخرى.

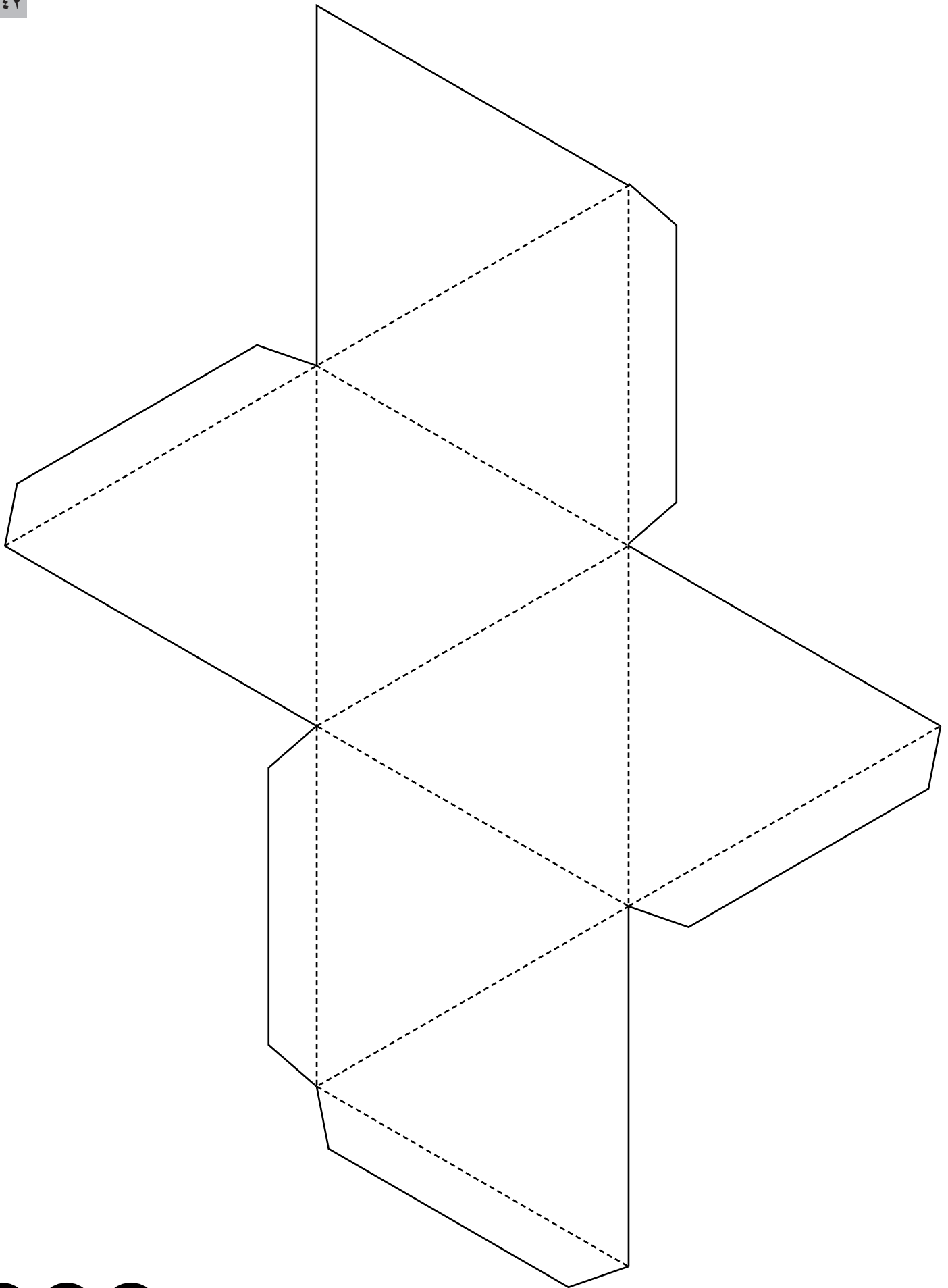
للذهاب بعيداً...

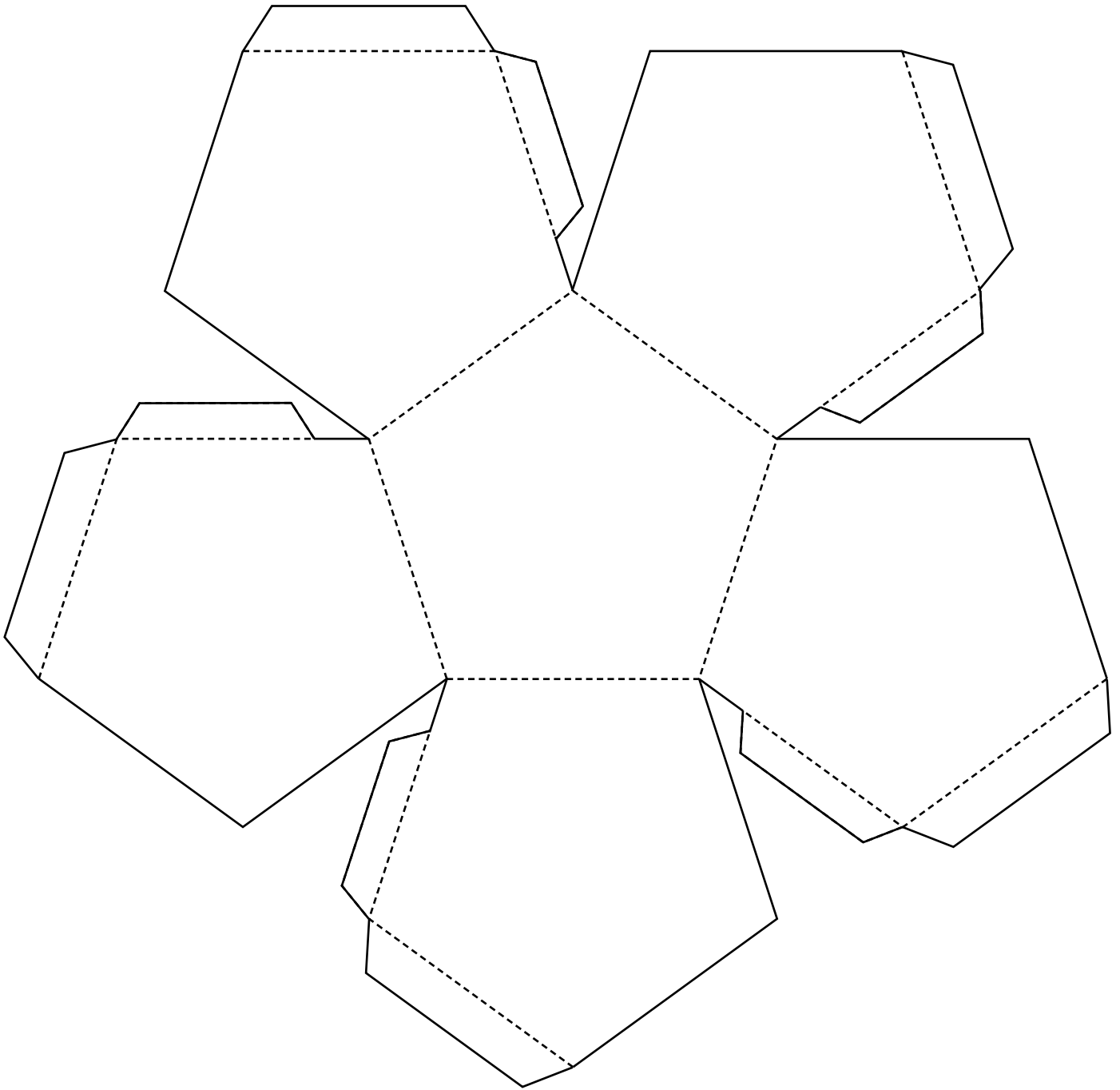
أوجد متعددات سطوح أخرى تملأ، مثل المكعبات، لوحدها الفضاء دون ترك فراغات ودون إحداث تشوهات.





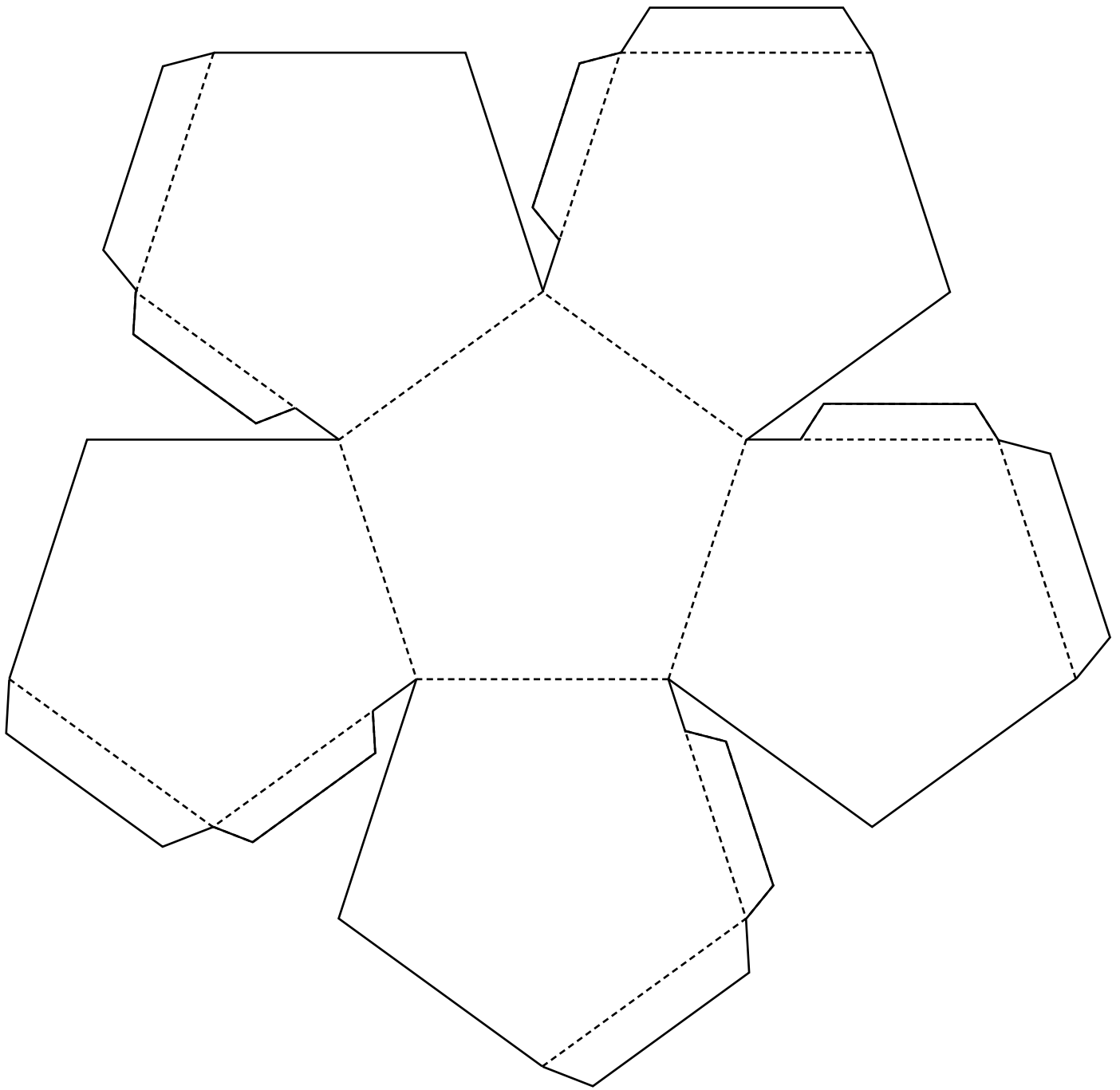






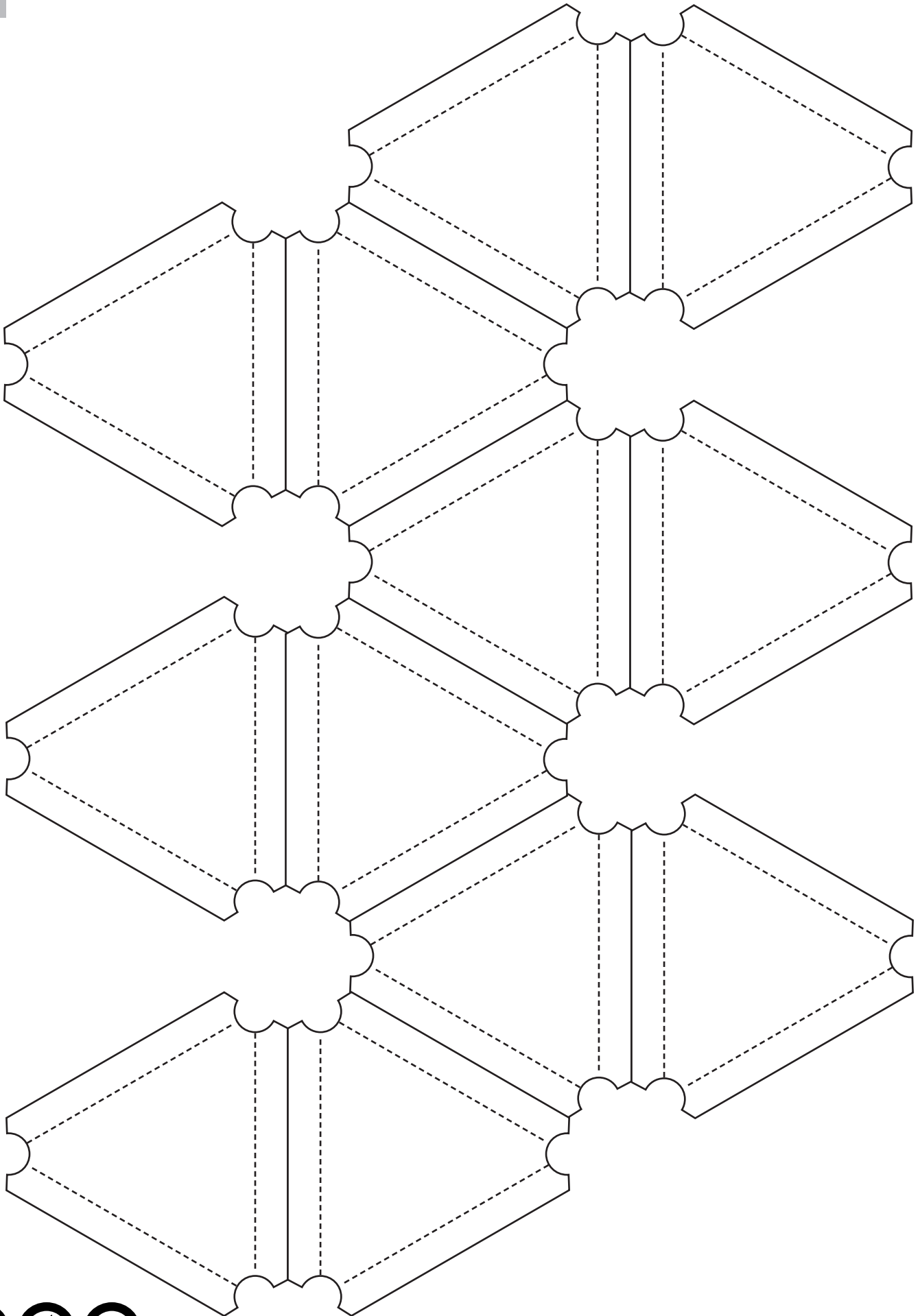
٢/١

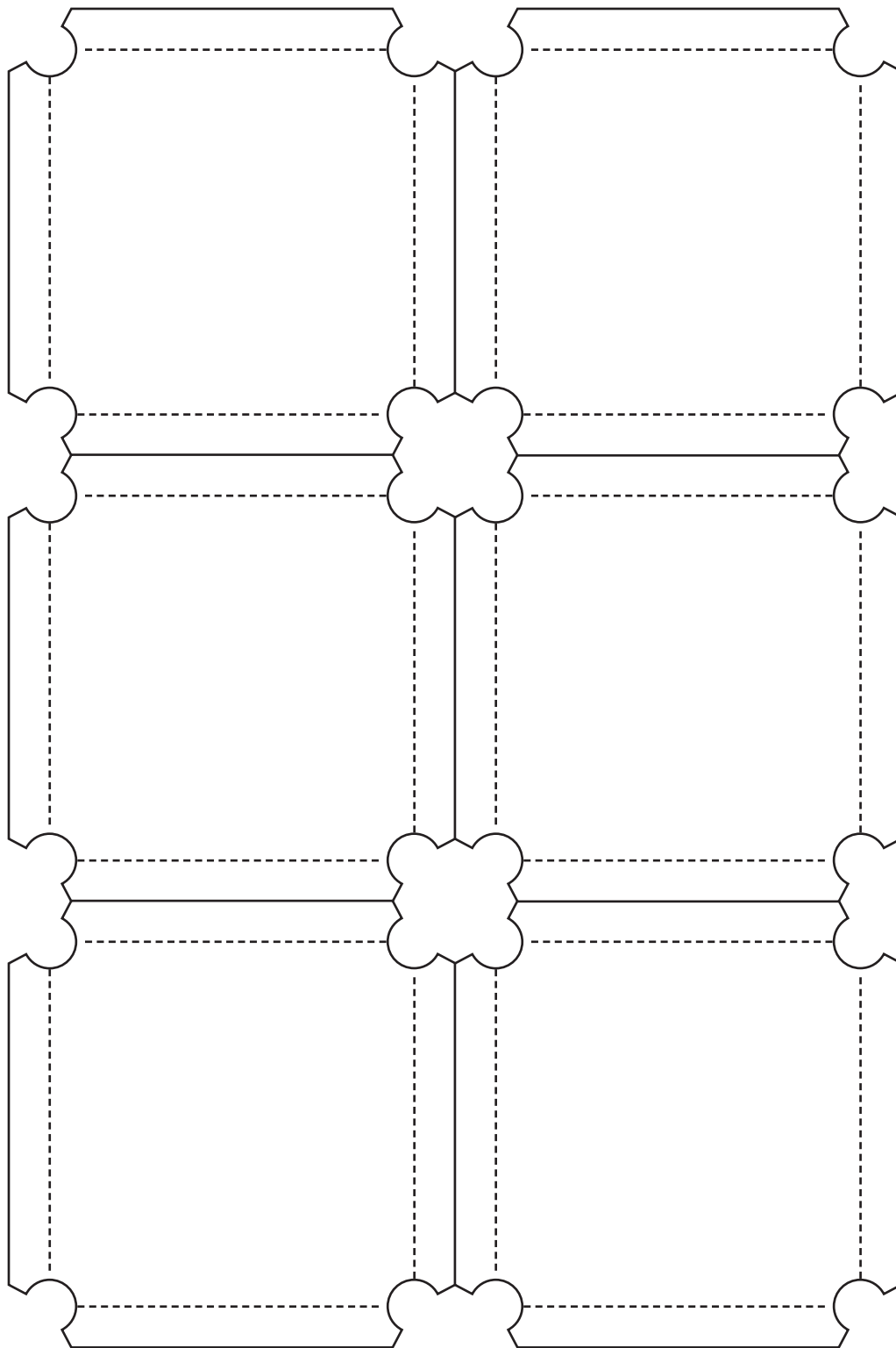


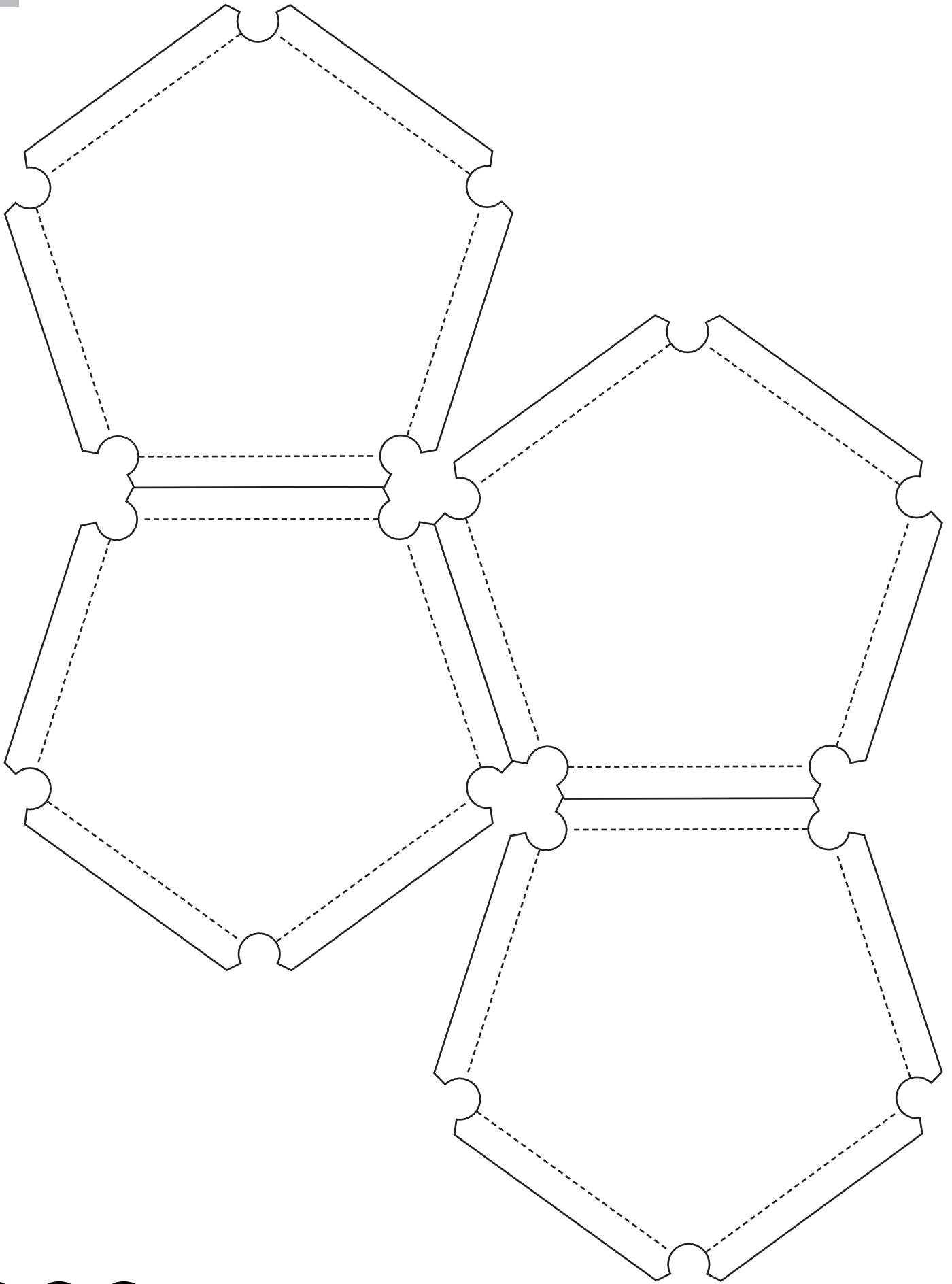


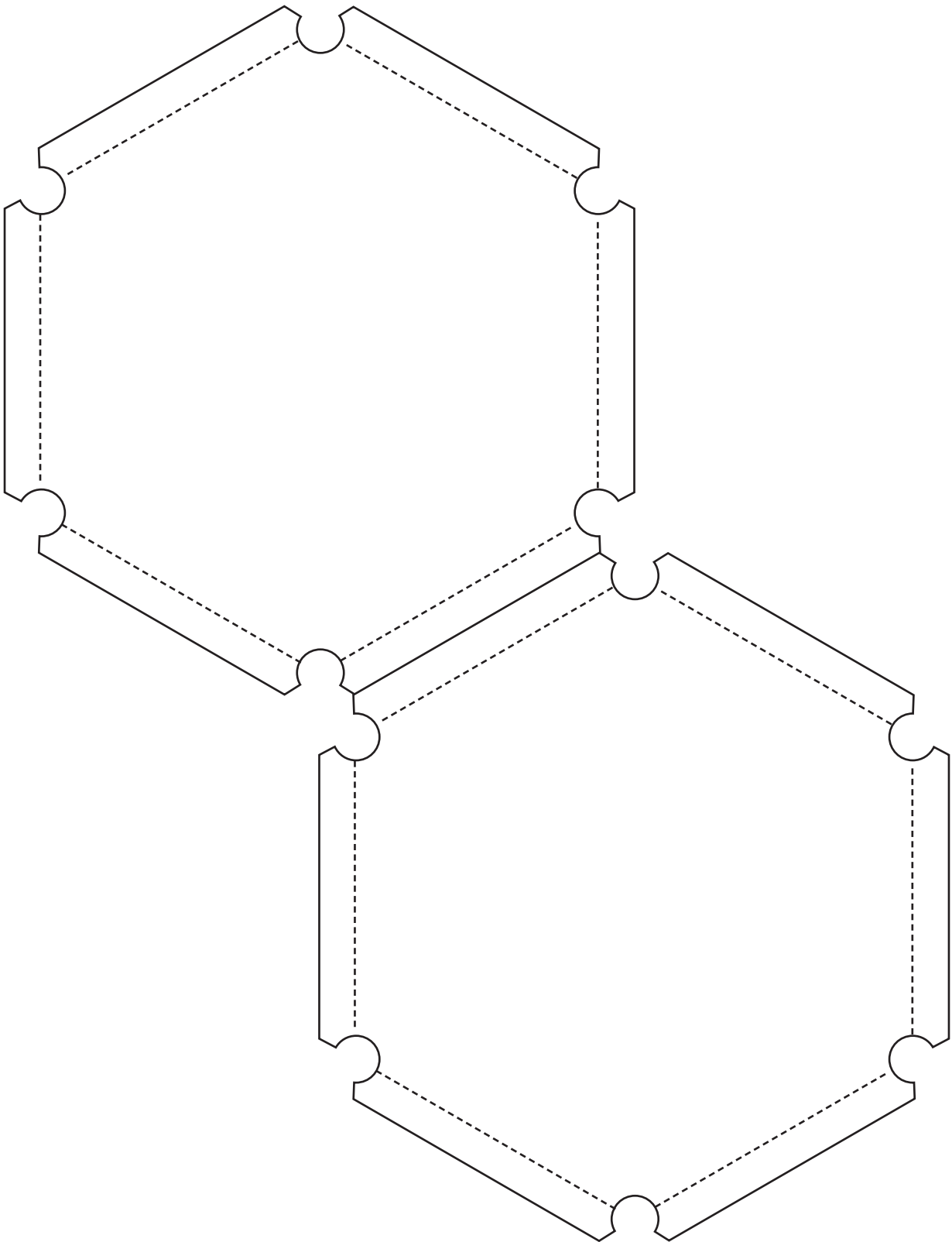
2/2

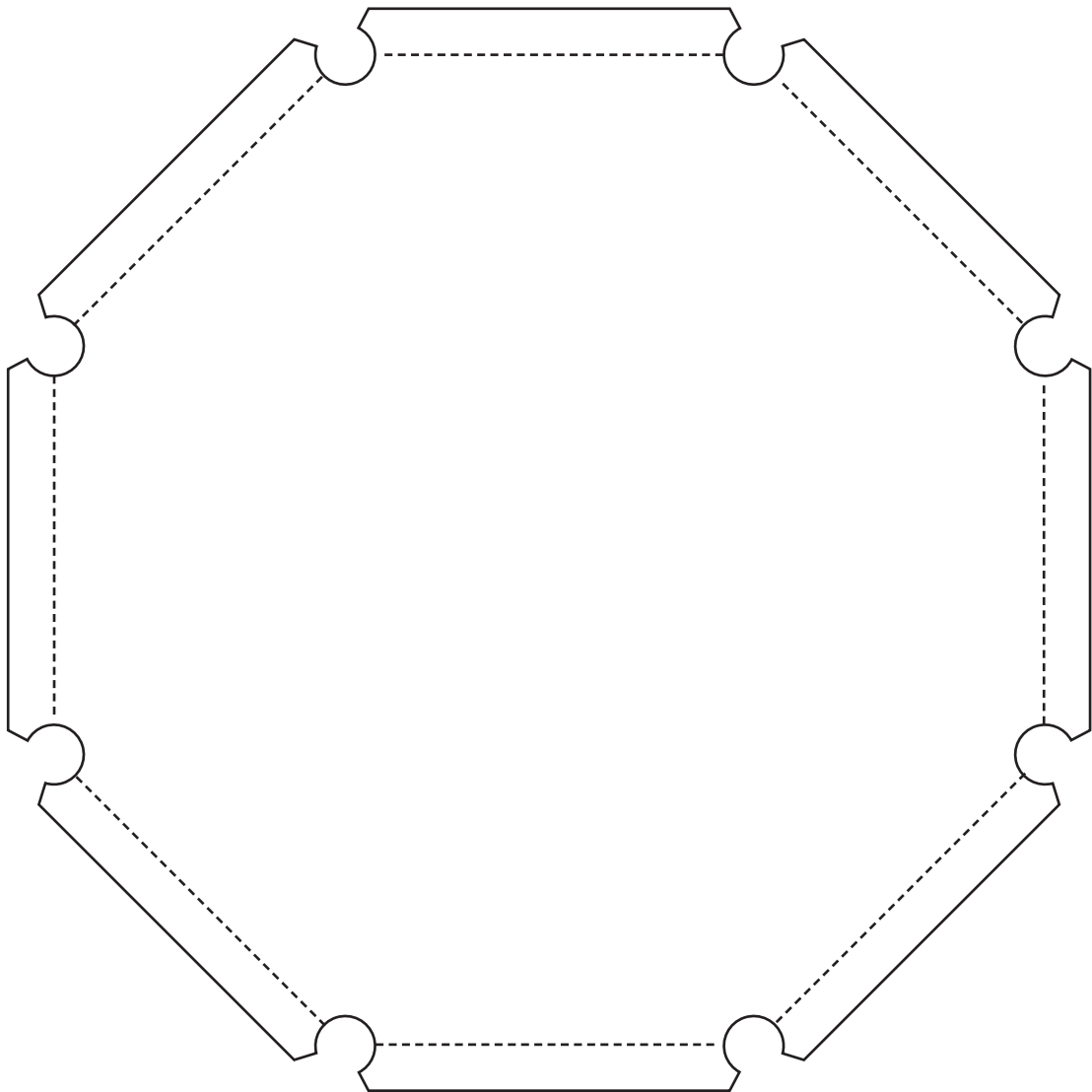


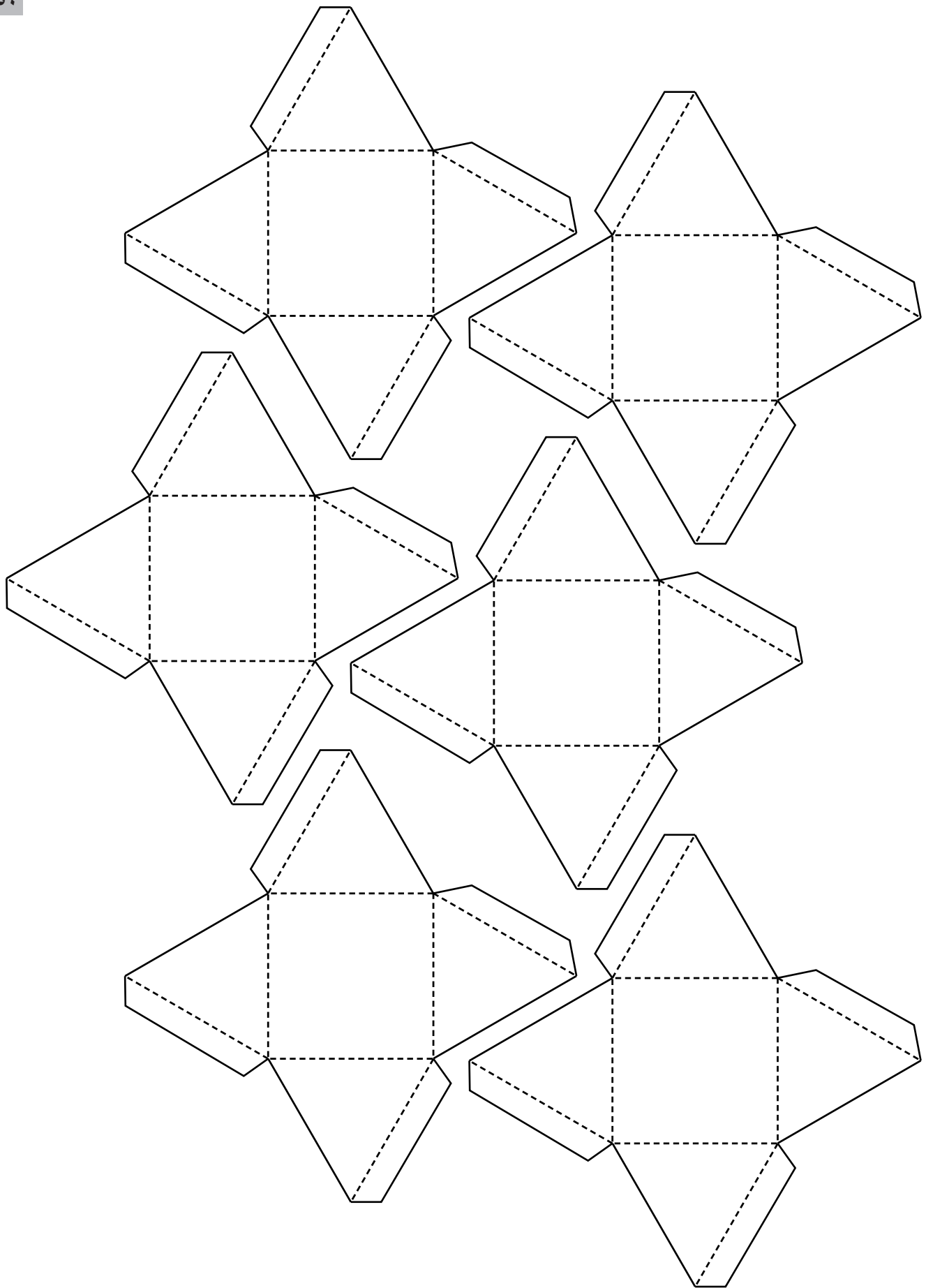


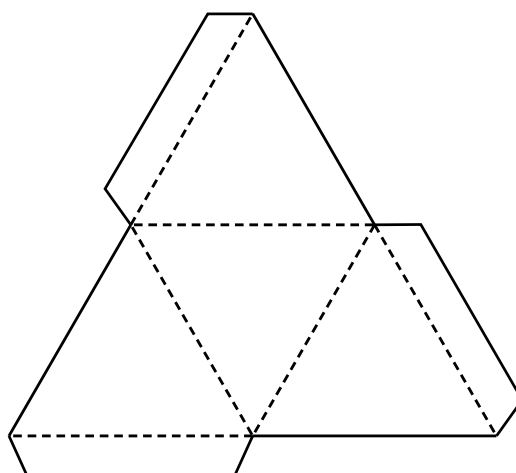
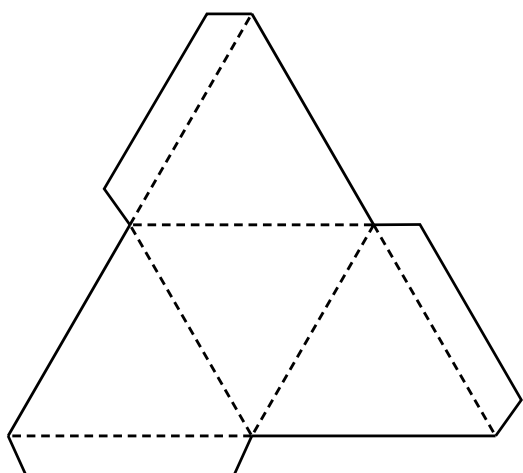
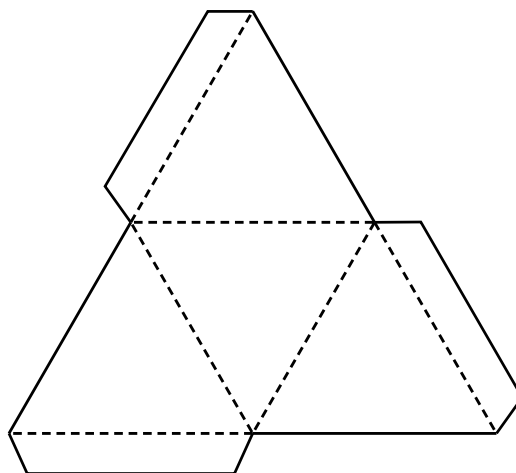
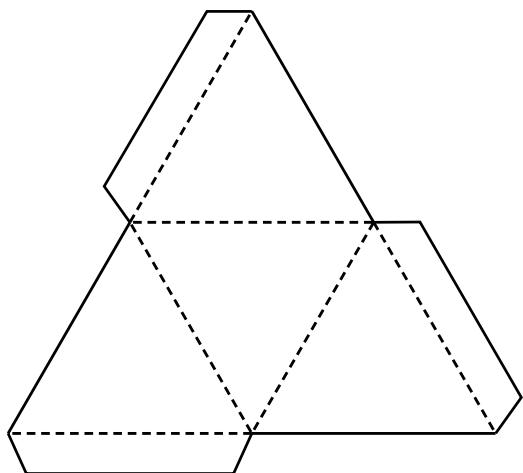
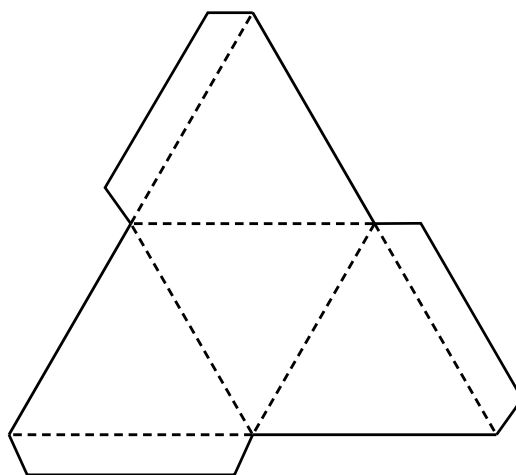
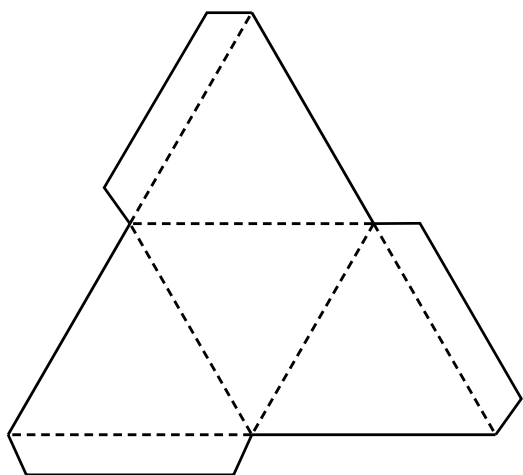








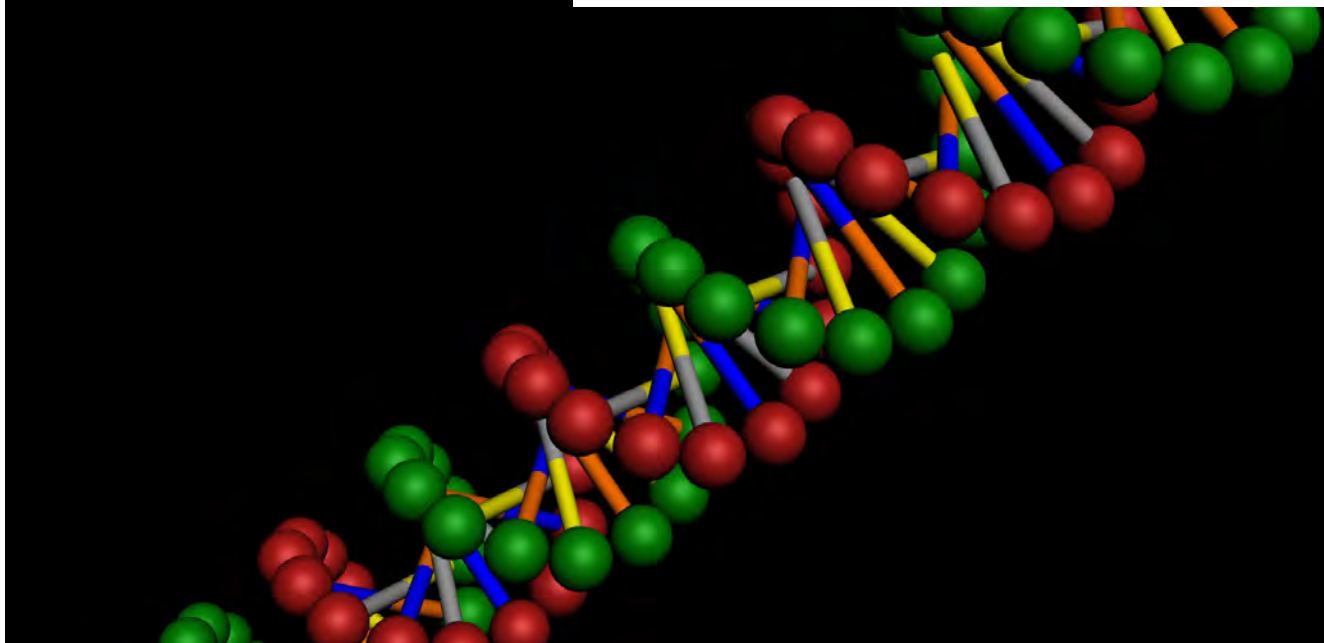






٤ . الاتصال

بخط واحد
٤ ألوان تكفي
آلو، هذا أنت؟





بخط واحد

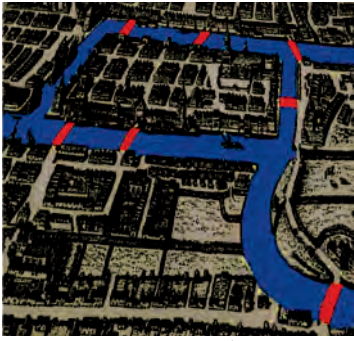
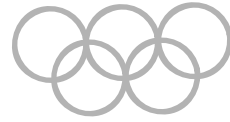
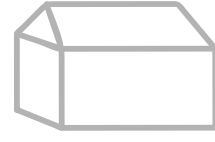
أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: نماذج من الرسومات، ١ قلم

٥٧

ارسم بخط واحد...

حاول إعادة رسم هذه الأشكال دون أن ترفع «القلم» عن الورقة وبدون المرور مرتين على نفس الخط. متى يكون ذلك ممكناً؟ مستحيلاً؟



ماذا أتذكر؟

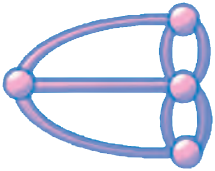
كونيغسبارغ* Königsberg، عام ١٧٣٦

هل يمكن السير في المدينة بعبور هذه الجسور السبعة مرة واحدة لا غير؟

حل هذه المسألة التي كانت منطلق نظرية البيانات، تشبث أولر Euler بالمعلومة الأساسية : هناك ٤ أحياء تفصلها مياه النهر، أي ٤ «نقاط» ينبغي الربط بينها بواسطة ٧ خطوط ترمز إلى الجسور.

فصارت المسألة تطرح كالتالي: هل يوجد في هذا الرسم طريق يمر مرة واحدة على كل خط؟ تلك كانت انطلاقة نظرية البيانات.

جواب أولر: كم نقطة ينتهي فيها عدد فردي من الخطوط؟ لن يكون هناك حل إلا إذا كان هذا العدد مساوياً لـ ٠ أو ٢!



سؤال: ماذا لو نضيف جسراً يربط ضفة بأخرى (كما هو الحال في الوقت الراهن)؟

* تسمى المدينة اليوم كالينينغراد Kaliningrad (المنطقة الروسية المفصولة عن روسيا ببولندا وليتوانيا).

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ لعبة دومينو مع إزالة أضعاف الحجارة

دومينو-دومينو

حاول عمل سلسلة باستخدام كل حجارة الدومينو متقيداً بقواعد اللعبة. أعد الكرة بحذف الحجارة الحاملة لرقم ٦. ثم بدون تلك التي تحمل الرقم ٥... هل هذا ممكن في جميع الحالات؟

كل حجرة دومينو تمثل حرف بيان بـ ٧ رؤوس، مرقمة من ٠ إلى ٦. كل سبيل لأولر Euler يوافق سلسلة دومينو.

مهن الرياضيات

تستخدم نظرية البيانات لنمذجة ودراسة وضعيات ملموسة، مثل شبكات الاتصال، والدوائر الإلكترونية، وشبكات التوزيع - ماء، غاز، كهرباء، بريد... وكذا العديد من مسائل الإمداد والنقل والإنتاج...

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Graphs - Graph theory - Eulerian's path - Euler



٤ ألوان تكفي

أنجز ذلك بنفسك

٥٨

المستلزمات: خريطة جغرافية، ٤ أقلام أو أقلام لباد



ب ٤ ألوان فقط !!!

لاعب أو لاعبان.
حاول تلوين هذه الخريطة باستعمال أقل ما يمكن من الألوان.
لا تنس البحر!
قاعدة اللعبة: كل بلدين متجاورين يُلونان بلونين مختلفين.
الخاسر هو من لا يستطيع مواصلة اللعب.

أنجز ذلك بنفسك

٦٣

٥٩

المستلزمات: متعددات سطوح منتظمة، ٤ (رباعي سطوح، مكعب، ثماني سطوح، متعدد سطوح اثنا عشري، أهرامات...)، أقلام وأقلام لباد بأربعة ألوان



وفي الفضاء؟

المطلوب إنشاء متعدد سطوح منتظم (أو غير ذلك) باحترام قاعدة الألوان الأربعة: سطحان مشتركان في حرف ينبغي أن يُلونا بلونين مختلفين.
وبنفس الطريقة أنشئ متعدد سطوح فيه ثقب وحاول تلوينه!

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ رسم في المستوي وآخر على طارة

٣ آبار و ٣ منازل



في كل حالة، حاول ربط هذه الآبار الثلاثة وهذه المنازل الثلاثة بثلاث شبكات سطوح دون أن تتقاطع الشبكات.
سؤال:
ماذا لو نضيف بثرا رابعا ومنزلا رابعا؟

سؤال

تواجد ذئب وماعز ورأس كرنب على الضفة اليمنى من النهر.
وهناك عابر ينبغي عليه نقلها إلى الضفة الأخرى، لكنه لا يستطيع نقل أكثر من واحد منها في كل رحلة.
ساعده! احذر!
الذئب يأكل الماعز والماعز يأكل الكرنب!!

مهن الرياضيات

تبحث هذه الخوارزميات في حل مسائل تجميع أشياء مع التقيّد بقواعد معيّنة. ولهذه المسائل تطبيقات ملموسة في وضع برامج مهام محددة (تواريخ عمليات، مواقيت القيام بأشغال أو إجراء اختبارات...)، أو وضع شبكات هاتفية نقالة، أو شبكات اتصال عبر الإنترنت، أو نقل مؤمن عبر الشبكة العنكبوتية...

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Graphs colouring - Algorithms - Genetic Algorithms

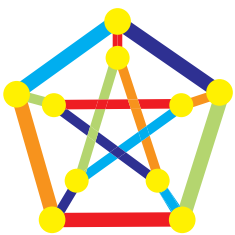
ماذا أتذكر؟

نظرية الألوان الأربعة

سمحت نظرية البيانات بنمذجة هذه المسألة وبتقليص عدد الحالات التي ينبغي دراستها. لكن الفضل يعود للحاسوب الذي تمكن من تحليل كل الوضعيات وإثبات أن ٤ ألوان تكفي لقضاء الحاجة.

من الممكن إيجاد خوارزمية تلوين آلية بـ ٦ ألوان. لكن المسألة لم تجد بعد حلا لحالة ٤ ألوان.

إنها مسألة «معقدة» إذ أن المدة المطلوبة لحلها عبر الخوارزميات تتزايد أسيا وفق عدد «البلدان». ثمة خوارزميات تسمى «غير حتمية» (مثل الخوارزميات الوراثية) تمكن من حلها بسرعة أفضل.





ألو، هذا أنت؟

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: خريطتان، ١ قلم

البائع المتجول (الرحالة التاجر)

مسافر يريد زيارة عشر مدن بقضاء أقل ما يمكن من الوقت في الطريق. ينبغي عليه الانطلاق من مدينة ثم الرجوع إليها بالمرور مرة واحدة بكل المدن الأخرى. ساعده على القيام برحلته.



أثينا	برلين	بروكسل	لشبونة	لندن	مدريد	أوسلو	باريس	روما	وارسو
٢	١	٤	٥	٣	٢	٤	١	٢	٣
٤	١	٤	٥	٣	٢	٤	١	٢	٣
٤	١	٤	٥	٣	٢	٤	١	٢	٣
٤	١	٤	٥	٣	٢	٤	١	٢	٣
٤	١	٤	٥	٣	٢	٤	١	٢	٣
٤	١	٤	٥	٣	٢	٤	١	٢	٣
٤	١	٤	٥	٣	٢	٤	١	٢	٣
٤	١	٤	٥	٣	٢	٤	١	٢	٣
٤	١	٤	٥	٣	٢	٤	١	٢	٣

ماذا أتذكر؟

المسافات يمكن قياسها من خلال المدة أو تكاليف قطعها أو من خلال تدفق الكهرباء أو الماء... لهذا النوع من المسائل - التي تصاغ بعبارة بسيطة - حلول تتطلب حسابات طويلة بقدر ضخامة عدد المدن.

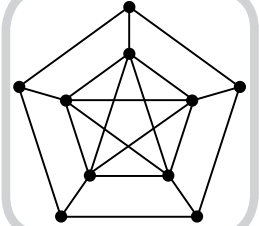
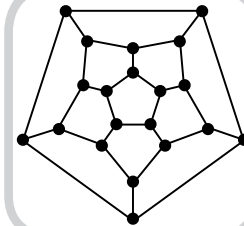
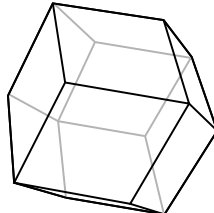
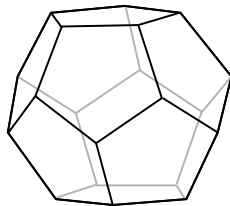
فإذا تطلبت ١٠ مدن ٦٠ مرحلة حسابية يقوم بها الحاسوب خلال ميكروثانية فإن ١٠٠ مدينة يقتضي ٦٠٢ (أي ٢ في ٢ ستين مرة) مرحلة حسابية ينجزها الحاسوب خلال مئات السنين. كلما كانت الخوارزمية معقدة كلما طالت مدة الحساب على الحاسوب.

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: خريطتان، ١ قلم

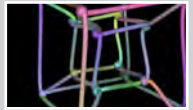
دورة حول العالم

اختر شكلا أو متعدد سطوح وحاول إيجاد طريق يمر بكل رأس من الرؤوس ولا يمر بأي منها أكثر من مرة.



ماذا أتذكر؟

البحث عن سبيل (طريق) هاميلتوني Hamiltonian يعني البحث عن سبيل يمر مرة واحدة بكل رأس. ليس هناك حل عام لهذا النوع من المسائل لحد الآن. إنها مسألة معقدة. لقد أثبت هاميلتون أن هناك حلولاً للعشرين رأساً في متعدد السطوح الإثني عشري المنتظم (المكوّن من ١٢ مضلعاً سداسياً). هل هذا يصدق على متعدد السطوح الإثني عشري الآخر (المكوّن من ١٢ معيّناً)؟



آلو، هذا أنت؟

أنجز ذلك بنفسك



المستلزمات: لوحة شطرنج وقطع للقص، ١ مقص

الخسارة للوزراء (في لعبة الشطرنج)

- حاول وضع ٨ وزراء على لوحة شطرنج بدون أن يتمكن أي منهم من وزير آخر.
- حاول تحريك ملك من خانة إلى أخرى بحيث يشغل مرة واحدة كل خانة (بدون استخدام القطر).
- حاول تحريك حصان على اللوحة بحيث يمر مرة واحدة على كل خانة؟

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ قلم

من الفيل إلى النمر

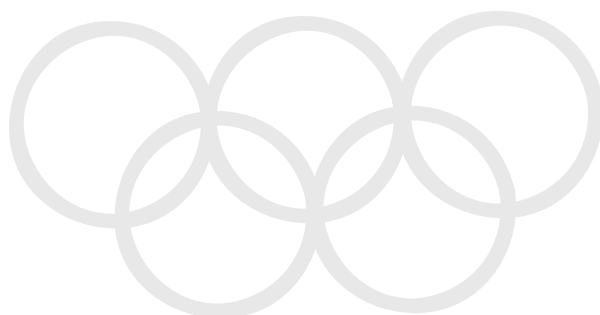
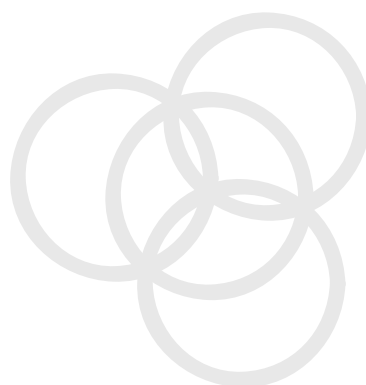
نتقل من كلمة 'فيل' إلى كلمة 'نمر' بتغيير حرف واحد في كل مرة، شريطة أن يكون لكل كلمة معنى (فيل، كيل، ...، نمر!) والإسراع بقدر المستطاع! وماذا عن الانتقال من 'شراب' إلى 'حمام'؟

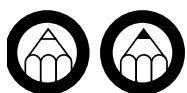
مهن الرياضيات

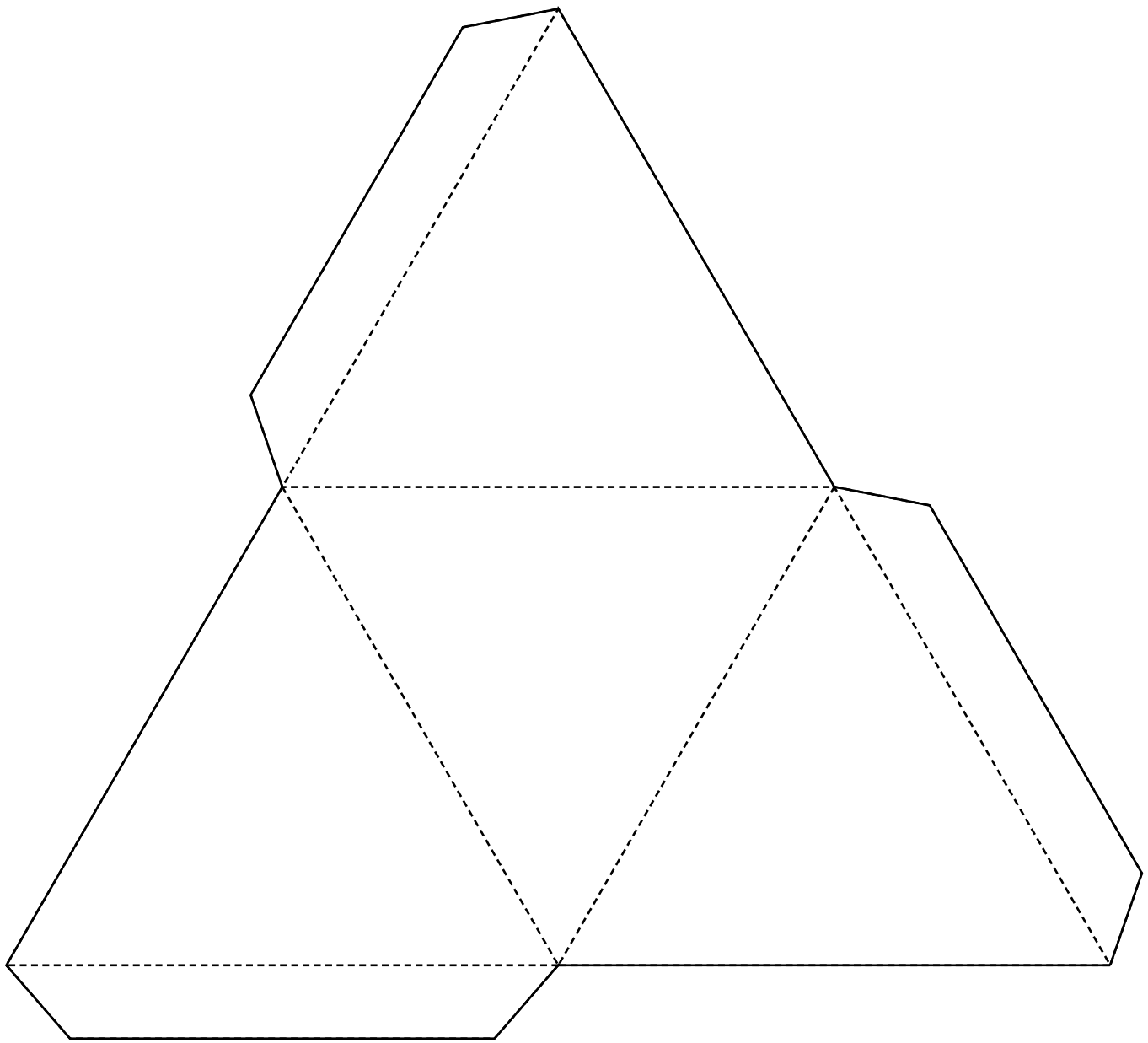
هناك العديد من الأبحاث قام بها الرياضياتيون والمعلوماتيون وعلماء الوراثة للوصول إلى خوارزميات فعالة قادرة على حل هذا النوع من المسائل المعقدة... مثل دراسة التسلسل المؤلف من ٣٠٠٠٠ إلى ١٠٠٠٠٠٠ أساس (A-T C-G) لجزيئ من الدنا DNA.

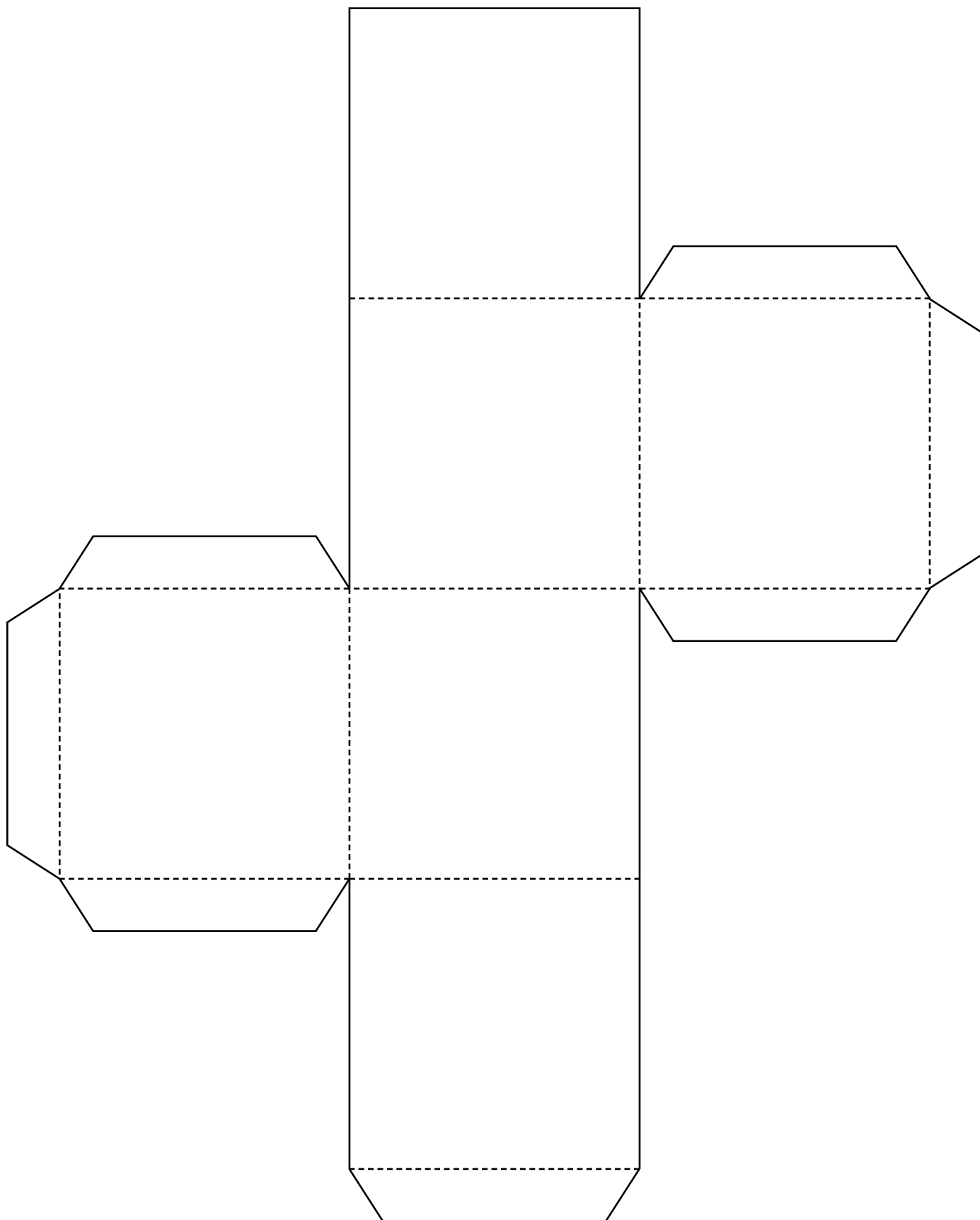
الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

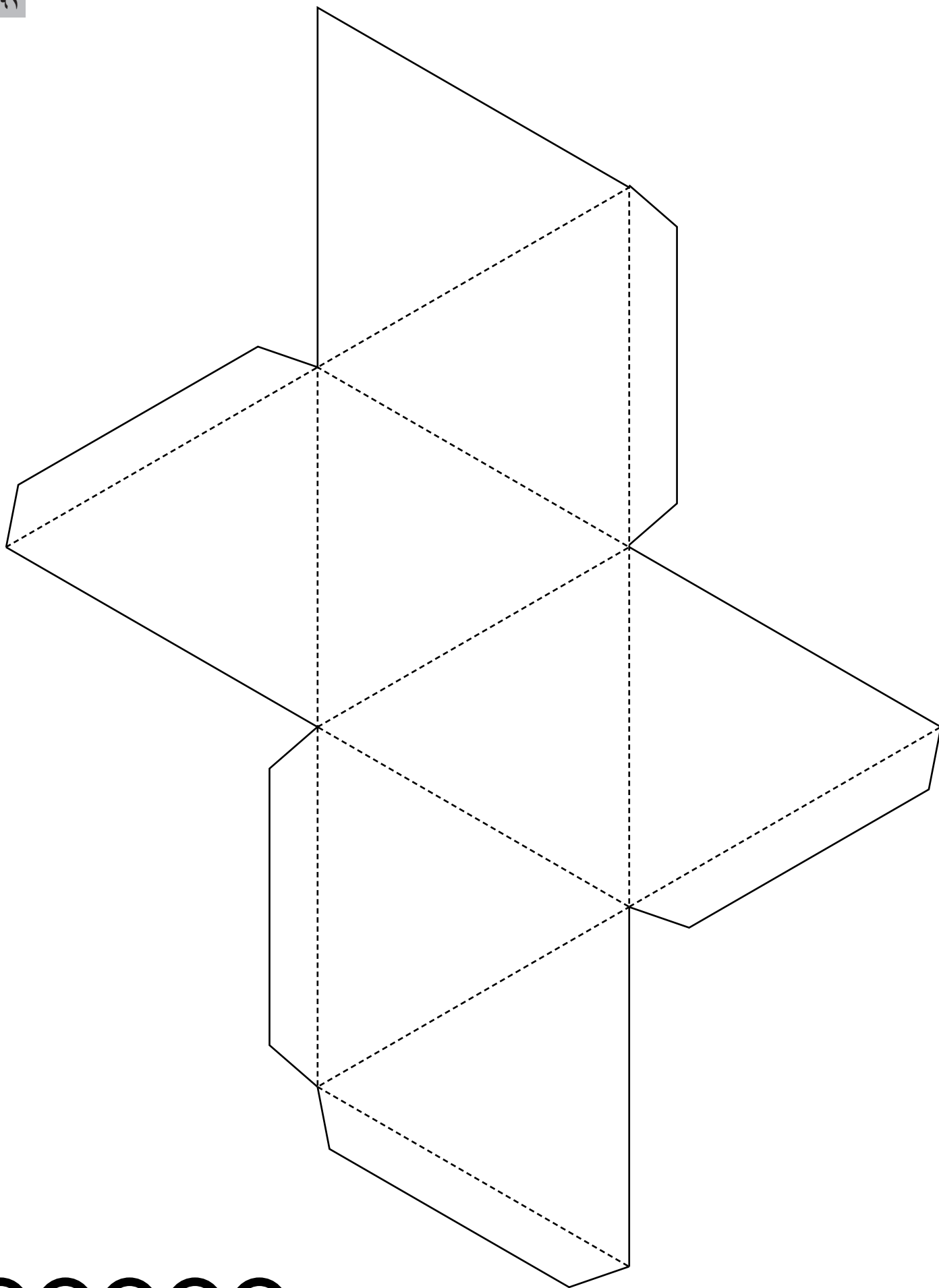
Graphs - Hamilton paths - Travelling salesman - Optimisation

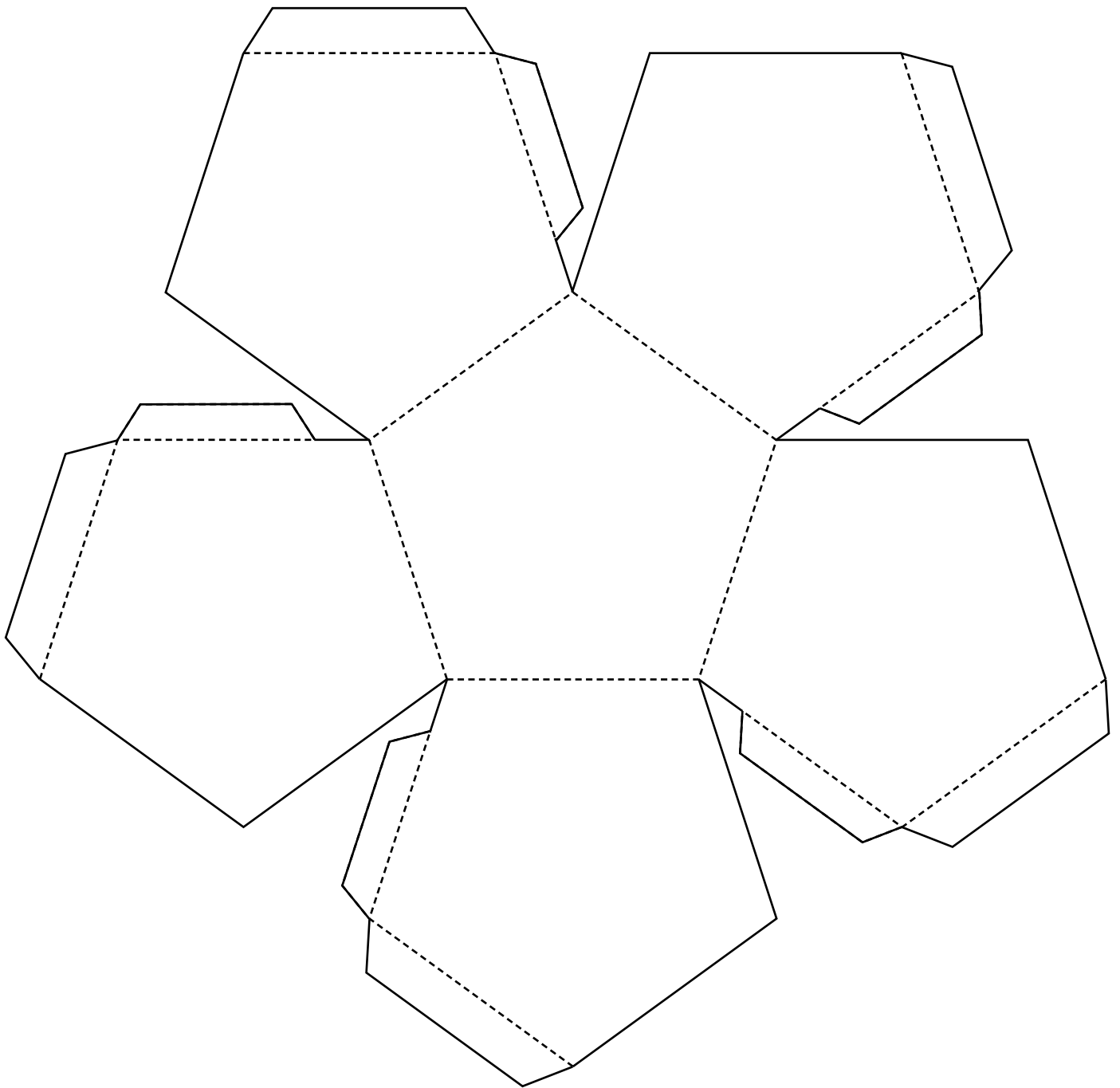






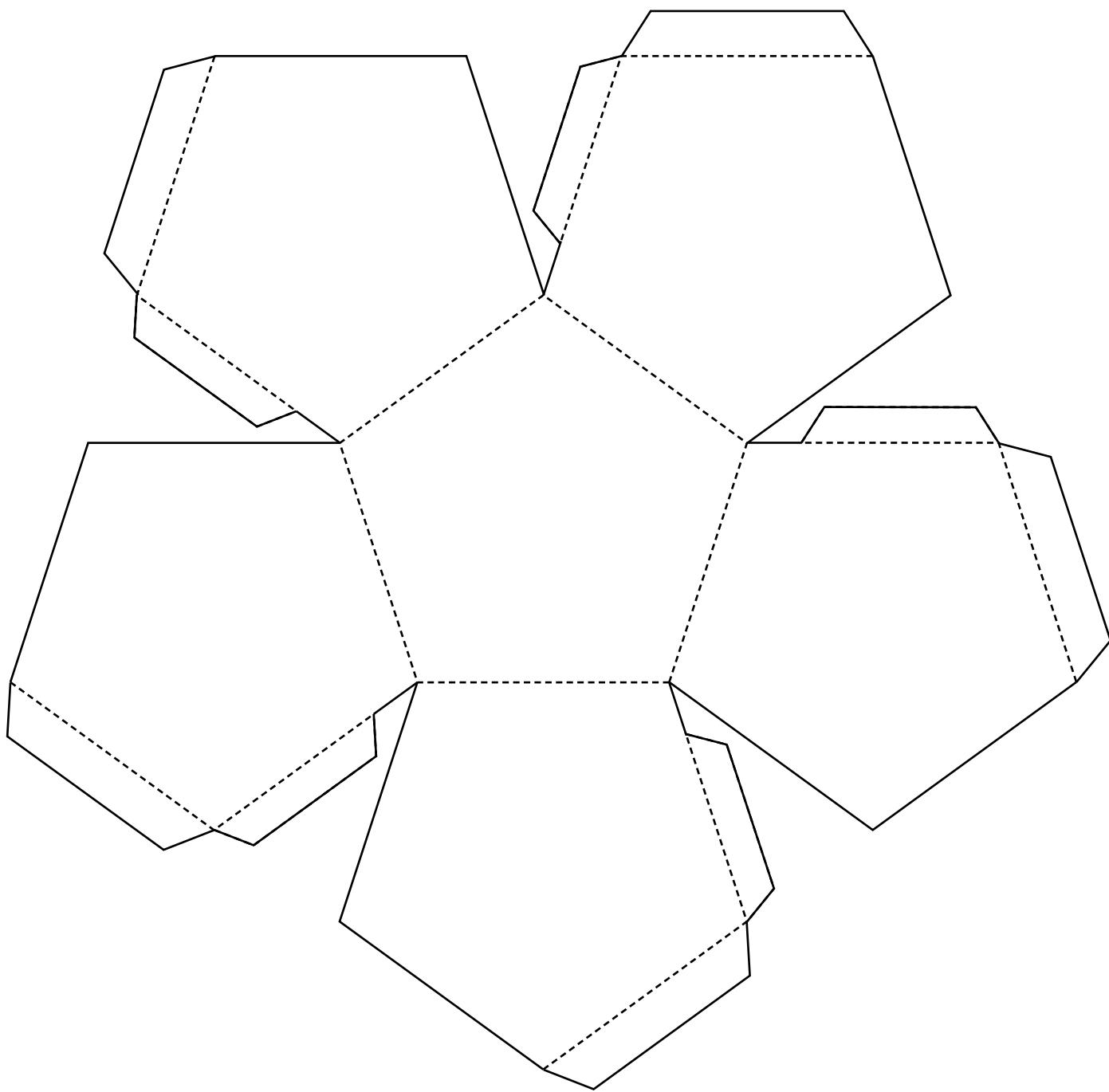






٢ / ١

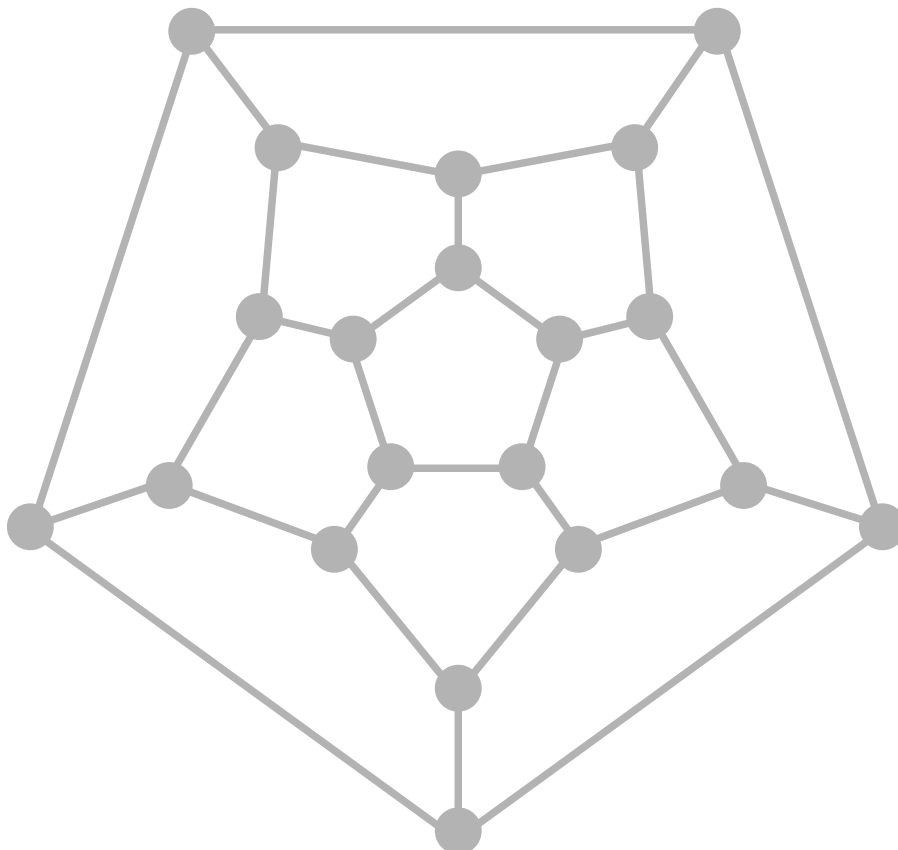
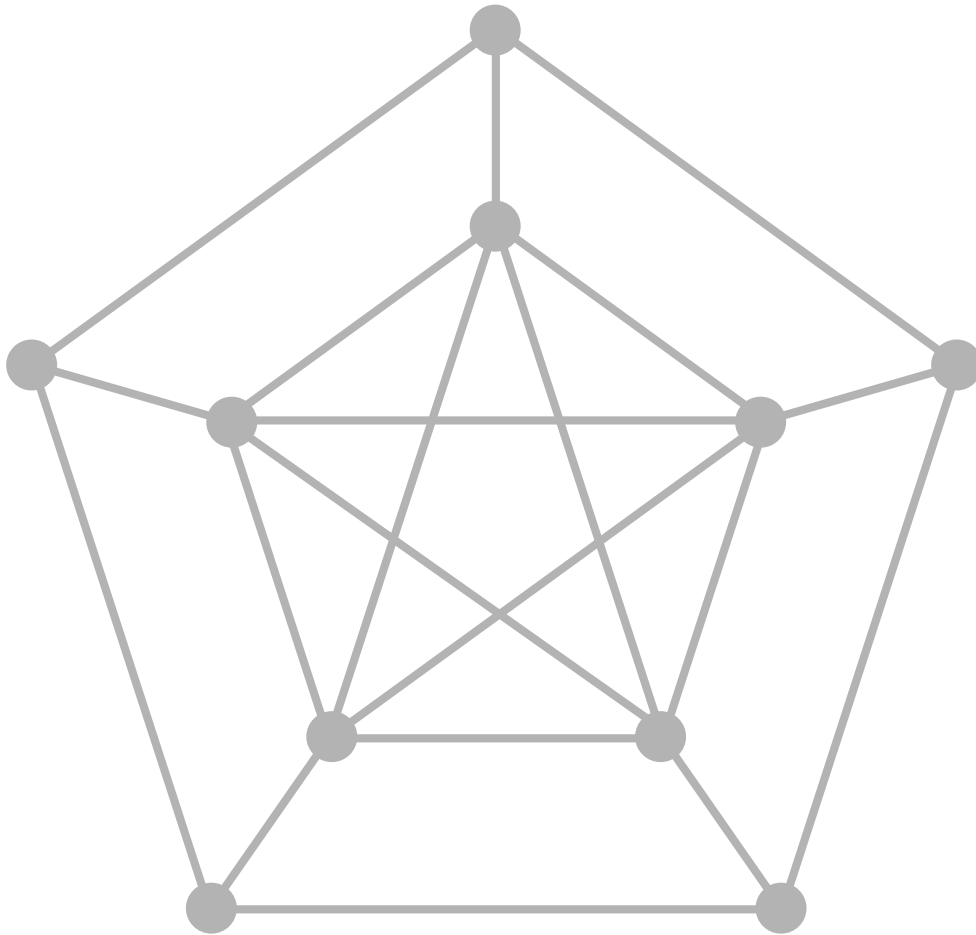


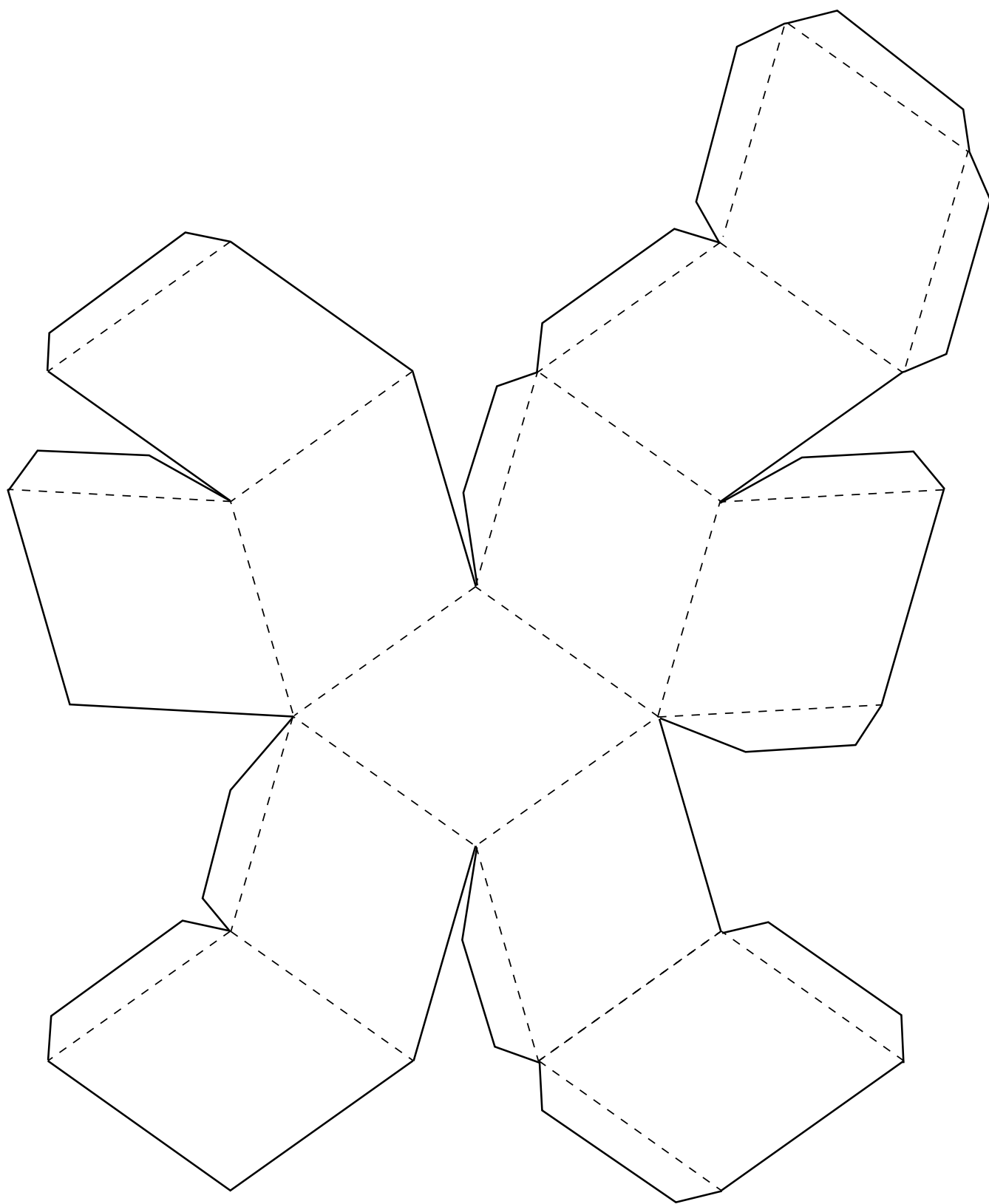


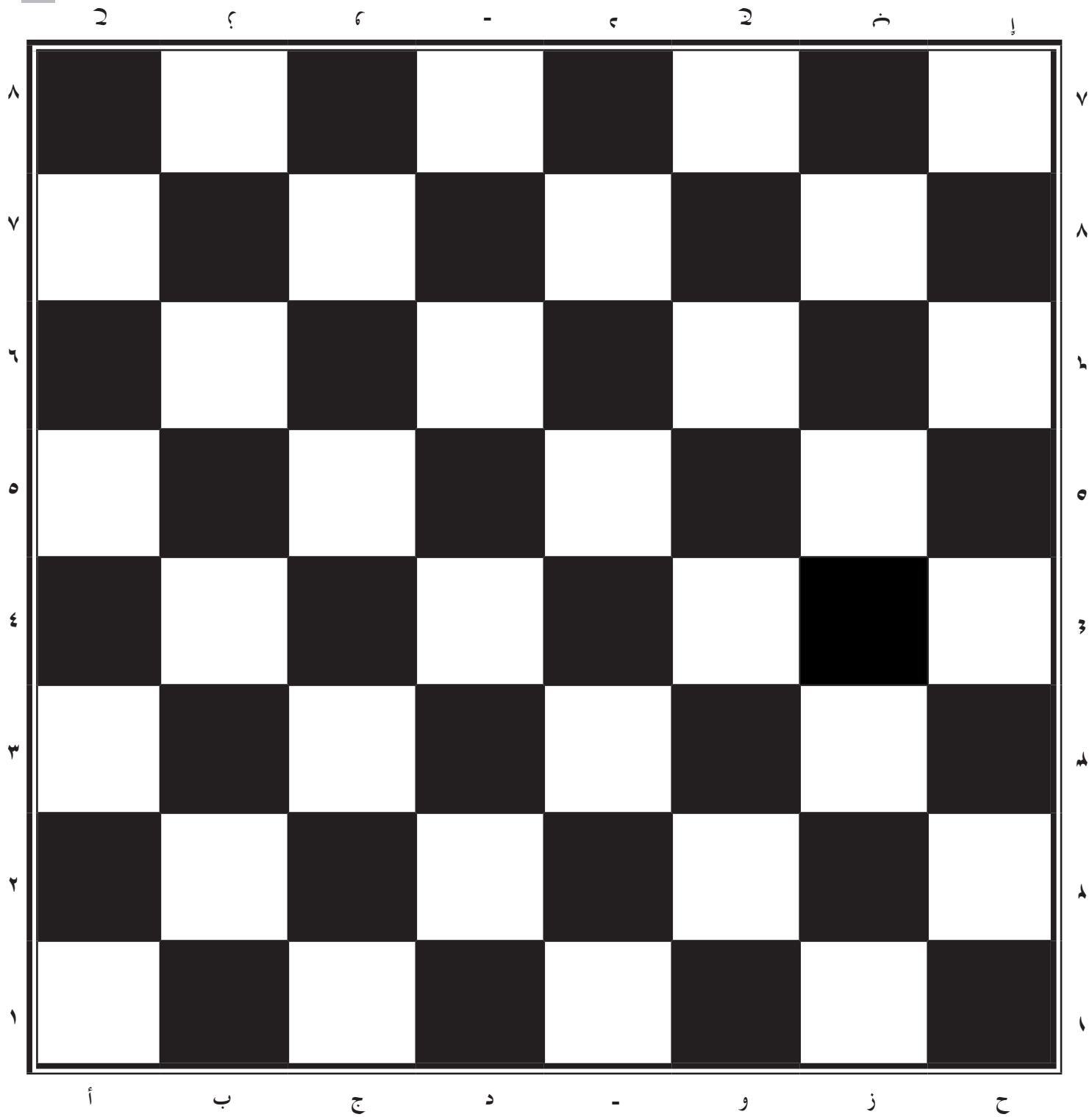
۲ / ۲



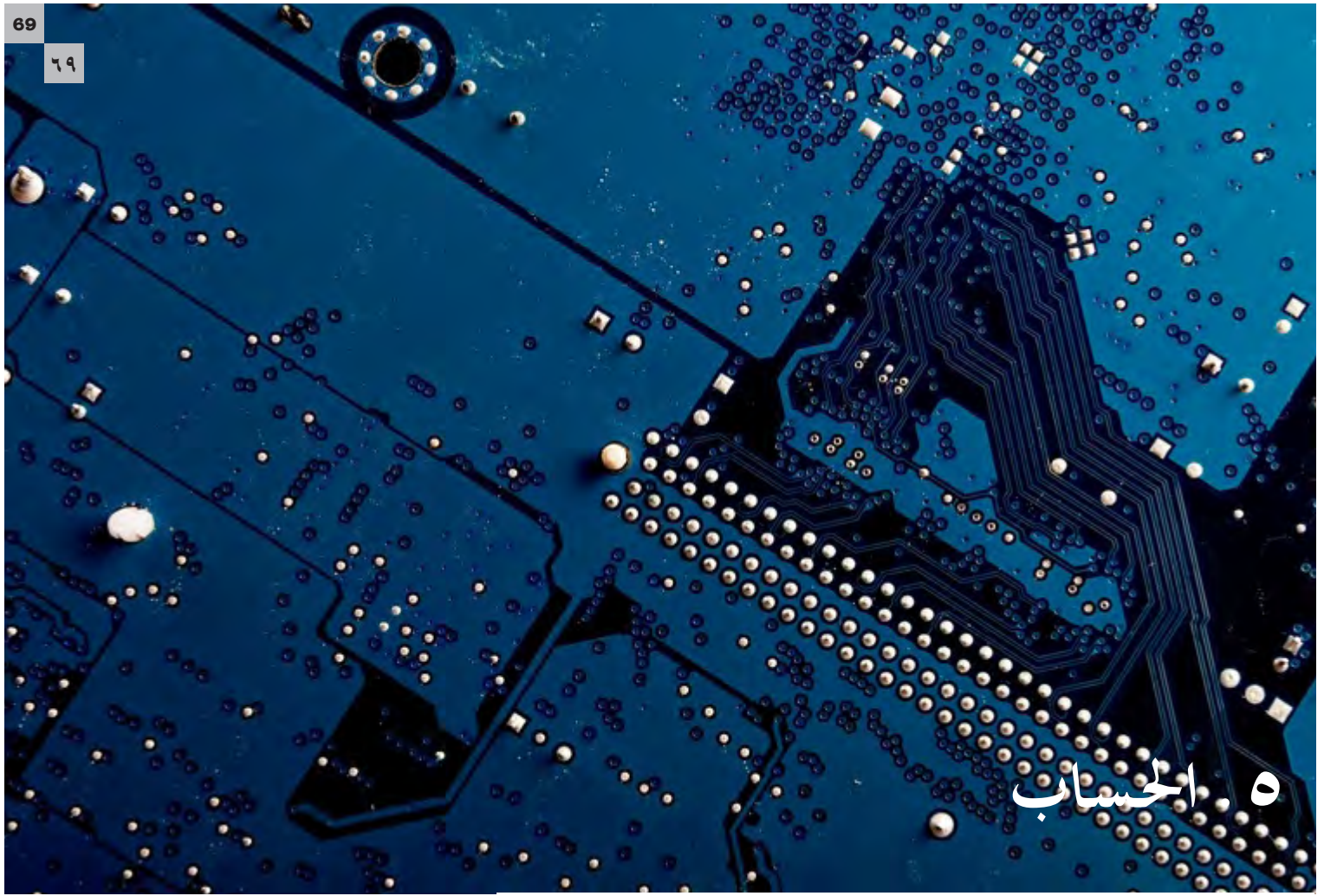












٥. الحساب

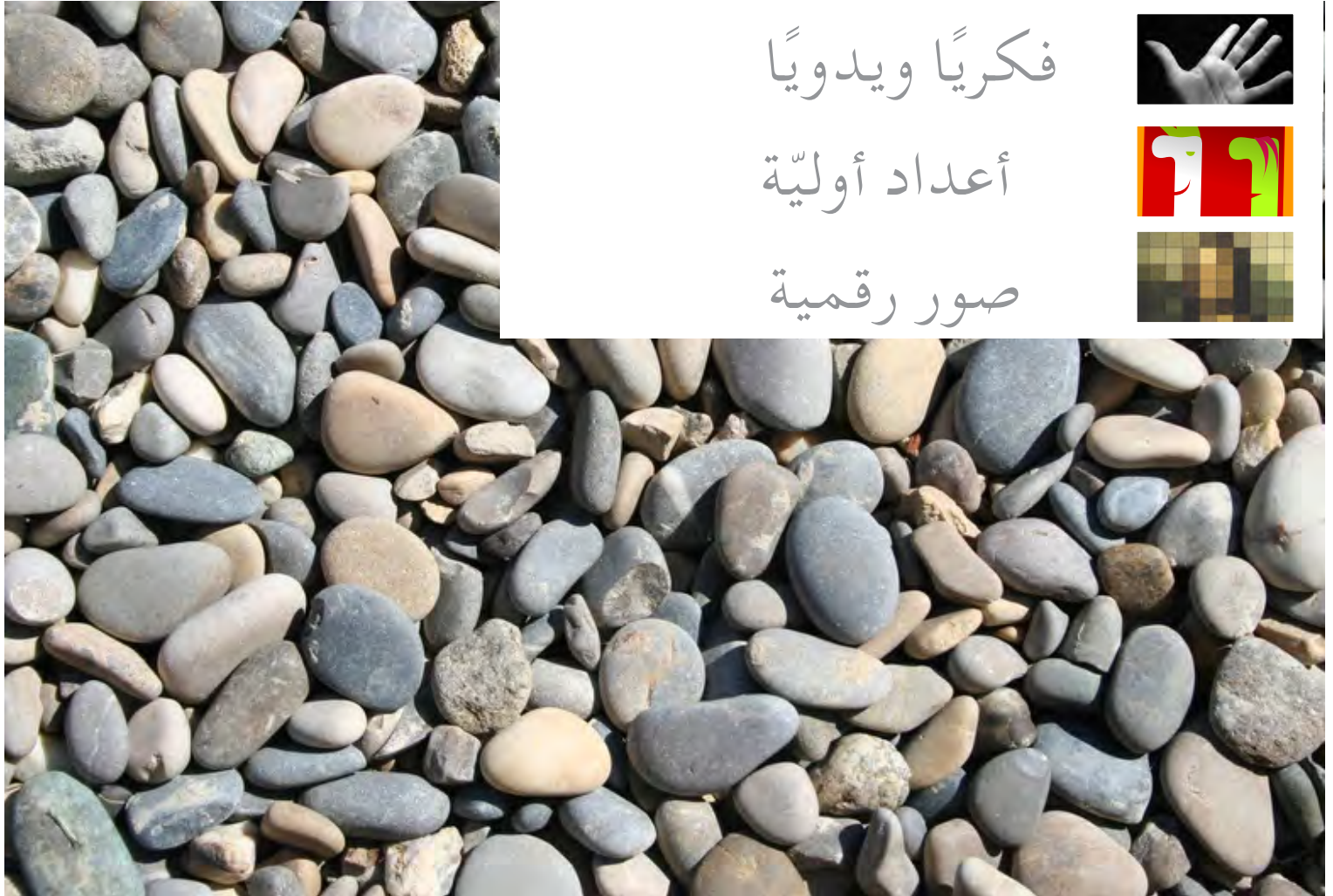
فكريًا ويدويًا



أعداد أولية



صور رقمية





فكريًا ويدويًا

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: أصابع اليدين!!!

عد بأصابعك!

$$\text{✋✋} = 9 \times 4 : \dots 9 \times 3 \dots 9 \times 2 \dots 9 \times 1$$

افتح يديك الاثنتين ووجههما نحوك، وعدّ حتى ٤، انطلاقًا من اليد اليسرى، واخفض الإصبع الرابع.
• نقرأ: ٣ أصابع مرفوعة على اليسار تمثل العشرات و ٦ مرفوعة على اليمين تمثل الآحاد، أي ٣٦.

$$\text{✋✋} = 8 \times 6 : ١٠ \text{ و } ٥$$

نعدّ حتى ٦ باليد اليسرى. يبقى أصبع مرفوعا.
نعدّ حتى ٨ باليد اليمنى. تبقى ٣ أصابع مرفوعة.
• النتيجة: ٣+١ معناها ٤ عشرات، و ٤×٢ بالنسبة للأصابع التي بقيت منزلة، وهذا يعني ٨ آحاد، أي ٤٨.

$$\text{✋✋} = 13 \times 14 : ١٥ \text{ و } ١٠$$

نعدّ حتى ١٣ باليد اليسرى. تبقى ٣ أصابع مرفوعة.
نعدّ حتى ١٤ باليد اليمنى. تبقى ٤ أصابع مرفوعة.
• النتيجة: ٣+٤ معناها ٧ عشرات، و ٣×٤ بالنسبة للآحاد، أي ١٢+٧٠+١٠٠=١٨٢.

$$\text{✋✋} = 17 \times 19 : ٢٠ \text{ و } ١٥$$

نعدّ حتى ١٧ باليد اليسرى. يبقى أصبعان مرفوعين.
نعدّ حتى ١٩ باليد اليمنى. تبقى ٤ أصابع مرفوعة.
هذا يعني: ٢+٤، أي ٦×١٥ و ٤×٢ للآحاد، ومنه ٩٠+٨=٩٨.
• النتيجة: ٣٢٣=٩٨+٢٢٥=٩٨+١٥×١٥.

ماذا أتذكر؟

تعلّم العدّ يبدأ بتعلّم جداول الجمع والضرب حتى ١٠.
لكنه يكفي في واقع الأمر استيعابها حتى العدد ٥، ثم نواصل بالعدّ مستعملين أصابعنا!
وهكذا لحساب

$$(أ+٥)(ب+٥)$$

نقول: من أجل العشرات، عندما نجمع الأصابع المرفوعة نحسب $١٠ \times (أ+ب)$.

ومن أجل الآحاد، عندما نضرب الأصابع المنزلة فإننا نحسب

$$(أ-٥) \times (ب-٥) = ٢٥ - ٥(أ+ب) + أ \times ب.$$

تأكد من أننا نحصل بالفعل على $(أ+٥)(ب+٥)$.

تأكد كذلك من قيام هذه القاعدة بالنسبة إلى عمليات الضرب الأخرى.

حتى نستعمل هذه التقنيات يكفي معرفة مربعات ١٠، ١٥، ...
حاول استخدام هذه التقنية باعتبار الأعداد ٢٠ و ٢٥ ...



فكريًا ويدويًا

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، وقلم أو لوحة، وطبشور، وممحاة

حساب ذهني - حساب سريع

١٨ - ٢٧	٥ + ٣٨
١٩ - ٦٦	١٨ + ٢٨
٢٨ - ١٥١	٥٨ + ١٢٨
١٩ - ١٩٧	١٣٥ + ٢٨٩
...	...

الجمع، الطرح
اطلب من التلاميذ القيام بجمع أو طرح أعداد طبيعية مكوّنة من رقمين أو ٣ أرقام...، وذلك بكتابة العددين، أو بالنطق بهما، أو بكتابة أحدهما والنطق بالآخر.
اطلب من التلاميذ وصف وتحليل مختلف التقنيات المستعملة.

من نحن؟

- مجموعنا ٢٥ والفرق بيننا ١.
- نحن أعداد ثلاثة متوالية ومجموعنا ٤٨.
- مجموع رقمي يساوي ١٢ وجدأؤهما ١٤.

خوارزمية كبريكار (رياضياتي هندي-١٩٤٩)

خذ عددا طبيعيا، ٥٢٩٤ مثلا، وقم بالعمليات التالية:

$$٧٠٨٣ = ٢٤٥٩ - ٩٥٤٢ = (٥٢٩٤) \text{ ك}$$

$$٨٣٥٢ = ٣٧٨ - ٨٧٣٠ = (٧٠٨٣) \text{ ك}$$

$$٦١٧٤ = ٢٣٥٨ - ٨٥٣٢ = (٨٣٥٢) \text{ ك}$$

$$!!! = (٦١٧٤) \text{ ك}$$

اطلب من التلاميذ القيام بهذه الحسابات باعتبار أعداد أخرى، واطلب منهم البحث عن الشروط المناسبة على مختلف الحالات الممكنة.

الضرب، القسمة

- أولا، اطلب من التلاميذ أن يحفظوا عن ظهر قلب مربعات الأعداد ١١، ١٢، ١٣، ١٥، ٢٠، ٢٥.
- اطلب من التلاميذ القيام بعمليات ضرب وقسمة بالأعداد ٥، ٩، ١١، ١٢، ١٣، ١٥، ١٩، ٢٥، ٥٠، ١٠٠.
- احسب ٩٦ × ٤٦ و ٦٩ × ٦٤. أليس هذا غريبا؟ أوجد حالات مشابهة.
- احسب ٩ × ٢٣ و ٩ × ٧٨. نقول إن ٢٣ و ٧٨ مرتبطان. أوجد حالات أخرى مشابهة!

عمليات ضرب غريبة!

احسب، واصل، ثم أوجد حالات مماثلة!

$$\begin{aligned} \dots &= ٢ + ٨ \times ١٢ <- \dots &= ١ + ٨ \times ١ \\ \dots &= ٦ + ٩ \times ٩٨ <- \dots &= ٧ + ٩ \times ٩ \\ \dots &= ٣ + ٩ \times ١٢ <- \dots &= ٢ + ٩ \times ١ \\ \dots &= ١١ \times ١١ <- \dots &= ١ \times ١ \end{aligned}$$

مخّمنة سرقوسة Syracuse

• خذ عددا طبيعيا ن وقم بالعمليات التالية:

• إذا كان ن زوجيا فأقسمه على ٢.

• إذا كان ن فرديا فاضربه في ٣ وأضف ١.

• أعد الكرة على النتيجة المحصل عليه...

مثال ذلك: ٢٠ <- ١٠ <- ٥ <- ١٦ <- ٨ <- ٤ <- ٢ <- ١ <- ٤ <- ٢ <- ١

اطلب القيام بهذه الحسابات باعتبار أعداد أخرى، واطلب إيجاد الشروط على مختلف السلوكات

الممكنة لتلك المتتاليات. (نتحدث هنا عن العلو عندما يتعلق الأمر بأكبر عدد يدرك في هذه المتتالية، وعن مدة التحليق للتعبير عن دورة المتتالية قبل عودتها إلى العدد الذي انطلقنا منه...). تمخضت هذه الخوارزمية التي ابتدعها كولاتز Collatz و هاس Hasse (وهما رياضياتيان ألمانيان - ١٩٣٢) عن مخّمنة، تُدعى مخّمنة سرقوسة، لم يتم البرهان عليها حتى اليوم.



فكريًا ويدويًا

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق وقلم

حسابات وخوارزميات

القسمة مكان الضرب $57 \times 86 = ?$

أو أيضا، وهذه أقرب إلى الطريقة التقليدية

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 86 \\ \hline 3042 \\ + 4056 \\ \hline = 4902 \end{array}$$

الضرب بالطريقة الشبكية

الضرب بالطريقة الروسية

$$\begin{array}{r} 86 \quad 57 \\ \hline 172 \quad 28 \\ \hline 344 \quad 14 \\ \hline 688 \quad 7 \\ 1376 \quad 3 \\ 2752 \quad 1 \\ \hline 4902 \end{array}$$

للاستزادة

باستخدام الحاسوب، وحتى نتفادى سطورا من الجداءات التي ينبغي جمعها، وتفادي أيضا مشاكل الاحتفاظ بأرقام عند إجراء عمليات الضرب، هناك تقنيات حساب أخرى سريعة. ذلك هو مجال الخوارزمية. فهذه مثلا خوارزمية الروسي أناتولي كاراتسوبو (Anatolii Karatsuba (١٩٦٢):

المطلوب حساب 1234×5678

نقسم كل عدد إلى مجموعات برقمين للحصول على:

$$\begin{aligned} (78 + 56 \times 10) \times (34 + 12 \times 10) &= 5678 \times 1234 \\ 78 \times 34 + 10 \times [34 \times 78 - 12 \times 56 - (78 + 56) \times (34 + 12)] + 12 \times 56 \times 10 &= \\ 2652 + [2652 - 672 - 66 \times 134] \times 10 + 672 \times 10 &= \\ 2652 + [2652 - 672 - 616] \times 10 + 672 \times 10 &= \\ 2652 + 28400 + 67200 &= \\ 700652 &= \end{aligned}$$

يكفي أن نجري ٣ عمليات ضرب بأعداد أصغر (بمرتين) من العددين المعطيين وإجراء عدد قليل من عمليات الجمع الإضافية، لكنها جد بسيطة. تستند هذه الخوارزمية إلى العلاقات الجبرية التالية:

$$\begin{aligned} (أ + ب)^2 &= أ^2 + 2أس + ب^2 \\ (أ + ب)(أ + ح) &= (أ + ح)(أ + ب) + (أ + ح)(أ - ح) - (أ - ح)(أ - ح) + (أ - ح)(أ - ح) \\ &= أ^2 + 2أس + ب^2 + (أ + ح)(أ - ح) - (أ - ح)(أ - ح) \\ &= أ^2 + 2أس + ب^2 + (أ + ح)(أ - ح) - (أ - ح)(أ - ح) \end{aligned}$$



فكريًا ويدويًا

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، وقلم

حساب سريع وتناسب كيف نحسب بسرعة:

يستهلك مكيف خلال ٦ ساعات ٧ كيلو واط. كم يستهلك خلال ١٨ سا؟
يستهلك مكيف خلال ٩ ساعات ١٨ كيلو واط. كم يستهلك خلال ١٠٨ سا؟
يستهلك مكيف خلال ٣٢ ساعة ٢٧ كيلو واط. كم يستهلك خلال ٨ سا؟
يستهلك مكيف خلال ٢١ ساعة ١٧ كيلو واط. كم يستهلك خلال ٩٠ سا؟

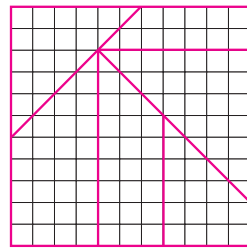
التناسب المصاعف

أتمم ملء الجداول من النمط:

حساب مساحة مثلث (بالسم ^٢)	حساب مساحة مستطيل (بالسم ^٢)	استهلاك البطاطس في مدرسة (بالكيلو)
الارتفاع	العرض	عدد الأيام
١	١	١
٢	٢	٢
٣	٣	٣
٤	٤	٤
٥	٥	٥
٦	٦	٦
٧	٧	٧
٨	٨	٨
٩	٩	٩
١٠	١٠	١٠
١١	١١	١١
١٢	١٢	١٢
١٣	١٣	١٣
١٤	١٤	١٤
١٥	١٥	١٥
١٦	١٦	١٦
١٧	١٧	١٧
١٨	١٨	١٨
١٩	١٩	١٩
٢٠	٢٠	٢٠
٢١	٢١	٢١
٢٢	٢٢	٢٢
٢٣	٢٣	٢٣
٢٤	٢٤	٢٤
٢٥	٢٥	٢٥
٢٦	٢٦	٢٦
٢٧	٢٧	٢٧
٢٨	٢٨	٢٨
٢٩	٢٩	٢٩
٣٠	٣٠	٣٠
٣١	٣١	٣١
٣٢	٣٢	٣٢
٣٣	٣٣	٣٣
٣٤	٣٤	٣٤
٣٥	٣٥	٣٥
٣٦	٣٦	٣٦
٣٧	٣٧	٣٧
٣٨	٣٨	٣٨
٣٩	٣٩	٣٩
٤٠	٤٠	٤٠
٤١	٤١	٤١
٤٢	٤٢	٤٢
٤٣	٤٣	٤٣
٤٤	٤٤	٤٤
٤٥	٤٥	٤٥
٤٦	٤٦	٤٦
٤٧	٤٧	٤٧
٤٨	٤٨	٤٨
٤٩	٤٩	٤٩
٥٠	٥٠	٥٠
٥١	٥١	٥١
٥٢	٥٢	٥٢
٥٣	٥٣	٥٣
٥٤	٥٤	٥٤
٥٥	٥٥	٥٥
٥٦	٥٦	٥٦
٥٧	٥٧	٥٧
٥٨	٥٨	٥٨
٥٩	٥٩	٥٩
٦٠	٦٠	٦٠
٦١	٦١	٦١
٦٢	٦٢	٦٢
٦٣	٦٣	٦٣
٦٤	٦٤	٦٤
٦٥	٦٥	٦٥
٦٦	٦٦	٦٦
٦٧	٦٧	٦٧
٦٨	٦٨	٦٨
٦٩	٦٩	٦٩
٧٠	٧٠	٧٠
٧١	٧١	٧١
٧٢	٧٢	٧٢
٧٣	٧٣	٧٣
٧٤	٧٤	٧٤
٧٥	٧٥	٧٥
٧٦	٧٦	٧٦
٧٧	٧٧	٧٧
٧٨	٧٨	٧٨
٧٩	٧٩	٧٩
٨٠	٨٠	٨٠
٨١	٨١	٨١
٨٢	٨٢	٨٢
٨٣	٨٣	٨٣
٨٤	٨٤	٨٤
٨٥	٨٥	٨٥
٨٦	٨٦	٨٦
٨٧	٨٧	٨٧
٨٨	٨٨	٨٨
٨٩	٨٩	٨٩
٩٠	٩٠	٩٠
٩١	٩١	٩١
٩٢	٩٢	٩٢
٩٣	٩٣	٩٣
٩٤	٩٤	٩٤
٩٥	٩٥	٩٥
٩٦	٩٦	٩٦
٩٧	٩٧	٩٧
٩٨	٩٨	٩٨
٩٩	٩٩	٩٩
١٠٠	١٠٠	١٠٠

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ٦ قطع من مربكة (puzzle)، ٢ لكل فريق تلاميذ، ورق مجدول، ورق، قلم، مقص ٧٩ ٧٨



حساب وهندسة
مربكات المطلوب تكبيرها
شكل بهذه القطع الست مربعًا. ثم أنشئ نفس المربكة بأبعاد أكبر متقيدًا بالقاعدة التالية: أشباه المنحرف التي يكون ارتفاعها ٤ سم ينبغي أن تكبر إلى أن يبلغ ارتفاعها ٧ سم.
وعند الانتهاء من هذه العملية، سيكون بمقدورك إعادة تشكيل مربع كبير بالقطع الست المكبرة.

للذهاب بعيدا

طالس والتناسب

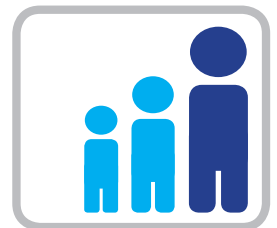
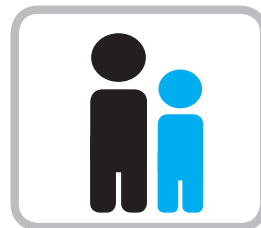
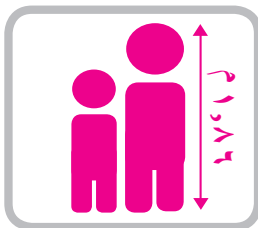
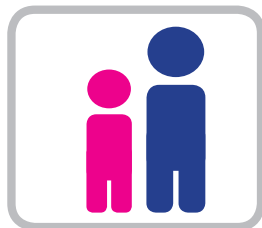
صور أخذت خلال الإجازة

أبي وأختي

أمي وأختي

أنا وأخي الأصغر

بابا وأخواتنا



ما هي قامتي؟



فكريًا ويدويًا

ماذا أتذكر؟

التناسب موضوع أساسي في تعلّم الرياضيات وعلوم أخرى. وهو أيضا أداة حاضرة بكثرة في الحياة اليومية. إنها تسمح بإدخال عمليتي الضرب والقسمة في المدرسة. وهي تعتبر عنصرا أساسيا، سيما في استيعاب العلاقات بين المقادير المزودة بوحدات قياس في الفيزياء وفي العلوم الأخرى.

الخواص المستعملة هي:

$$\text{تا}(\text{س} + \text{ص}) = \text{تا}(\text{س}) + \text{تا}(\text{ص})$$

$$\text{تا}(\text{أ.س}) = \text{أ.تا}(\text{س})$$

$$\text{تا}(\text{أ.س}) + \text{تا}(\text{ب.ص}) = \text{أ.تا}(\text{س}) + \text{ب.تا}(\text{ص})$$

هناك دالتان رياضيتان تدخلان في هذه الحسابات:

دالة «الأبعاد»:

$$\begin{aligned} 9 \text{ (سا)} & \quad 18 \text{ (كيلو واط)} \\ 108 \text{ (سا)} & \quad 99 \text{ (كيلو واط)} \end{aligned}$$

الدالة «السلمية»:

$$\begin{aligned} 6 \text{ (سا)} & \quad 7 \text{ (كيلو واط)} \\ 18 \text{ (سا)} & \quad 99 \text{ (كيلو واط)} \end{aligned}$$

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق وقلم

حساب تقريبي

تقدير الكبر

اطلب من التلاميذ تقدير نتائج بعض الحسابات (ثم التأكد منها بالحاسبة أو بدونها). وهكذا، نسأل: هل نتيجة هذه الحسابات محصورة بين ٠ و ١، أو بين ٠ و ١٠، أو بين ١٠ و ٢٠، أو بين ٢٠ و ١٠٠؟

$$\begin{aligned} 28 \div 120 &= 0.2333 \text{ أو } 0.23 \text{ أو } 0.2 \text{ أو } 0.1 \\ 1270 \div 28 &= 45.3571 \text{ أو } 45.36 \text{ أو } 45.4 \text{ أو } 46 \\ 176 \div 357 &= 0.493 \text{ أو } 0.49 \text{ أو } 0.5 \text{ أو } 0.4 \\ 220 \times 4184 &= 920480 \text{ أو } 92048 \text{ أو } 9204 \text{ أو } 920 \\ 1/(27 + 1) &= 0.037 \text{ أو } 0.037 \text{ أو } 0.03 \text{ أو } 0.04 \end{aligned}$$

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، وقلم، أو حاسبة أو حاسوب

حاسوبنا يخدعنا

اختر عددا محصورا بين ٠ و ١. اضربه في ٢.

• إذا كانت النتيجة أصغر من ١ فاضربه مجددا في ٢.

• وإلا اطرح ١ واضرب في ٢.

وأعد الكرة ٦٠ مرة. وأعد نفس الحسابات بعدد مجاور للعدد الأول. ماذا تلاحظ؟

• اختر عددا أكثر قربا من العدد الأول وأعد الحسابات.

• حاول أيضا باعتبار أعداد مثل $27 - 1$ أو $37 - 1$ أو $1 - \pi$ أو $3 - \pi$ أو أعداد عشرية متجاوزة جدا.

للقيام بالعدّ نستخدم الأعداد الطبيعية والعشرية. في السوق، يستحسن أن نجري بسرعة حسابا ذهنيا وتقريبا حتى ولو كانت لدينا حاسبة...

أما الحاسوب فهو لا يستعمل سوى الأعداد العشرية التي لا يتجاوز عدد أرقامها العشرية بضع عشرات. ومن ثمّ تصبح القوانين الحسابية غير محترمة ما يؤدي في أغلب الأحيان إلى ارتكاب أخطاء.

مهن الرياضيات

يمكن استعمال البعض من هذه التقنيات في الحياة اليومية. والبعض الآخر يستغله الرياضياتيون والمعلوماتيون حتى تتمكن الحواسيب من الزيادة دوما في سرعة الحساب والذهاب بعيدا، أو التأكد بسرعة فائقة من صحة الأرقام السرية للبطاقات البنكية!

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Calculus - Quick, Mental, Approximate calculus - Order of magnitude - Calculus algorithms



أعداد أولية

أنجز ذلك بنفسك



المستلزمات : ٣ شبكات من ٦، ٢٠، ثم ٣٠ عمودا من الأعداد الطبيعية، قلم، ممحاة

٣٧	/	/	/	/	/	٣١
/	/	/	/	/	/	٢٩
/	/	٥	/	٣	/	٢٣
/	١٩	/	/	٧	/	١١
٤١	/	١٣	/	١٧	/	٢٧
/	/	/	/	/	/	١٧
٤٣	/	/	/	/	/	١٧

على طريق الأعداد الأولية !

العدد الأولي هو كل عدد طبيعي يختلف عن ١ ولا يقسم إلا على نفسه وعلى ١. من أجل كل جدول :

- اشطب ١، ثم دكن العدد الأول غير المشطوب، أي ٢
- اشطب كل مضاعفات ٢ (بعد ٢)،
- دكن العدد الموالي غير المشطوب، أي ٣، وهو أولي،
- أعد الكرة حتى تصل الوضعية التي لا تجد فيها عددا يستحق الشطب.

تأمل، بالنظر إلى الجدول المستعمل، في خواص هذه التقنية. ابتداءً من أي عدد أولي توقفت؟ ماذا يمكن أن تستخلص من ذلك؟

تسمى هذه التقنية غربال إراتوستينس Eratosthenes. وهي تسمح بإظهار كل الأعداد الأولية في القائمة.

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات : ٣ مكعبات من زهر النرد



مارس لعبة ال ٢١ ٤

إرم المكعبات الثلاثة.

سجل الأرقام الثلاثة في جدول.

الرابع هو الذي ينشئ بهذه الأرقام الثلاثة أكبر عدد أولي. يستطيع كل تلميذ أن يذكر لماذا هذا العدد أو ذاك ليس أولياً.

ماذا أتذكر؟

مقاييس القسمة على ...

- يكون عدد صحيح قابلاً للقسمة على ٢ إذا كان رقمه الأخير مضاعفاً لـ ٢،
- قابلاً للقسمة على ٤ إذا ٨ إذا ...
- قابلاً للقسمة على ٣ إذا (وكذا على ٩). لماذا؟
- قابلاً للقسمة على ٥ إذا ...
- قابلاً للقسمة على ١١ إذا
- وعلى ٧؟ وعلى ١٣؟

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات : قائمة من الأعداد الأولية

الأسرة الكبيرة للأعداد الأولية

في أسرة الأعداد الأولية :

- أوجد أعداداً توائم (أي أعداد أولية الفارق بينهما ٢) مثل ٣ و ٥، ٥ و ٧...
- هناك مخمّنة تقول إن ثمة عدداً غير منته من مثل هذه الأعداد. ما رأيك في الثلاثيات التوائم؟
- أوجد أعداداً أبناء عمومة (أي الفارق بينها ٤). الظاهر أن عددها هو عدد الأعداد التوائم!
- أوجد أعداداً سداسية (أي الفارق بينها ٦)!
- تأكد ما إذا كان جداء عددين أوليين - عندما يضاف إليه ١ - يصبح أولياً. يسمح ذلك بإثبات وجود عدد غير منته من الأعداد الأولية. لكن بقدر ما تكبر هذه الأعداد بقدر ما تكون نادرة.
- تأكد من أن كل عدد زوجي (أصغر من ١٠٠ مثلاً) يمكن كتابته كمجموع عددين أوليين (تلك هي مخمّنة غولدباخ Goldbach) التي ستجعل من يبرهن عليها يفوز بمبلغ مالي ضخم!



أعداد أولية

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، قلم

الأسرة الكبيرة للأعداد الأولية

- اكتب ١٠١٠١، ١٠١، ١١ كجداوات أعداد أولية.
- قم بنفس العملية باعتبار الأعداد ٣٠٤، ٣٠٥، ٤٠٣، ٤٠٤، ٥٠٤، ٦٠٤ ... كل عدد طبيعي يفكك بطريقة وحيدة إلى جداء عوامل أولية.
- أوجد خارج مجموعة الأعداد الأولية أعدادا تامة (أي تساوي مجموع قواسمها مثل $٦ = ١ + ٢ + ٣$).
- لاحظ أن $\frac{٦}{١} + \frac{٣}{١} + \frac{٢}{١} = ١$ وأن الأمر كذلك بالنسبة للأعداد التامة الأخرى.
- أوجد أعدادا طبيعية تساوي جداءات عددين أوليين مختلفين.
- الفائز هو من يجد أكبر عدد من هذا القبيل.
- الأرقام السرية المستخدمة اليوم تعتمد على أعداد تساوي جداء عددين أوليين كبيرين جدا. تعرّف عليها يتطلب وقتا يتجاوز مدة الحساب اللازمة لأقوى الحواسيب.
- أوجد الـ «ق.م.أ.» (القاسم المشترك الأكبر) و الـ «م.م.أ.» (المضاعف المشترك الأصغر) لـ ٢٨ و ٧٠، ٣٣٠ و ٩٠٠، ٢٧٦ و ٤٨٣ ...
- تأكد من أن ق.م.أ. (أ، ب) $\times$ م.م.أ. (أ، ب) = أ.ب.

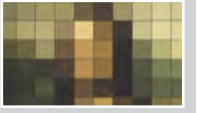
مهن الرياضيات

هناك عدد كبير من البحوث حول الأعداد الأولية وعلاقتها بالمعلوماتية. وهي تطرح عديد الأسئلة لا زالت تنتظر الحل. وهناك علاقة وطيدة بين الأعداد الأولية وبين أمن الشبكات المعلوماتية والاتصالات (التعمية، برامج تصحيح الأخطاء، وضع الخوارزميات، إلخ).

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Prime Numbers - Divisibility criteria - Eratosthenes - Euclid Algorithm Cryptography - Public-key Encryption

الصور الرقمية



أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، قلم

$$1 + 1 = 10 !!!$$

في الأساس ٢، تكتب الأعداد الصحيحة باستخدام ٠ و ١:

١٠، ١١، ١٠٠، ١٠١، ١١٠، ١١١، ...

احسب، ضمن الأساس ٢، المجاميع: ١٠١ + ١٠١، ١١ + ١٠١، ١٠١ + ١٠١، ١١١ + ١١١، ...

ثم: ١١١ × ١١١، ١٠١ × ١٠١، ١٠١ × ١١١، ١١١ × ١١١

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ٣ صور رقمية

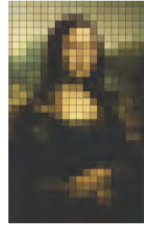
٧٢ أو ٣٠٠ نقطة في البوصة (dpi)؟

لهذه الصور الثلاث نفس الأبعاد: ٣٥٠ × ٧٧ سم

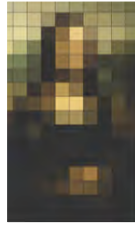
- كم من مربعات وحدات (نسميها بيكسل أو عنصر) تحتوي هذه الصور (العرض × الارتفاع)؟ إنها مساحة الصورة بالبيكسل.
- للصورة ١ مِيز يعادل ٧٥ نقطة في البوصة؛ أما الثانية فلها ١٥٠، والثالثة ٣٠٠ نقطة في البوصة.
- كيف يتغير عدد المربعات بدلالة المِيز؟



الصورة ٣



الصورة ٢



الصورة ١

وزن الصور

كيف يتغير وزن الصور؟ أتمم الجدول.

مثلت هنا نفس الصورة المرقمنة بـ ٧٥ نقطة في البوصة بـ ٧٥، ١٥٠، ٣٠٠ نقطة في البوصة.

المِيز الأول، الكافي للشاشة، ينتج صورة مطبوعة مَبَكْسَلَة.

المِيز الثاني يغطي حاجة الألواح الإلكترونية والهواتف الذكية الحالية، غير أن الصورة المطبوعة تفتقد إلى الصفاء.

أما المِيز الثالث، أكثر دقة بأربعة مرات، فيسمح بالحصول على طباعة فوتوغرافية صافية وملساء.

الوزن (بالكيلو بايت)	المِيز (بالنقطة في البوصة)	مساحة الصورة	
		البوصة	السنتمتر
١٢٥	٧٥	٣,٧٤ × ٢,٣٩	٨,٧٤ × ٥,٣٩
؟	١٠٠		
؟	١٥٠		
؟	٢٠٠		
؟	٧٥	١,٩٠ × ١,١٨	٤,٤٥ × ٢,٧٥
؟	١٠٠		
١٢٥	١٥٠		
؟	٢٠٠		
؟	٧٥	٠,٩٤ × ٠,٥٩	٤,٤٥ × ٢,٧٥
؟	١٠٠		
؟	١٥٠		
١٢٥	٢٠٠		



ماذا أتذكر

تتكوّن الصورة الرقمية الملونة من مربعات وحدات، العناصر (البيكسل)، وكل مربع يمثل مزيجاً من ٣ أو ٤ ألوان:

الأحمر والأخضر والأزرق بالنسبة للشاشات، والسماوي والأرجواني والأصفر والأسود بالنسبة للطباعة. وكلما زاد عدد العناصر في مساحة معينة كلما كانت الصورة أدق.

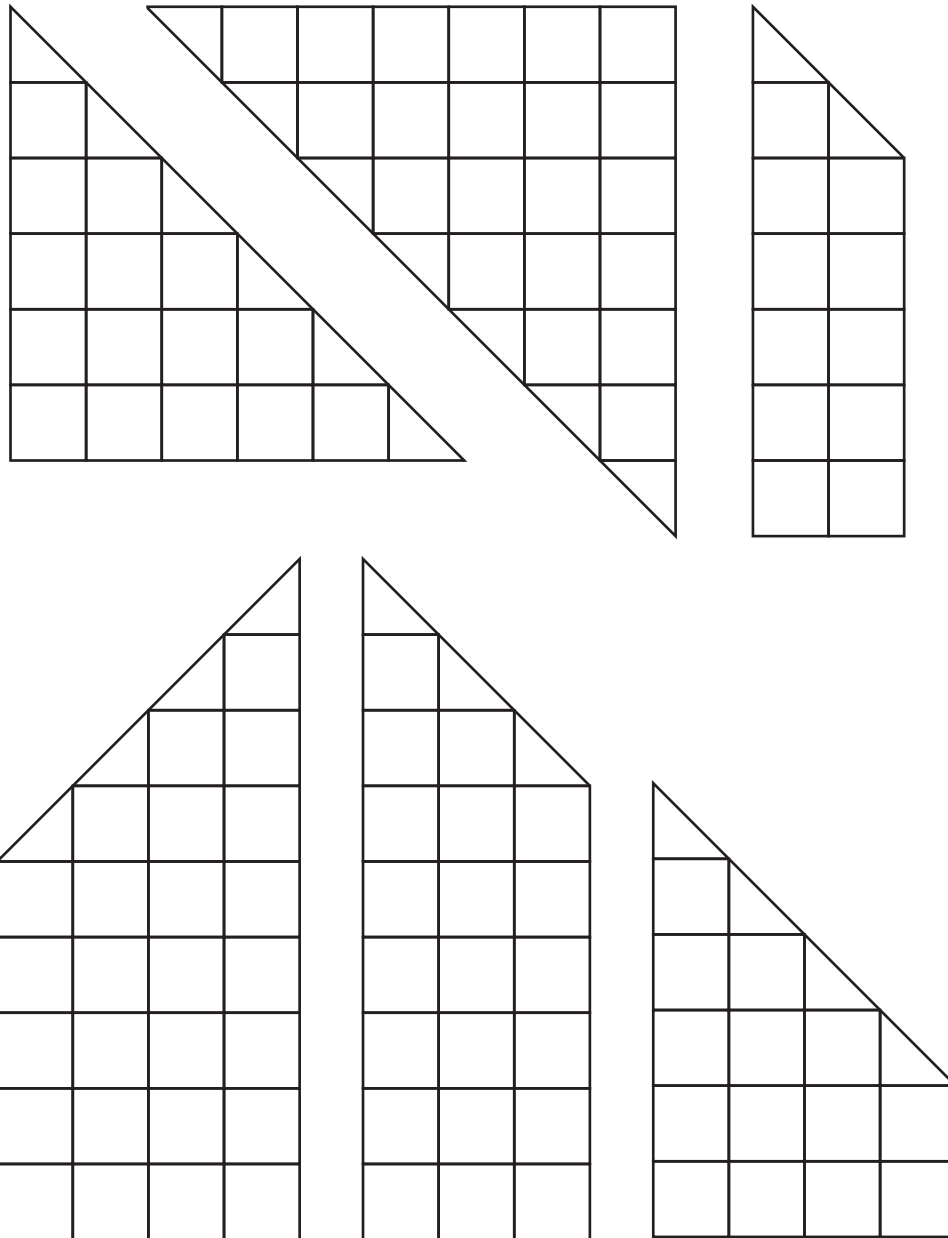
مهن الرياضيات

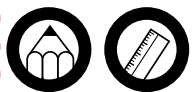
تجد استعمال الصور الرقمية في الصورة والقرص المضغوط و'الدي في دي' والإنترنت والهاتف النقال والتلفاز الفائق الدقة، إلخ.

وحتى نخزن ونقل ونحلل ونعالج ونضغط ونصحح ونعدّل هذه الصور فلا غنى عن الرياضياتيين.

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Pixels - Image file compression - Digital printing





٢٠٠	١٨٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١٠٠	٨٠	٦٠	٤٠	٢٠
١٩٩	١٧٩	١٥٩	١٣٩	١١٩	٩٩	٧٩	٥٩	٣٩	١٩
١٩٨	١٧٨	١٥٨	١٣٨	١١٨	٩٨	٧٨	٥٨	٣٨	١٨
١٩٧	١٧٧	١٥٧	١٣٧	١١٧	٩٧	٧٧	٥٧	٣٧	١٧
١٩٦	١٧٦	١٥٦	١٣٦	١١٦	٩٦	٧٦	٥٦	٣٦	١٦
١٩٥	١٧٥	١٥٥	١٣٥	١١٥	٩٥	٧٥	٥٥	٣٥	١٥
١٩٤	١٧٤	١٥٤	١٣٤	١١٤	٩٤	٧٤	٥٤	٣٤	١٤
١٩٣	١٧٣	١٥٣	١٣٣	١١٣	٩٣	٧٣	٥٣	٣٣	١٣
١٩٢	١٧٢	١٥٢	١٣٢	١١٢	٩٢	٧٢	٥٢	٣٢	١٢
١٩١	١٧١	١٥١	١٣١	١١١	٩١	٧١	٥١	٣١	١١
١٩٠	١٧٠	١٥٠	١٣٠	١١٠	٩٠	٧٠	٥٠	٣٠	١٠
١٨٩	١٦٩	١٤٩	١٢٩	١٠٩	٨٩	٦٩	٤٩	٢٩	٩
١٨٨	١٦٨	١٤٨	١٢٨	١٠٨	٨٨	٦٨	٤٨	٢٨	٨
١٨٧	١٦٧	١٤٧	١٢٧	١٠٧	٨٧	٦٧	٤٧	٢٧	٧
١٨٦	١٦٦	١٤٦	١٢٦	١٠٦	٨٦	٦٦	٤٦	٢٦	٦
١٨٥	١٦٥	١٤٥	١٢٥	١٠٥	٨٥	٦٥	٤٥	٢٥	٥
١٨٤	١٦٤	١٤٤	١٢٤	١٠٤	٨٤	٦٤	٤٤	٢٤	٤
١٨٣	١٦٣	١٤٣	١٢٣	١٠٣	٨٣	٦٣	٤٣	٢٣	٣
١٨٢	١٦٢	١٤٢	١٢٢	١٠٢	٨٢	٦٢	٤٢	٢٢	٢
١٨١	١٦١	١٤١	١٢١	١٠١	٨١	٦١	٤١	٢١	١
١٨٠	١٦٠	١٤٠	١٢٠	١٠٠	٨٠	٦٠	٤٠	٢٠	٠

٦	٥	٤	٣	٢	١
١٢	١١	١٠	٩	٨	٧
١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣
٢٤	٢٣	٢٢	٢١	٢٠	١٩
٣٠	٢٩	٢٨	٢٧	٢٦	٢٥
٣٦	٣٥	٣٤	٣٣	٣٢	٣١
٤٢	٤١	٤٠	٣٩	٣٨	٣٧
٤٨	٤٧	٤٦	٤٥	٤٤	٤٣
٥٤	٥٣	٥٢	٥١	٥٠	٤٩
٦٠	٥٩	٥٨	٥٧	٥٦	٥٥
٦٦	٦٥	٦٤	٦٣	٦٢	٦١
٧٢	٧١	٧٠	٦٩	٦٨	٦٧
٧٨	٧٧	٧٦	٧٥	٧٤	٧٣
٨٤	٨٣	٨٢	٨١	٨٠	٨٩
٩٠	٨٩	٨٨	٨٧	٨٦	٨٥
٩٦	٩٥	٩٤	٩٣	٩٢	٩١
١٠٢	١٠١	١٠٠	٩٩	٩٨	٩٧
١٠٨	١٠٧	١٠٦	١٠٥	١٠٤	١٠٣
١١٤	١١٣	١١٢	١١١	١١٠	١٠٩
١٢٠	١١٩	١١٨	١١٧	١١٦	١١٥
١٢٦	١٢٥	١٢٤	١٢٣	١٢٢	١٢١
١٣٢	١٣١	١٣٠	١٢٩	١٢٨	١٢٧
١٣٨	١٣٧	١٣٦	١٣٥	١٣٤	١٣٣
١٤٤	١٤٣	١٤٢	١٤١	١٤٠	١٣٩



٦٠	٥٩	٥٨	٥٧	٥٦	٥٥	٥٤	٥٣	٥٢	٥١	---	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
٦٠	١١٩	١١٨	١١٧	١١٦	١١٥	١١٤	١١٣	١١٢	١١١	---	٦٩	٦٨	٦٧	٦٦	٦٥	٦٤	٦٣	٦٢	٦١
١٨٠	١٧٩	١٧٨	١٧٧	١٧٦	١٧٥	١٧٤	١٧٣	١٧٢	١٧١	---	١٢٩	١٢٨	١٢٧	١٢٦	١٢٥	١٢٤	١٢٣	١٢٢	١٢١
٢٤٠	٢٣٩	٢٣٨	٢٣٧	٢٣٦	٢٣٥	٢٣٤	٢٣٣	٢٣٢	٢٣١	---	١٨٩	١٨٨	١٨٧	١٨٦	١٨٥	١٨٤	١٨٣	١٨٢	١٨١
٣٠٠	٢٩٩	٢٩٨	٢٩٧	٢٩٦	٢٩٥	٢٩٤	٢٩٣	٢٩٢	٢٩١	---	٢٤٩	٢٤٨	٢٤٧	٢٤٦	٢٤٥	٢٤٤	٢٤٣	٢٤٢	٢٤١
٣٦٠	٣٥٩	٣٥٨	٣٥٧	٣٥٦	٣٥٥	٣٥٤	٣٥٣	٣٥٢	٣٥١	---	٣٠٩	٣٠٨	٣٠٧	٣٠٦	٣٠٥	٣٠٤	٣٠٣	٣٠٢	٣٠١
٤٢٠	٤١٩	٤١٨	٤١٧	٤١٦	٤١٥	٤١٤	٤١٣	٤١٢	٤١١	---	٣٦٩	٣٦٨	٣٦٧	٣٦٦	٣٦٥	٣٦٤	٣٦٣	٣٦٢	٣٦١
٤٨٠	٤٧٩	٤٧٨	٤٧٧	٤٧٦	٤٧٥	٤٧٤	٤٧٣	٤٧٢	٤٧١	---	٤٢٩	٤٢٨	٤٢٧	٤٢٦	٤٢٥	٤٢٤	٤٢٣	٤٢٢	٤٢١
٥٤٠	٥٣٩	٥٣٨	٥٣٧	٥٣٦	٥٣٥	٥٣٤	٥٣٣	٥٣٢	٥٣١	---	٤٨٩	٤٨٨	٤٨٧	٤٨٦	٤٨٥	٤٨٤	٤٨٣	٤٨٢	٤٨١
٦٠٠	٥٩٩	٥٩٨	٥٩٧	٥٩٦	٥٩٥	٥٩٤	٥٩٣	٥٩٢	٥٩١	---	٥٤٩	٥٤٨	٥٤٧	٥٤٦	٥٤٥	٥٤٤	٥٤٣	٥٤٢	٥٤١



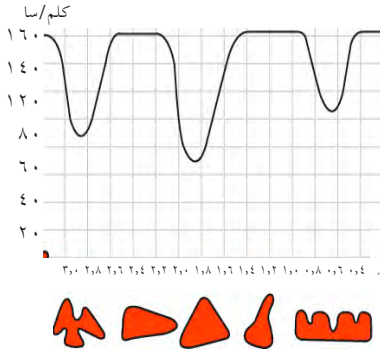
٦ . إنشاء

منحنيات وسُرْع
منحنيات وأحجام
منحنيات لطيفة





منحنيات وأحجام



٨٨

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: رسومات لـ ٥ مضامير سباق، ١ بيان السرعة

في أي مضمار نحن؟

هذا بيان لـ سرعة سيارة سباق في أقصى إمكاناتها خلال الدورة الثالثة للمضمار.

أسئلة:

- في أي مضمار هي؟
- في أي اتجاه تدور؟
- أين يوجد خط الانطلاق؟

٨٩

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق مجداول، قلم

هل تعرف كيف تقرأ بيانا؟

- يتخيل كل تلميذ مضمار سيارة ويرسمه، وينشئ بيان سرعه على دورة من المضمار. ثم يمرر هذا البيان إلى جاره فيقوم بنفس العملية.
- سؤال: انطلاقا من البيان الذي سلّم من قبل الجار يطلب تحديد المضمار الذي تخيله هذا الجار. الفائز هو أول من يكتشف المضمار.
- عبر في بيان عن القصة التالية: تسلّق أحدهم مرتفعاً بطول ٤ كلم بـ ٢ كلم/سا. ثم استراح مدة ساعة، وبعدها عاد من حيث انطلق سالكا نفس الطريق بـ ٤ كلم/سا.
- تسابق درّاجان ذهاباً وإياباً. قطع الأول مسافة الذهاب بـ ٦٠ كلم/سا والإياب بـ ٤٠ كلم/سا. أما الثاني فقطع الذهاب والإياب بسرعة ٥٠ كلم/سا. من منهما يصل الأول إلى نقطة الانطلاق؟

للذهاب بعيدا لا تسرع!

- سارت مركبة بسرعة متوسطة تعادل ١٠٠ كلم/سا بدل ٩٠ كلم/سا.
- كم هي المدة التي تريحها إذا ما قطعت مسافة ٩٠ كلم؟
- تسير دراجة نارية بسرعة ٥٠ كلم/سا بدل ٤٥ كلم/سا.
- كم هي المدة التي تريحها إذا ما قطعت مسافة ٤٥ كلم؟

اكبح في الوقت المناسب!

هناك فترة ردة الفعل تقدر بثانية إلى ثانيتين بين لحظة إدراك السائق لعائق واللحظة التي يشرع فيها في الكبح. أما مسافة الكبح، التي ترتبط بسرعة وحالة السيارة فتقدر في أرضية جافة بـ ٠,٨ س، حيث تشير س إلى سرعة السيارة بالمتراً/ثا.

- احسب المسافة التي تقطعها السيارة قبل التوقف عندما تكون سرعتها ٩٠ كلم/سا؟ ١٠٠ كلم/سا؟
- احسب أيضا المسافة التي تقطعها الدراجة النارية عندما تكون سرعتها ٤٥ كلم/سا؟ ٥٠ كلم/سا؟

وماذا إن تهاطلت الأمطار؟

- مسافة الكبح ترتبط أيضا بحالة الطريق. فإذا كانت الأرض مبللة فهذه المسافة ترتفع بنسبة ٤٠ %.
- أعد حساب مسافات التوقف السابقة.
- أنجز جدولا ثم بيانا لمسافات التوقف بدلالة السرعة وحالة الطريق.

مهن الرياضيات

تطوّر الحساب التفاضلي خلال القرنين ١٧ و ١٨. وهو يسمح بوصف تطور ميل المماس لمنحنى متصل: إذا مثلت دالة متزايدة بمنحنى فإن لمماسات المنحنى عند كل نقطة معامل توجيه موجبا. ولما تكون الدالة متناقصة فهذا المعامل يكون سالبا.

تستخدم هذه الخاصية عند كل دارس لظواهر تطور سواء كان رياضياتيا أو فيزيائيا أو مهندسا أو بيولوجيا أو ديموغرافيا أو اقتصاديا...

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت: Function - Graph - Derivative - Tangent - Speed -

Acceleration

Unesco - Centre•Sciences - Adecum - Kacst - www.experiencingmaths.org

ماذا أتذكر

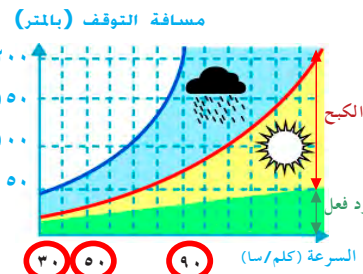
السرعة والتسارع

السرعة قياس فيزيائي يسمح بمعرفة ووصف تطور كمية (غالبا ما تكون هذه الكمية هي المسافة) حسب تطور الزمن. نعبر عن السرعة بالمتراً/الثانية، وبـ كلم/سا، وبالعقدة في البحرية، وبالماخ Mach في الطيران.

التسارع هو تغيّر سرعة كائن بدلالة الزمن.

نقول عن الدالة "السرعة/الزمن" إنها مشتق الدالة "المسافة/الزمن". كما أن "التسارع" يمثل مشتق الدالة "السرعة/الزمن".

إنها تصف تطور مماس المنحنى السرعة/الزمن عند كل نقطة.





منحنيات وأحجام

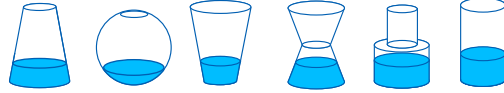
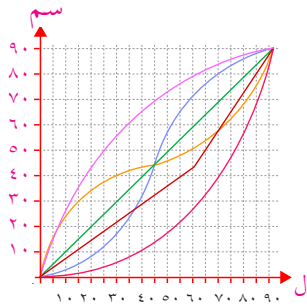
أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ رسم لـ ٦ أواني، ١ رسم لـ ٦ بيانات

٩٠ ٩١

حجم البرميل

- هذه الأواني لها نفس الارتفاع (٩٠ سم) ونفس السعة (٩٠ ل).
- يشير البيان إلى مستوى امتلاء الأواني بدلالة الزمن.
- ما هو منحنى امتلاء كل إناء؟
- كم يمكن أن تكون أبعاد كل إناء؟



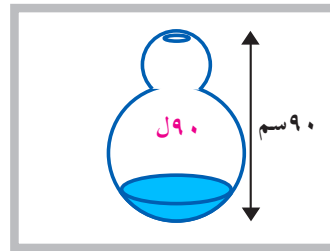
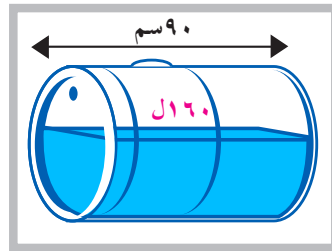
أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق مجدول، قلم

٨٩

هل تعرف كيف تقرأ بيانا؟

- يتخيل كل تلميذ إناءً (ارتفاعه ٩٠ سم وسعته ٩٠ ل) ويقوم برسمه.
- ينشئ بعد ذلك بيان امتلائه.
- يسلم ذلك إلى جاره الذي يقوم بنفس العملية.
- سؤال: عيّن الإناء الذي فكر فيه الجار انطلاقاً من بيانه.
- الفائز هو أول من يجيب.



- كيف يمكن أن يكون منحنى امتلاء هذا البرميل؟

- ما هو بيان امتلاء هذا الإناء؟

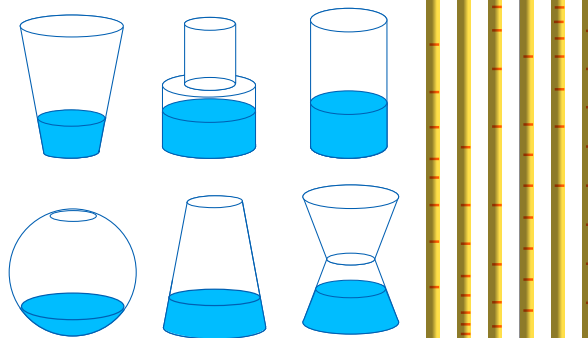
أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ رسم للأواني الستة، ١ رسم لستة مكاييل مدرّجة

٩٢

لكل مكياله

- يمثل كل قضيب، مدرّج بدورة ١٠ لترات مكياال أحد هذه الأواني الستة.
- أرفق كل مكياال بالإناء الموافق له.



- درّج مكياال برميل سعته، ممدوداً، ١٦٠ لتر بدورة ١٠ لترات، وذلك بمراعاة وضعية فتحة الماء التي يمكن أن تكون في أعلى الغطاء أو في أعلى البرميل.

إخلاء خزان

- عد إلى الأواني الستة وبيانات امتلائها.
- ارسّم الآن بيان إخلاء كل منها (بافتراض أن التدفق ثابت وأن سدادة الإخلاء موجودة في الأسفل).



منحنيات وأحجام

ماذا أتذكر؟

حتى نحدّد منحنى امتلاء إناء في لحظة معينة ينبغي تقدير (أو حساب) تطور مساحة مقطع الإناء بدلالة الارتفاع $ع$. وهذا يؤدي مباشرة، أو بصفة تقريبية، إلى استعمال حسابات الأحجام بدلالة الارتفاع. إنه مجال الحساب التكاملي الذي وضعه نيوتن (١٦٤٢-١٧٢٧) وليبنيتز Leibniz (١٦٤٦-١٧١٦). لكن هناك العديد من الصيغ التي تعطي الأحجام (والمساحات) كانت معروفة من عهد أرخميدس (٢٨٧-٢١٢ قبل الميلاد).

بعض تلك الصيغ

الحجم $ح$ للإناء بدلالة الارتفاع $ع$ (الارتفاع بالديسمتر والحجم بالديسمتر المكعب أو اللتر):

• الأسطوانة: $ح = مساحة القاعدة \times ع = \pi \times ر^2 \times ع$ ، حيث $ر$ نصف قطر القاعدة.

• الهرم على قاعدة: $ح = مساحة القاعدة \times ع / 3$

• المخروط منزوع الجذع: $ح = حجم المخروط الكبير \times (ع/ت)^3$ ، حيث $ع$ ارتفاع المخروط الصغير و $ت$ ارتفاع المخروط الكبير.

• قبة الكرة: $ح = \pi \times ع^2 \times (3/ع - ر)$ حيث $ر$ نصف قطر الكرة و $ع$ ارتفاع القبة.

مهن الرياضيات

نعبّر في الرياضيات عن علاقة بين متغيرين (أو أكثر) بالدوال. أما تمثيلها البياني فصار اليوم جزءا من حياتنا اليومية (منحنى درجات الحرارة، أحوال البورصة...) وهي أدوات مستعملة في العديد من المجالات التقنية.

لقد تطور الحساب التكاملي، الذي يسمح بحساب المساحات والأحجام، في نفس الوقت الذي تطور فيه الحساب التفاضلي خلال القرن السابع عشر. من المعلوم أن مسائل قياس الأحجام والكيل تستخدم من قديم الزمان لدى التجار والمهندسين.

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Function - Graph - Integral calculus - Volumes - Archimedes - Barrel



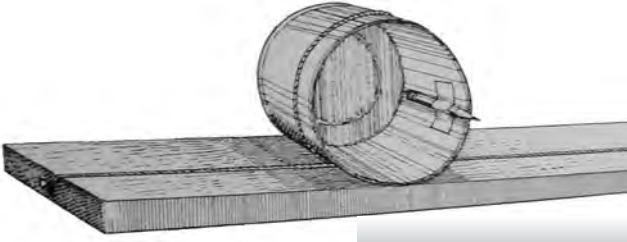
منحنيات لطيفة

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ١ قلم، ١ ورقة، ١ مسطرة، ١ أنبوب

المدحرجة والدويري (دحروج)

- ثبت القلم داخل الأنبوب
- ارسم المنحنى المحصل عليه عندما يدور الأنبوب فوق المسطرة دون انزلاق.
- هذا المنحنى يسمى الدويري.
- إنه المنحنى الذي ترسمه نقطة تقع على عجلة دراجة وهي تسير.



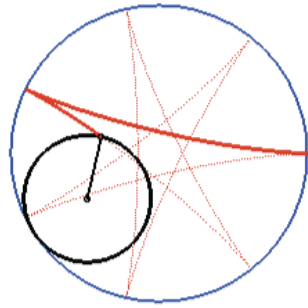
أنجز ذلك بنفسك

٩٣ ٩٤

المستلزمات: ١ قلم، ١ ورقة، أقراص من الورق المتين أو من بلاستيك « بي في سي » (PVC)، ١ قرص أجوف

منحنيات في شكل عَرَى

- ثبت القلم على حافة القرص.
- ارسم منحنيات بتدوير هذا القرص داخل أو خارج قرص آخر.
- هذه المنحنيات تسمى دحرجا داخليا أو دحرجا خارجيا.
- حاول إنشاء مثل تلك المنحنيات الخارجية ذات ١، ٢، أو ٣ فروع...
- حاول إنشاء مثل تلك المنحنيات الداخلية ذات ٢، ٣، أو ٤ فروع...
- هل تنغلق هذه المنحنيات في كل الأحوال؟

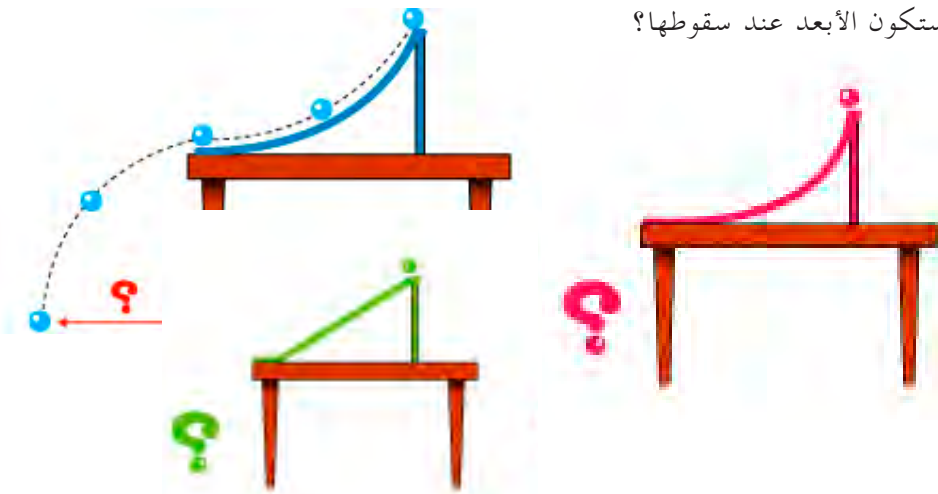


أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ٣ مزحلقات خشبية أو بلاستيكية (مادة بي في سي) شكلها مثل U...، ٣ كريات متشابهة يستحسن أن تكون فولاذية.

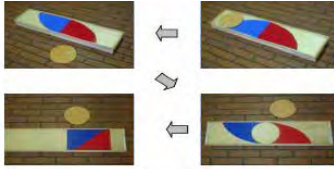
أقصر طريق؟

- ضع المزحلقات على حافة الطاولة. دع الكريات تنطلق في نفس اللحظة.
- أيّ منها تصل الأولى إلى أسفل المزحلقة؟
- أيّ منها ستكون الأبعد عند سقوطها؟



ماذا أتذكر؟

اقترح اسم «الدويري» أو «الدحروج» غاليليو Galileo (١٦٦٧-١٧٤٨). يتمتع هذا المنحنى بخواص أصيلة. إذا ما انطلقت كرتان من ارتفاعين مختلفين ستلتقيان دوما في أسفل الدويري. المساحة الواقعة تحت فرع من فروع دويري تساوي ٣ أضعاف مساحة القرص الذي رسمه.



أفضل مزحلقة؟

هي تلك التي تسمح بالوصول إلى أسفلها بأسرع ما يمكن؟ هذه المسألة اقترحت في شكل تحدٍ من قبل جون بارنولي Bernoulli عام ١٦٩٦. وهو بنفسه من أجاب عن السؤال، كما أجاب عنه أخوه جاك و ج. دي لوبيتال L'Hospital وليبنيتز Leibniz ونيوتن. كانت هذه المسألة منطلق حساب التغيرات. أفضل مزحلقة هي الدويري الذي يسمى هنا «منحنى أصغري الزمن» brachistochrone.

ما نستخلصه: « الخط المستقيم ليس دوما أقصر طريق! »



منحنيات لطيفة

للذهاب بعيداً

مسائل صادمة

المسألة الصادمة هي مسألة تأتي الإجابة عنها متعارضة مع الاستدلال المنطقي الطبيعي . إليك ثلاثة أمثلة من هذا القبيل .



نعتبر قطعتي نقود متشابهة . إحداهما تدور دورة كاملة حول الأخرى المثبتة . كم عدد الدورات التي أدتها القطعة المتحركة حول نفسها ؟ لماذا؟



وضعت زجاجة ممددة أفقياً فوق الطاولة ودارت دورة واحدة حول نفسها، علماً أن عنقها يستند إلى قطعة من خشب .

• ما هي المسافة التي قطعتها نقطة من نقاط الزجاج؟
• ما هي المسافة التي قطعتها نقطة من نقاط العنق؟ لماذا؟



وضعت لوحة فوق أسطوانتين متشابهتين . ما هي المسافة التي تقطعها اللوحة عندما تدور الأسطوانتان دورة واحدة؟

مهن الرياضيات

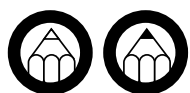
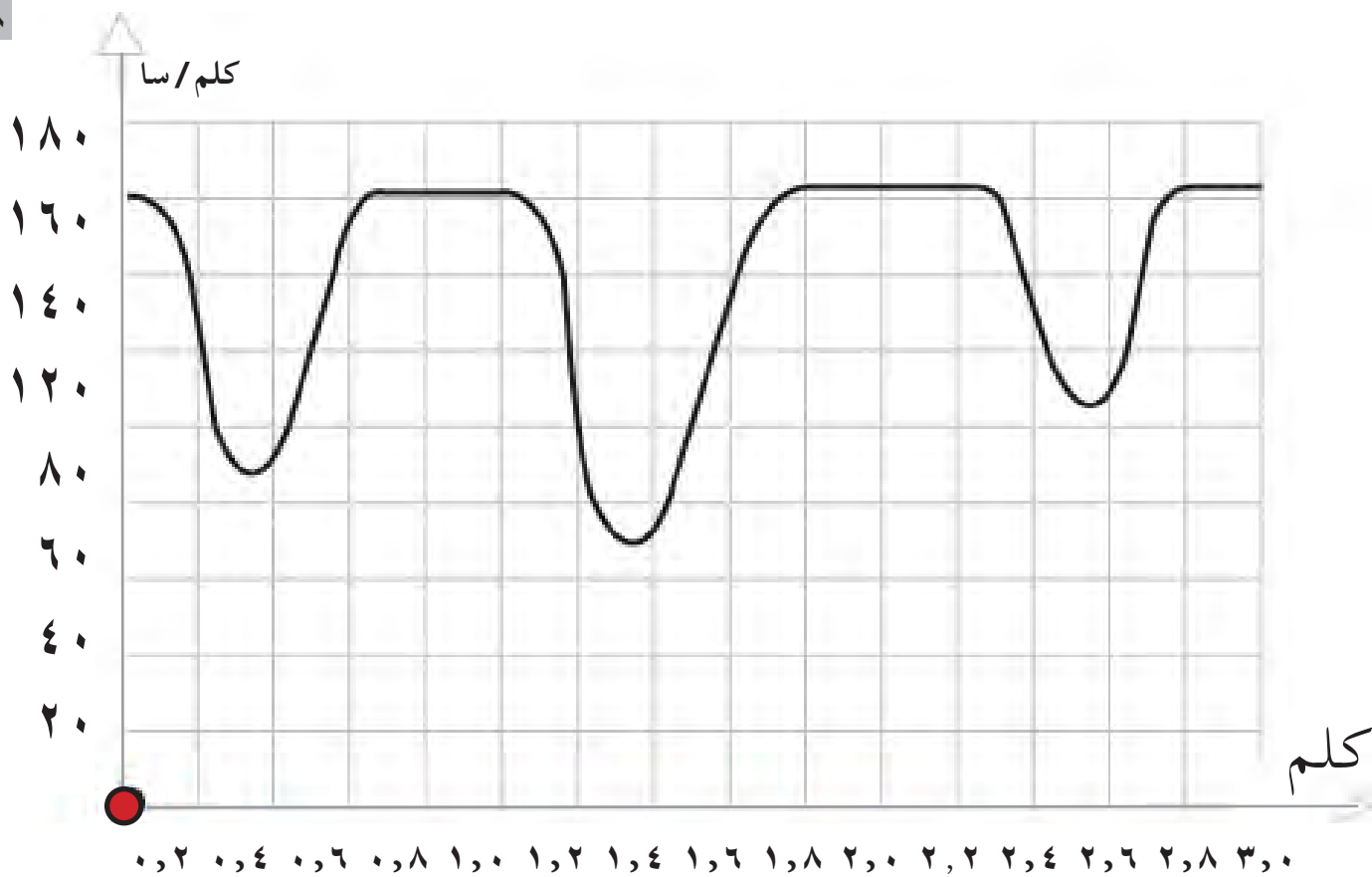
ظُهرت هذه المنحنيات منذ العهود الغابرة . فقد استعملت من قبل أرسطو وبطليموس لوصف حركة الكواكب . ولحد الآن لازال الفلكيون يستعملونها .

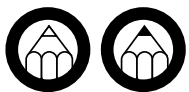
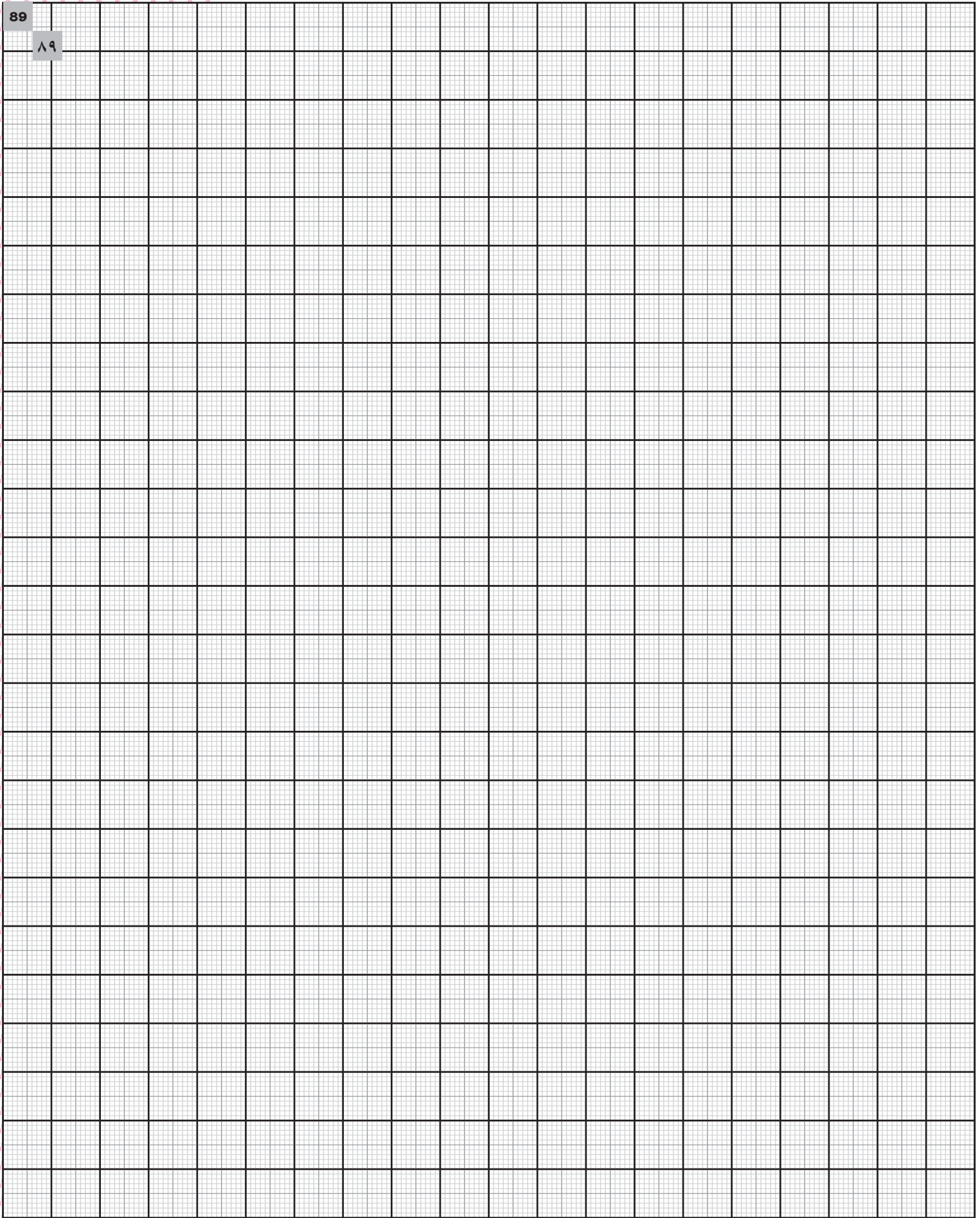
وللحصول على قياسات أكثر دقة للزمن في الملاحة وعلم الفلك ابتكر هيوغنس Huygens عام ١٦٥٩ ساعة دقاقة ذات نواس يهتز بين قوسي دحروج . إنه النواس المتساوي الزمن .

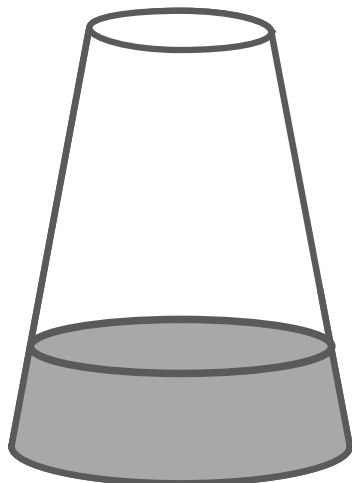
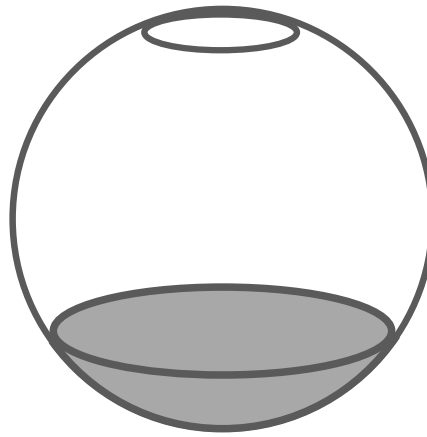
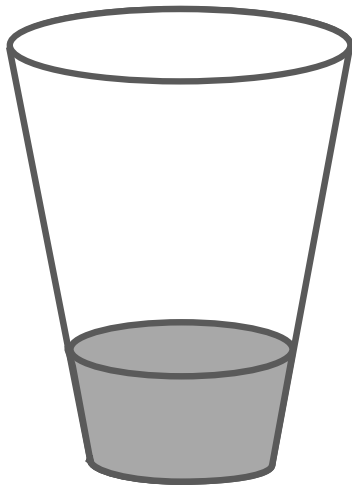
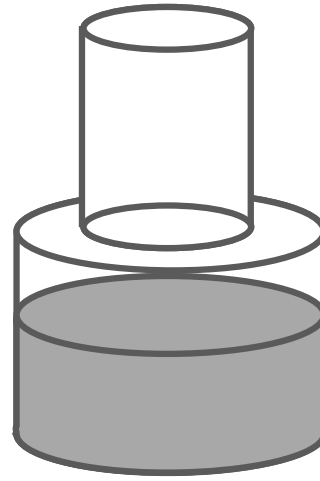
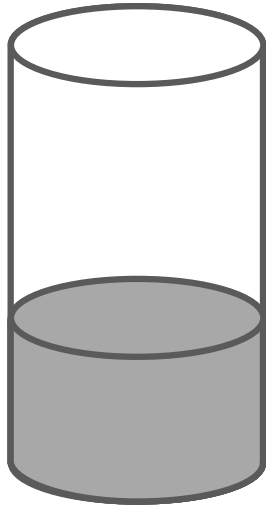
في الميكانيكا تستعمل الأشكال الدحروجية (الدويرة) في الأتراس وفي مخفضات السرعة . لو كان للمسالك الخاصة بالتزلج شكل دحروجي لكانت لها محاسن أكثر مما يتوفر في المسالك الحالية!

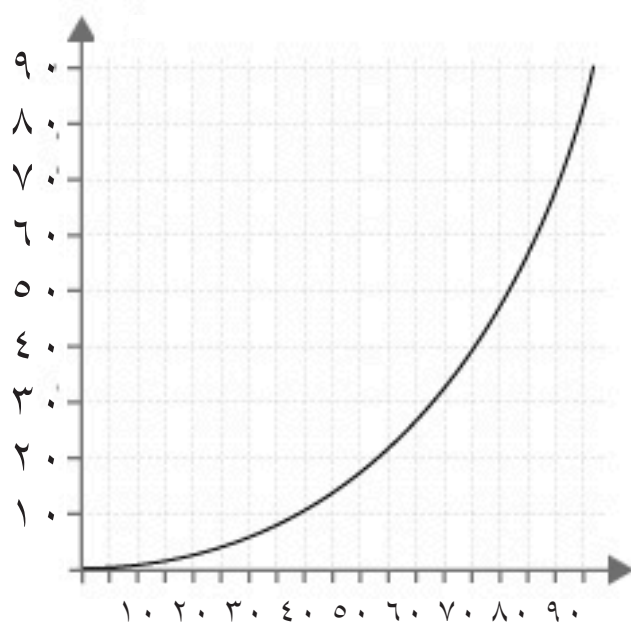
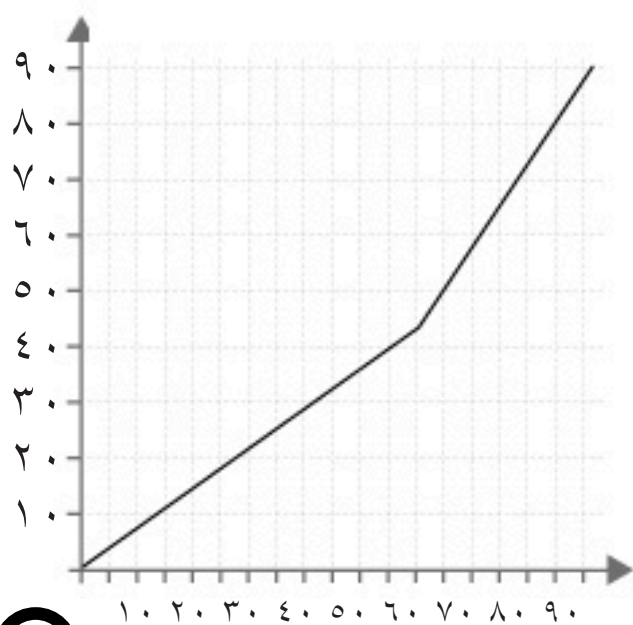
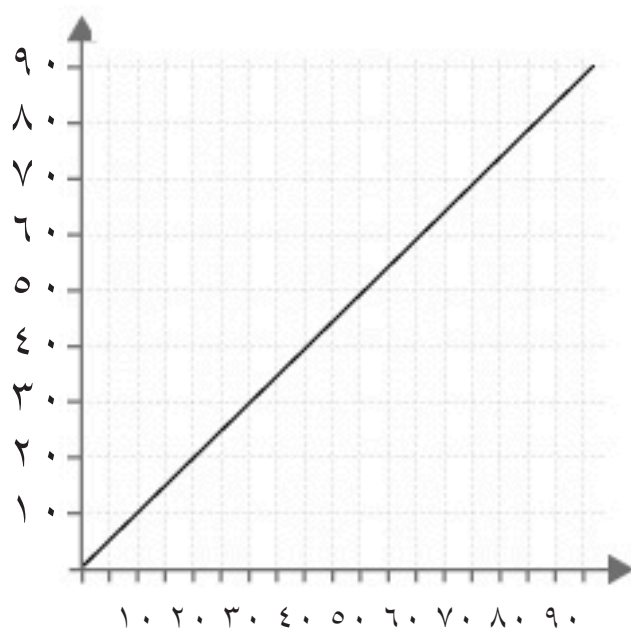
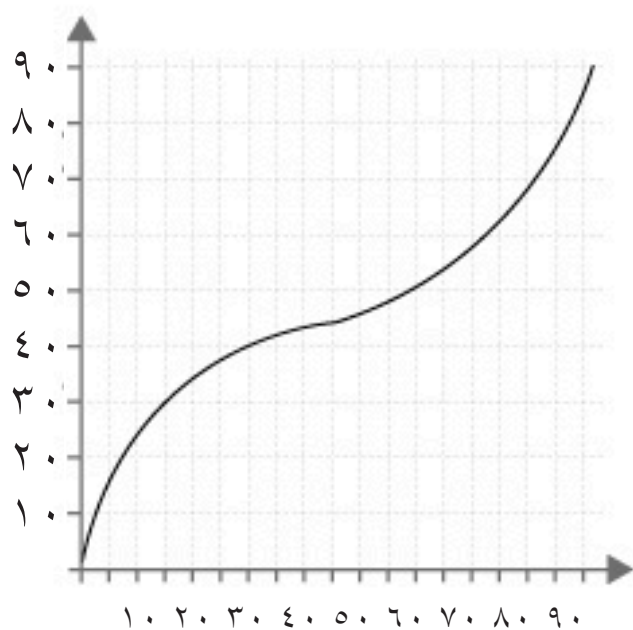
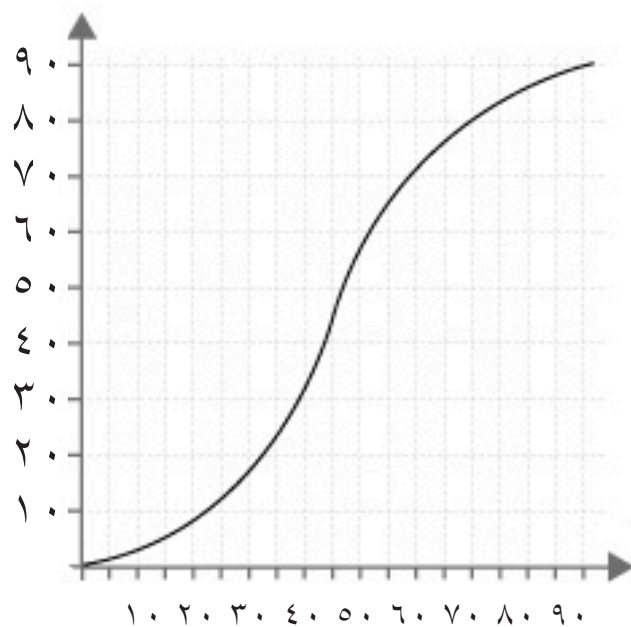
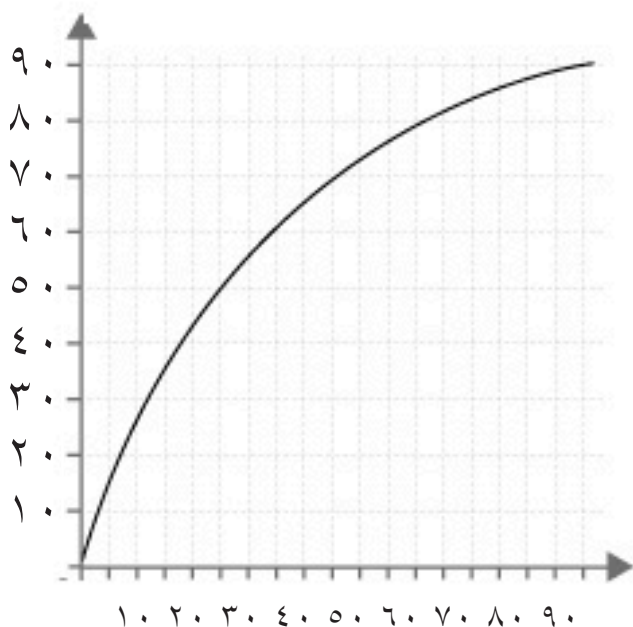
الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

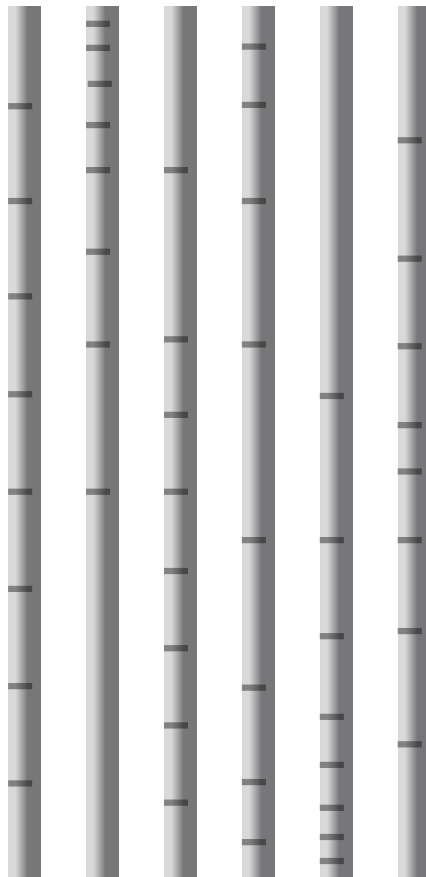
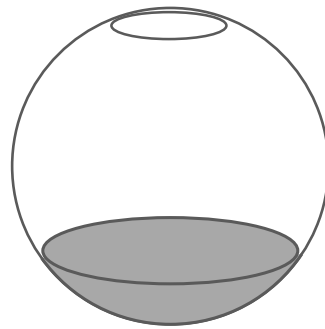
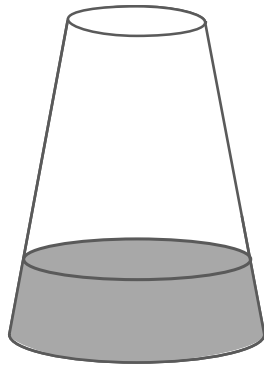
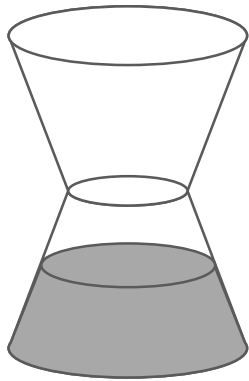
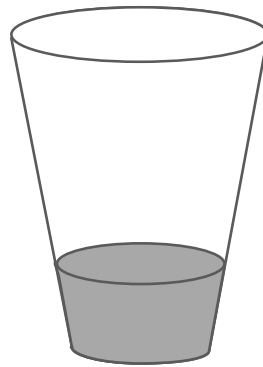
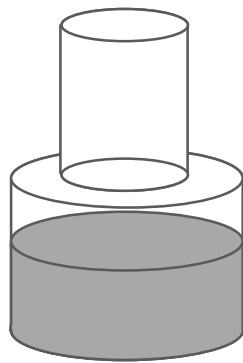
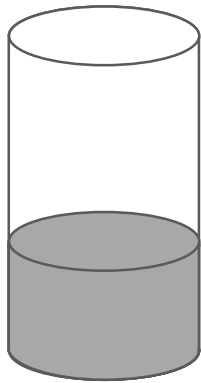
Bernoulli - Brachistochrone curve - Tautochrone curve - Cycloid - Caustic - Huygens' cloc

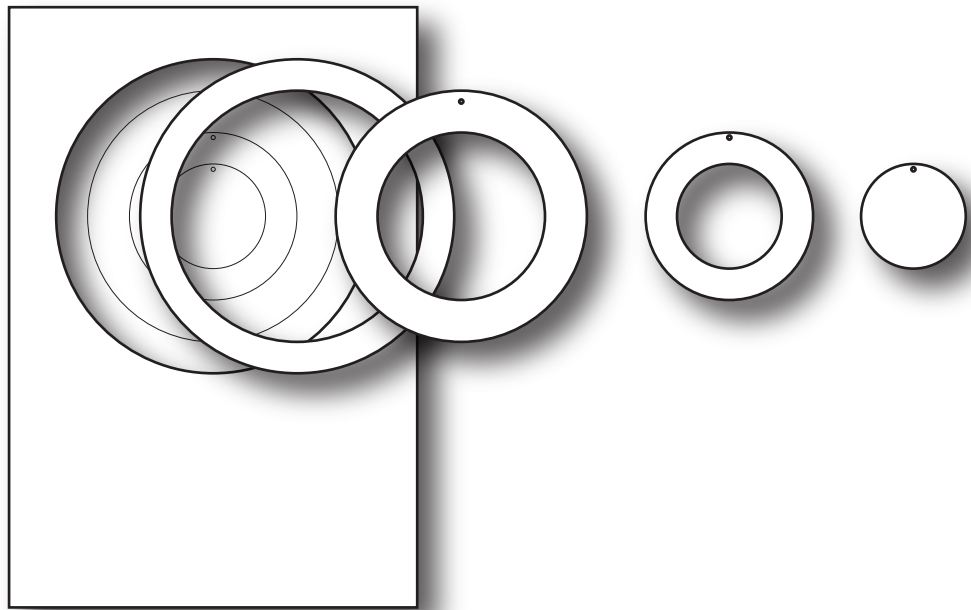
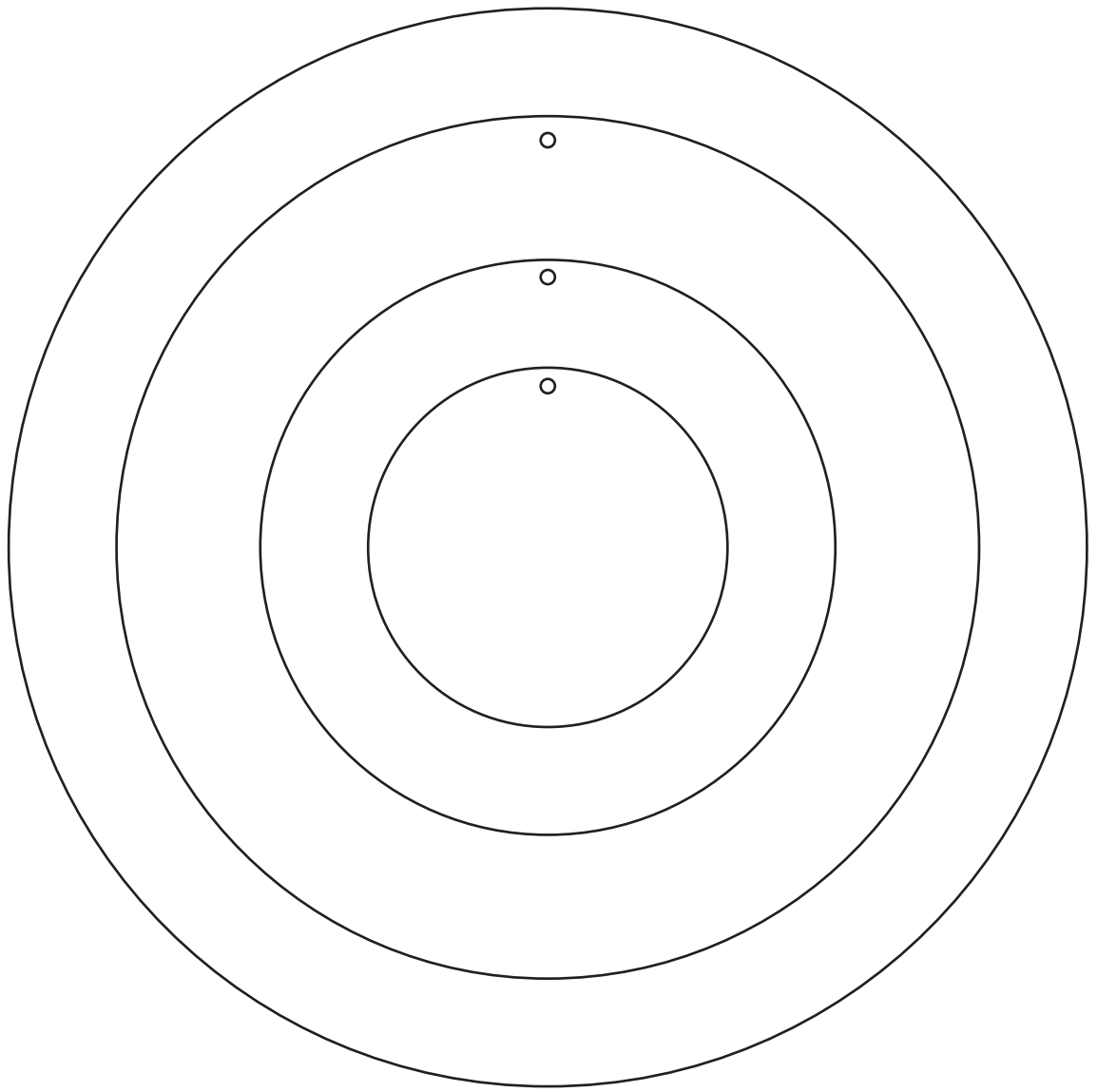


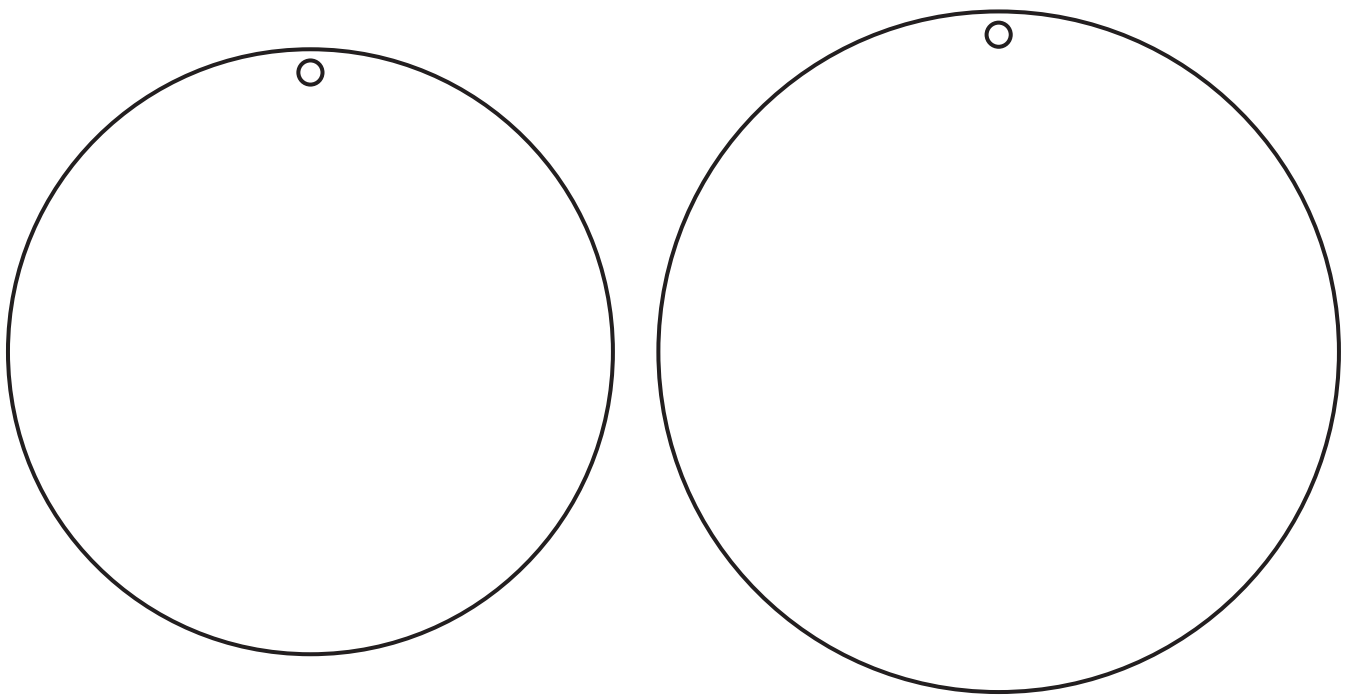
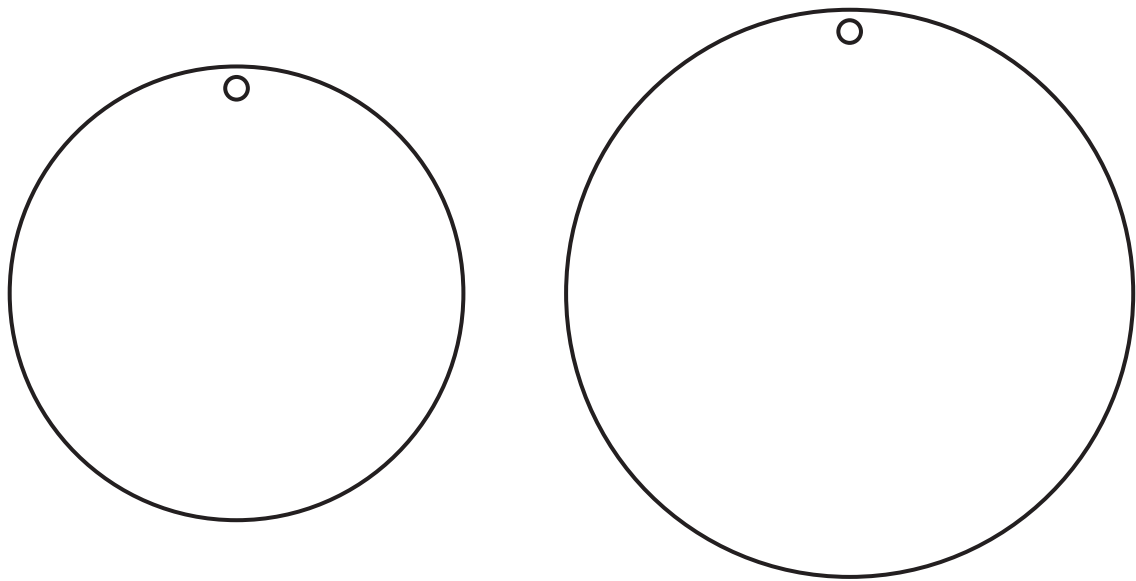
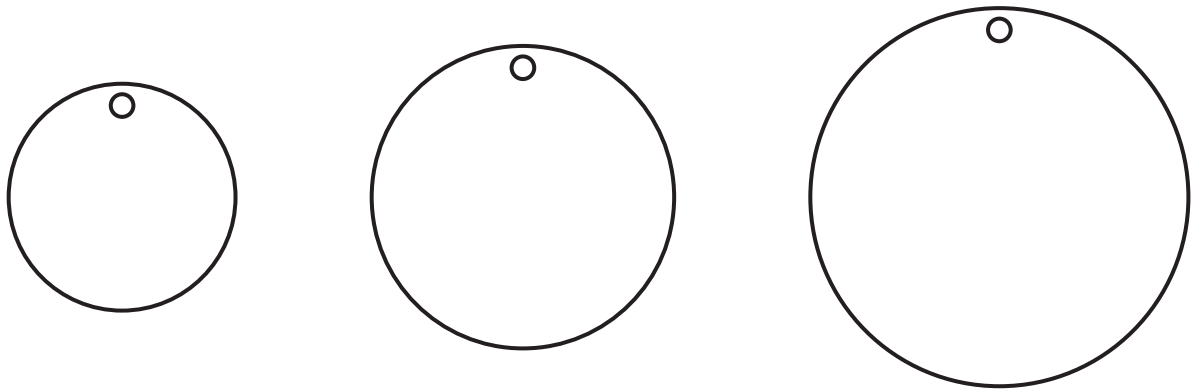










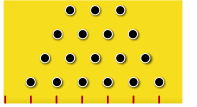




کُرتان حمراوان؟

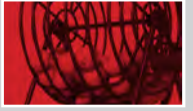


بینغو!



والفائز هو؟

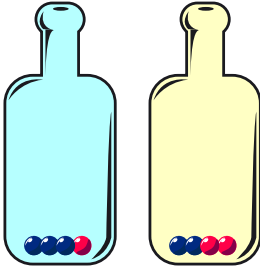




كِرَتَانِ حَمْرَاوَانِ؟

أُنْجِزْ ذَلِكَ بِنَفْسِكَ

المستلزمات: زجاجتان مع ٤ كِرَتَات



كِرَتَانِ مِنْ نَفْسِ اللَّوْنِ أَوْ كِرَتَانِ مُخْتَلِفَتَا اللَّوْنِ؟

- خذ إناءً، ألقه واطهر في عنقه كرتين.
- هل حظوظك أوفر في الحصول على كرتين من نفس اللون أو على كرتين مختلفتي اللون؟
- كيف يمكن التأكد من إجابتك؟
- ماذا لو احتوت كل زجاجة على كرات من كل لون بكمية تفوق الحالة السابقة بألف مرة؟

ماذا أتذكر؟

توقع أو تقدير؟

في أحد الأواني هناك كرات مختلفة الألوان مع تعادل عدد الكرات من كل لون. ومن ثم يمكن أن نعتقد أن لدينا حظوظا متعادلة في الحصول على نفس اللون أو على ألوان مختلفة. لا، أبدا!

للتأكد من ذلك يمكنك:

- إعادة التجربة عديد المرات. إنها المقاربة الإحصائية.
- حساب عدد السبل التي تسمح باختيار كرتين من بين ٤ كرات. إنها المقاربة الاحتمالية.
- في الحالة الأولى فإنك تحصل على تقدير إحصائي للنتيجة. بقدر ما يزداد عدد التجارب بقدر ما تقترب من النتيجة الدقيقة.
- أما في الحالة الثانية فمقاربتك مقارنة بمنزجة للمسألة، ومن ثم فالنتيجة ستكون نظرية.

أُنْجِزْ ذَلِكَ بِنَفْسِكَ

المستلزمات: صندوق اقتراع بـ ٧٥٠ كرية زرقاء و ٢٥٠ حمراء (ظهور ١٠٠ كرة) أو كيس يحتوي على ٧٥٠ كرية زرقاء و ٢٥٠ حمراء، ١ إناء بـ ١٠٠ كرية.

سَبْر - سَبْر

- قم بسحب ١٠٠ كرة، كم عدد الكريات من كل لون؟
- أعد التجربة عديد المرات. بكم تقدّر عدد الكريات من كل لون في صندوق الاقتراع؟

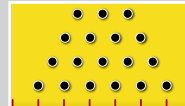
ماذا أتذكر؟

عندما نستطلع عينة من ١٠٠ شخص اختيروا بالصدفة في مجموعة ألف شخص فإننا نحصل على معلومات تقريبية. كذلك الأمر هنا، فعينة من ١٠٠ كرية تقدم معلومات حول عدد الكريات من كل لون في الصندوق بدقة معينة، بـ «هامش» معين (بين ٢١ و ٢٩ كرة حمراء). إنه مجال استطلاعات الرأي.

مَهَنَ الرِّيَاضِيَّاتِ

تستخدم الإحصائيات والاحتمالات اليوم في تسيير أنظمة معقدة: مراقبة الصواريخ، طوابير الانتظار، هوامش الخطأ... لكن أيضا في ألعاب القمار، والاقتصاد، والتأمين، وحساب المعاشات ومخططاتها، واختبارات الجودة، ودراسات الرأي العام...
يسمح الحساب الإحصائي بتوسيع صلاحية معلومات إلى فئة سكانية بكاملها انطلاقا من عينة ممثلة لها. ينبغي على استطلاعات الرأي المتقنة أن تقدم معلومات حول محدودية التقنيات المستخدمة.

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت: Chance - Games - Opinion Polls - Luck

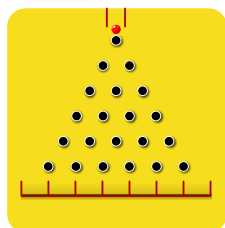


بينغو !

أنجز ذلك بنفسك



المستلزمات : لوحة غالتون Galton (انظر المخطط)، كريات، مسامير، لوحة



هل الصدفة قابلة للحساب ؟

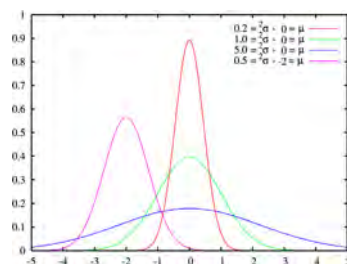
اختر كرية واجعلها تنحدر بلطف .

- هل يمكن توقع أين ستصل ؟
- ما هو المكان الأوفر حظا الذي ستسقط فيه الكرية ؟
- إنه يستحيل أن نتوقع سلوك كل كرية .

لكن حساب الاحتمالات يسمح بتوقع كيف ستتوزع مجموعة الكريات عند الوصول .

ماذا أتذكر ؟

منحنى غاوس Gauss



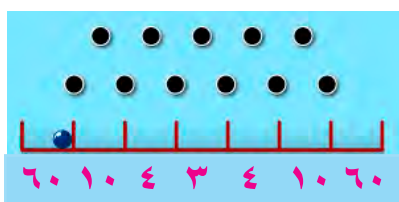
لماذا ذاع صيت شكل هذا المنحنى ؟ لماذا يؤدي دورا أساسيا في الإحصاء ؟ إذا ما صنفنا سكان مدينة أو بلد ... حسب ميزة من الميزات (القامة، الوزن، نسبة الذكاء، مستوى الكفاءة...) فيقدر ما تقترب من المعدل اعتمادا على المقياس الذي تبنيه بقدر ما يزيد عدد الأفراد. وبقدر ما نبتعد عنه بقدر ما ينخفض عدد الأفراد. وفي الطرفين لا نكاد نجد أحدا .

التمثيل البياني لهذا الواقع هو منحنى يسمى المنحنى الجرسى أو منحنى غاوس (١٧٧٧-١٨٥٥). إن الطابع الشمولي لهذا المنحنى ناجم من نتيجة اكتشافها أولر Euler (١٧٠٧-١٧٨٣) ولا بلاس Laplace (١٧٤٩-١٨٢٧) تقول إن توزيع غاوس هو تراكم عديد الإسهامات المستقلة.

أنجز ذلك بنفسك



المستلزمات : لوحة غالتون Galton (انظر المخطط)، ٧ قيم تحت الرفوف



اختر الخانة المناسبة

- يراهن اللاعب ببيورو، أو دولار، أو ... باختيار إحدى الخانات .
- إن سقطت الكرية في تلك الخانة فقد فاز ب ٦٠، أو ١٥، أو ٤، أو ٣ مرات المبلغ الذي راهن به .
- هناك خانات أوفر حظا للاعب . ما هي ؟
- حدد عدد السبل المؤدية إلى كل خانة .
- ما هو حظنا في بلوغ كل الخانات ؟

حتى نتعرف على احتمال الوصول إلى كل خانة، يكفي حساب عدد السبل المؤدية إلى تلك الخانات ! تصادفنا هنا أعداد مثلث باسكال (الكرجي) . ليس للخانات نفس الدور في فوز اللاعب ! هل مالك هذه اللعبة هو الفائز الأكبر ؟

مهن الرياضيات

الاحتمالات والإحصائيات أدوات تسمح بمعالجة البيانات والمعلومات . نجدها ليس في مجال تقنيات المعلومات فحسب (معالجة إحصائية للإشارة والصور) بل نلقاها أيضا في المخاطر (التأمين)، وفي مراقبة الجودة، والاقتصاد، والصحة، والهندسة المالية (المالية الكمية)، الاستشارة الاستراتيجية (تحليل السوق، دراسة الجدوى) ...

وهكذا يمكننا استخدام منحنى غاوس لنمذجة تسيير المبيعات والمخزونات في مؤسسة أو تجارة .

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت :

Gaussian curve - Statistics - Probabilities - Distribution - Expected gain



والفائز هو؟

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات : لاعبان



ورقة، حصاة، مقصّ، ...

يقدم اللاعبان بإحدى اليدين وفي نفس الوقت اختياريهما .
الورقة تلف الحصاة (فتهمزها)، والحصاة تثلّم المقصّ (فتهمزها)، والمقصّ يقصّ الورقة (فيهزمها) !
كيف تفوز في معظم الأحيان في هذه اللعبة المسماة أيضا « شيفومي » (chifoumi) ؟
الجواب : باللعب بضربة حظ في كل مرة .
صيغة أخرى: نضيف بئرا!



أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات : لاعبان، ثم مجموعتا لاعبين، جدول، طبشور

التسابق على ٢٠

ينطق اللاعب الأول بالرقم ١ أو ٢ . وبعده يضيف كل واحد ١ أو ٢ للعدد الذي ينطق به اللاعب السابق .
تسجل الأعداد المتوالية في جدول . والفائز هو أول من ينطق بالعدد ٢٠ .
• المرحلة الأولى : اجعل التلاميذ يلعبون مثنى مثنى .
• المرحلة الثانية : اجعل المقابلة بين مجموعتين من التلاميذ بترك مهلة تشاور لكل مجموعة بعد كل إعلان .
• كل لاعب في المجموعة ينطق بالعدد حينما يأتي دوره .
المرحلة الثالثة : كل مجموعة تعلن عن عناصر من الإستراتيجية الفائزة .
من حق المجموعة الأخرى قبول أو رفض الإعلان . والفائز هو المجموعة التي نالت أكبر عدد من الإعلانات المقبولة .

امتدادات :

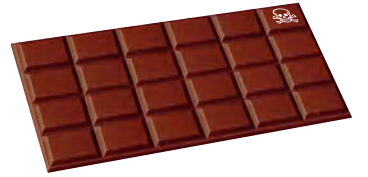
- التسابق على ٣٠ .
- التسابق على ٢٠٢٠ .
- التسابق على ٢٠ أو ٣٠ مع إضافة ١ أو ٢ أو ٣ في كل مرة .

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات : لاعبان، ثم مجموعتا لاعبين، جدول، طبشور، شبكة

لوحة شوكولاتة

عندما يأتي دور التلميذ يقوم بتحديد خانة ويشطب كل الخانات التي لم تشطب بعد والواقعة على يسار وتحت الخانة المشطوبة .
• والخاسر هو من يشطب آخر خانة تقع في الأعلى من الجهة اليمنى .
• يمكن أن نجعل التلاميذ يلعبون بالطريقة المبيّنة في لعبة "التسابق على ٢٠" . امتدادات : اعتبر شبكات أصغر أو أكبر .



أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات : لاعبان، ثم مجموعتا لاعبين، جدول، طبشور، ٣ مكعبات نرد

الألعاب والصدفة والاستراتيجيات

عندما يأتي دور التلميذ يقوم برمي مكعبتي النرد .
• يفوز من له مجموع أكبر من اللاعب الآخر .
• ما هي الأعداد التي لها حظوظ أوفر في الظهور ؟
امتدادات : لعب بـ ٣ مكعبات نرد .



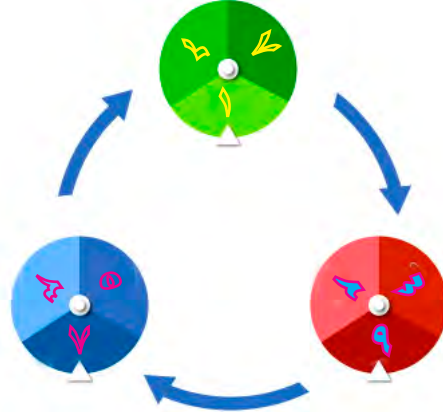


والفائز هو؟

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: لاعب، ٣ عجائلات (لعبة «الروليت»)

لعبة العجيلة («روليت»)!



- اختر أنت عجيلة، وأنا أختار العجيلة الموالية وسيكون الفوز حليفك أكثر منك!
- لماذا؟

في الواقع كل عجيلة «تفوز» عددا من المرات يفوق عدد فوز سابقتها.

ماذا أتذكر؟

هذه الألعاب هي أمثلة من «نظرية الألعاب». في الحالتين الأوليين، تُعتبر اللعبة ذات معلومة دقيقة ولها نهاية. هناك دوماً فائز ومنهزم، ومن ثمّ فهي إستراتيجية فائزة. وهنا الفائز هو اللاعب الأول (ويتقن اللعب!). أما في اللعبة الثانية فالإستراتيجية الفائزة ليست سهلة المنال!

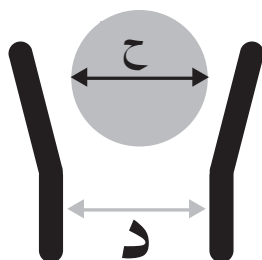
لقد ساهمت اللعبة الثالثة في ميلاد نظرية الألعاب خلال القرن السابع عشر وذلك بفضل أعمال بليز باسكال و شوفالييه دي ميرى Chevalier de Méré. ثم طوّرت إبان القرن العشرين من قبل فون نومان Von Neumann وأوسكار مورغنستارن Oskar Morgenstern. وأثبتت الألعاب الأخيرة أنه يمكن أحيانا التحكم في الحظ. وسمحت وضعيات مماثلة للعبة العجائلات بوجه خاص لكوندرسيه Condorcet (١٧٤٣-١٧٩٤) بإثبات أن في الديمقراطية ليس هناك نظام تصويت «أفضل» من غيره!

مهن الرياضيات

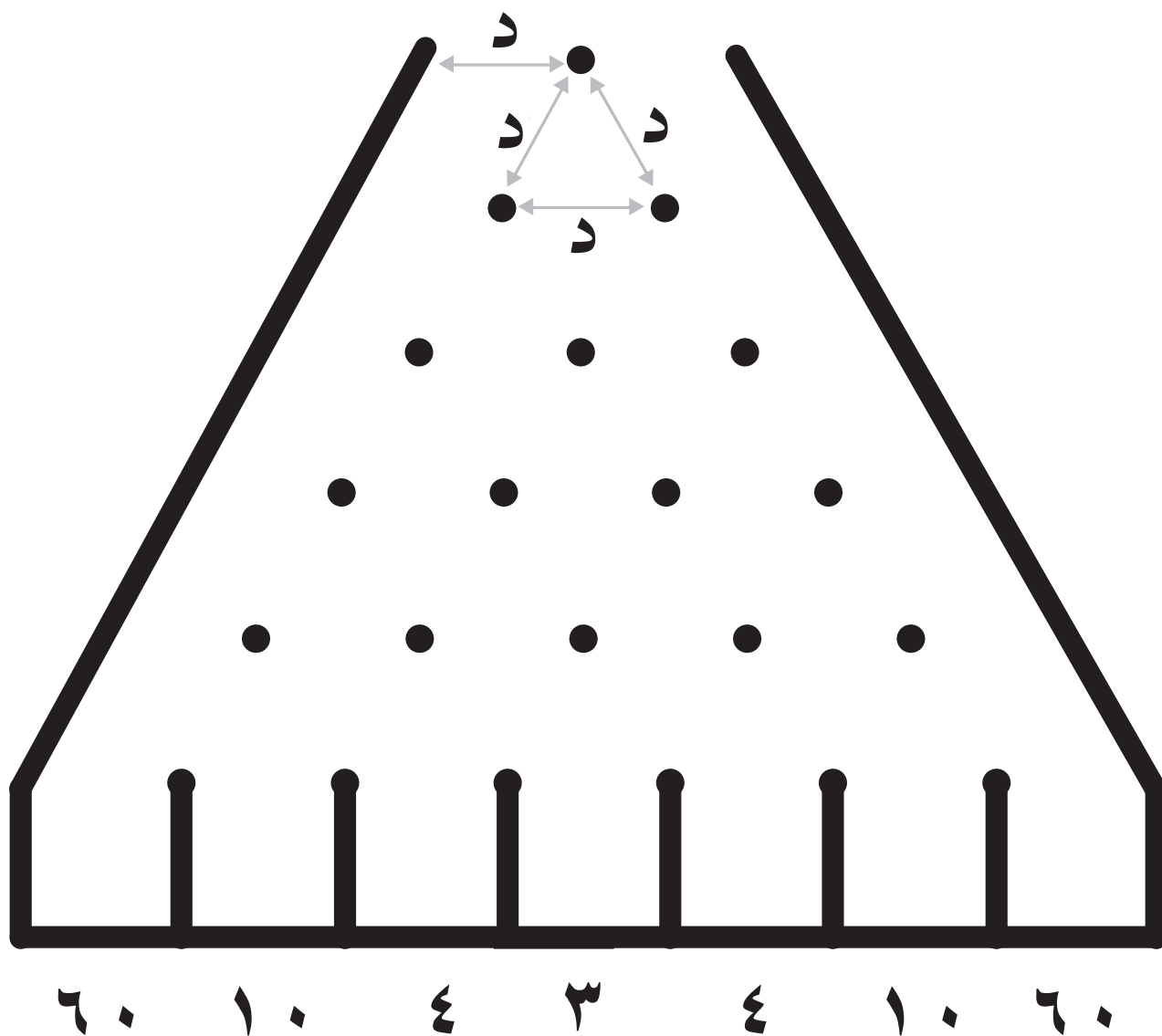
نظرية الألعاب حاضرة بقوة اليوم، بفضل إسهام الاحتمالات والإحصائيات، في كل الوضعيات ذات الصلة بالإستراتيجية، والقرار، والمنافسة، والتعاون. وبطبيعة الحال فنحن نجدها في الألعاب، لكننا نجدها أيضا وبوجه خاص في الاقتصاد، والتجارة، والتسويق. إنها تستخدم أيضا في المعلوماتية وفي فنّ الخوارزميات..

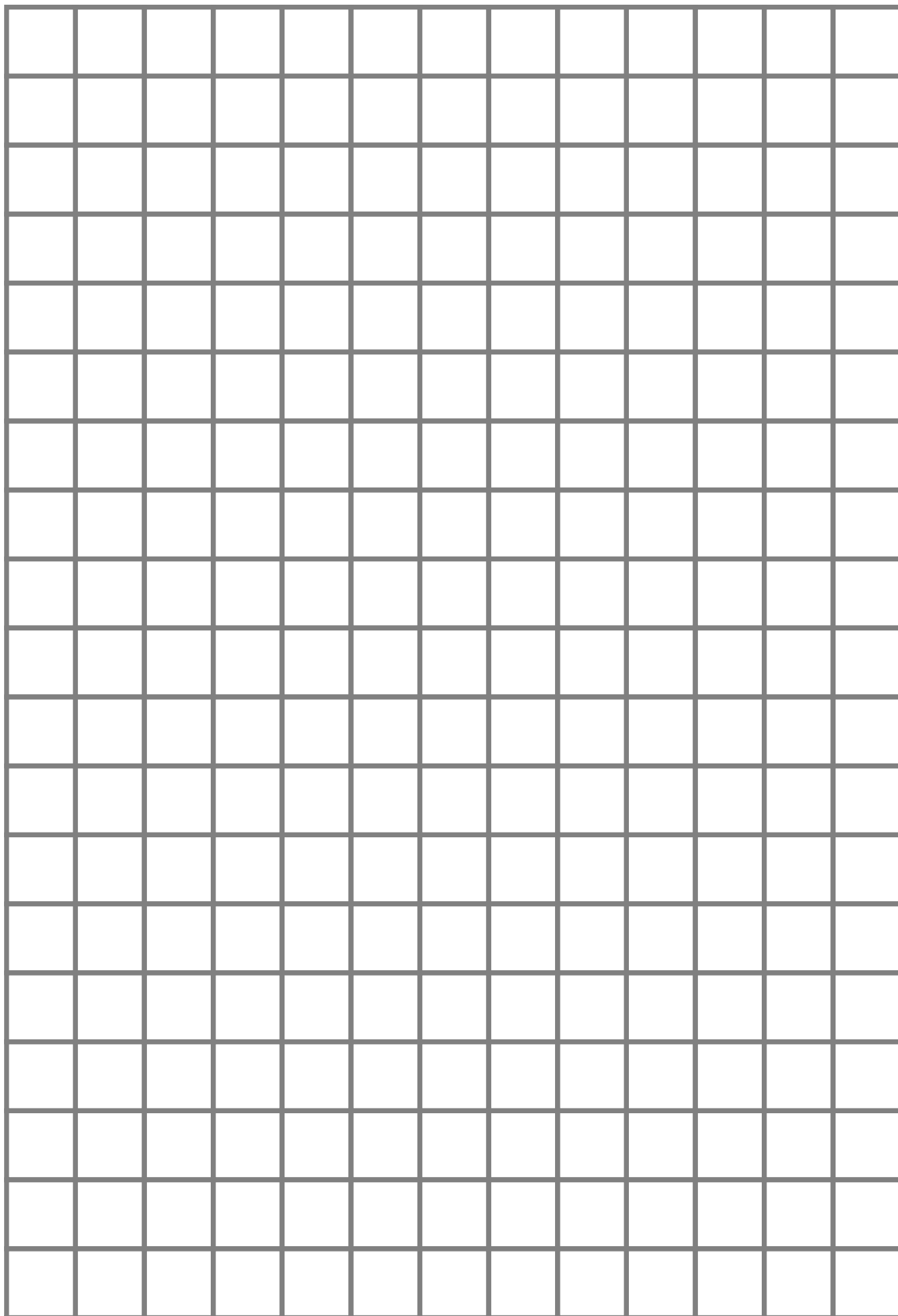
الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Gaussian curve - Statistics - Probabilities - Distribution - Expected gain



ح = ٣٠ ملم
د = ٣٥ ملم





٨ . تجويد

فقاعات الصابون

أقصر طريق

أفضل شكل





فقاعات الصابون

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: سلك حديدي أو مِمَصَّات، ١ إناء (طشت) ماء بالصابون

الطبيعة كسولة

- أنشئ رباعي سطوح، مكعب، ثماني سطوح، لولب...
- قبل غطسها في الماء تخيل كيف ستتوزع المساحات الحاملة لرغوة الصابون.
- أغطسها وتأمل في المساحات الحاملة للرغوة.
- كم هناك من وجه حول الأحرف؟ وكم من حرف حول الرؤوس؟



أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: سلك حديدي، مِمَصَّات، لوحة، إناء ماء بالصابون

من فقاعة إلى أخرى؟

- داخل إطار مربع طول ضلعه ١٠ سم (تقريبا) محيطه سلك حديدي، ضع خيطا مغلقا طوله ٢٥ سم (تقريبا) واربطه برؤوس المربع بخيط ثان.
- أغطس الكل في الماء ثم أخرجه.
- ما هو الشكل الذي سيأخذه الخيط الداخلي إذا ما ثقبته بإصبعك بحركة سريعة؟
- اصنع فقاعة في الهواء. ما هو شكلها؟
- ضع فقاعة على اللوحة. كيف تعتمد الفقاعة على اللوحة؟
- ضع على اللوحة فقاعتين، إحداهما صغيرة والأخرى كبيرة دون أن تتماسا.
- أدخل مِمَصًّا بينهما. ماذا يحدث؟
- ضع على سلك حديدي في شكل U خيطا غير مشدود، واغطس الكل في الماء المزوج بالصابون.
- أجدب الخيط قليلا. ما هو الشكل الذي يأخذه؟

مهن الرياضيات

تجد هذه الأشكال في الطبيعة والهندسة المعمارية. فمنذ أزيد من ثلاثة قرون انشغل الرياضياتيون والفيزيائيون بمسائل المساحات الأصغرية. ومنذ نحو خمسين سنة اهتم بها الفيزيائيون والكيميائيون والبيولوجيون والمعماريون... ذلك شأن بيوت النحل، والهياكل العظمية، وبيوت العنكبوت... فالطبيعة اتخذت في الكثير من الأحيان أفضل الأشكال. وفي مجال صناعة السيارات والملاحة الجوية والبناء وهندسة الجسور... فقد بحث المهندسون عن الحلول المثلى لتخفيض الوزن، والازدحام في الطرقات، واستهلاك الطاقة، والتكلفة البيئية للكائنات التي يصممونها.

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Soap bubble - Minimal surfaces - Superficial tension

ماذا أتذكر؟

رياضيات برغوة الصابون
فقاعة الصابون كروية الشكل. لماذا؟
باعتبار مساحة معينة فإن الدائرة هي التي لها أقصر محيط يحد تلك المساحة. وباعتبار حجم معين فالغلاف الكروي هو الذي يمتلك أصغر مساحة تحد ذلك الحجم. في الطبيعة تميل الجهود إلى أن تكون أضعف ما يمكن. هذه الأشكال توافق الحد الأدنى للطاقة الكامنة المناسبة مع سطح الأجسام. تنشئ جزئيات الصابون شدة على السطح تجعل سطوح رغوة الصابون تأخذ أصغر قيمة لها.
كان البلجيكي فارديناد بلاتو Ferdinand Plateau أول من درس هذه الأشكال خلال الستينيات من القرن التاسع عشر.
وقد لاحظ:

- عندما تعتمد فقاعة على سطح فستكون عمودية عليه.
- عندما تلتقي سطوح حاملة لرغوة صابون فهي تصطف ثلاثة ثلاثة وفق خط بزوايا تساوي ١٢٠°، وأربعة أربعة حول نقطة بزوايا ثابتة (١٠٩° ٢٨'...).



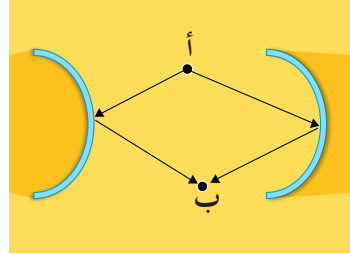
أقصر طريق

أنجز ذلك بنفسك

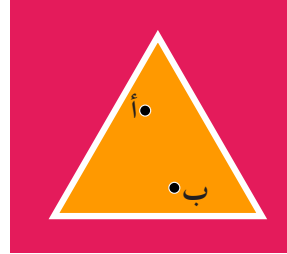
المستلزمات: ورق، قلم

أقصر طريق

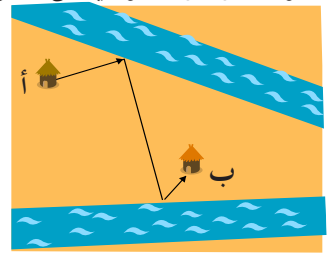
ما هو أقصر طريق يؤدي من أ إلى ب ؟



- عبر مرآة محدبة
- عبر مرآة مقعرة ؟



- مروراً بالأضلاع الثلاثة
- للمثلث ؟



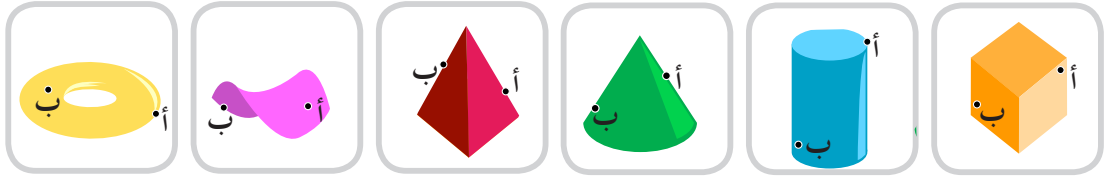
- مروراً بأحد النهرين
- مروراً بالنهرين معاً

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، قلم، ١ مكعب، ١ أسطوانة، ١ مخروط، ١ هرم، ١ «سرج فرس»، ١ طارة

أقصر طريق على سطح

ما هو أقصر طريق يؤدي من أ إلى ب ؟



أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: كرة أرضية، خيط أو خيط مطاط

وعلى الأرض ؟

- اختر نقطتين على خط العرض الثلاثين أو الأربعين :
- بباريس ومونتريال أو كيب تاون وسانتياغو...
- ما هو أقصر طريق للذهاب من مدينة إلى أخرى ؟
- تأكد باستخدام الخيط.
- ماذا يوافق هذا الخط على الكرة الأرضية ؟



مهن الرياضيات

على الأرض، هذه المسائل المتعلقة بموضوع أقصر طريق تهتم كل مسيري شبكات السوائل والكهرباء والغاز والبتروول والماء، وأيضا الاتصالات البرية. يمكن حلها رياضياتيا أو خوارزميا.

وعلى سطح الأرض فهذه المواضيع يستخدمها البحارة منذ زمن بعيد. واليوم يستخدمها أيضا الطيارون حتى في حالة الرحلات الطويلة. وعندما يتعلق الأمر بالرحلات الفضائية فإن المسائل من هذا النوع تصبح أكثر تعقيدا إذ تتدخل فيها جاذبية مختلف الكواكب.

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت :

Shortest path - Minimum - Curvature - Gauss - Developable surface

ماذا أتذكر ؟

الخط المستقيم ليس أقصر طريق... عموماً! أقصر طريق على سطح يسمى جيوديزية.

- إذا تعلق الأمر بالسطوح المستوية في الهندسة الأقليدية فالخط المستقيم هو الأقصر.

- وعلى سطح قابل للنشر، كالأسطوانة والمخروط ومتعدد السطوح...، إنه أيضا قطعة مستقيمة تربط النقطتين ترسم على السطح عندما يكون منشورا.

- أما إذا لم يكن للسطح تقوس منعدم عند كل نقطة فأقصر طريق لن يكون مستقيماً. ذلك حال «سرج الفرس» الذي له تقوس سالب وحال غلاف الكرة الذي له تقوس موجب.

- على غلاف الكرة فأقصر طريق يكون قوساً من الدائرة الكبرى (الدائرة المتمركزة في مركز الأرض).

كان غاوس Gauss قد طور هذه المسائل خلال القرن الـ ١٩.

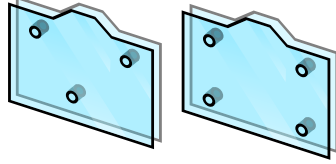


أفضل شكل

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: لوحتان من الزجاج الاصطناعي موصولتان بـ ٣ أو ٤ أو ٥ قضبان، ١ إناء (طشت) ماء بالصابون

أقصر طريق بين ٣ نقاط



- ضع ٣ قضبان بين اللوحتين*.
- أغطس الكل. أخرجه وتأمل.
- كم هناك من نقطة؟ من حرف؟ ما هي الزاوية التي تشكلها هذه الأحرف؟
- ضع ٤ قضبان بين اللوحتين.

– قبل إغطاس الكل تخيل كيف ستتوزع الروابط الصابونية. هل هي في شكل X أو U أو Z أو H أو أغطس وتأمل : كم عدد النقاط؟ الأحرف؟

* ماذا لو كانت إحدى زوايا المثلث أكبر من ١٢٠°؟

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: لوحتان من الزجاج الاصطناعي، مِصّ

للاستزادة

سيترك رُحْم أقراص فراغات. والمضلع السداسي هو الذي يشغل أكبر مساحة دون ترك ثقب (فراغات). نجد ذلك في بيوت النحل. النحل الحل الأمثل؟ ورغم ذلك فقاع خلايا بيت النحل ليس له الشكل الأكثر اقتصادا ليشغل حجما معيناً. لقد تم الوصول منذ مدة إلى أفضل من ذلك دون معرفة ما إذا كان هو أفضل شكل ممكن.

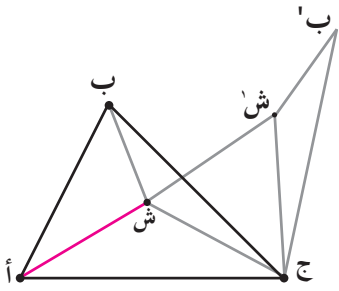
بيوت النحل

- أظهر فقاعة بين اللوحتين. ستتشكل أسطوانة.
- ضع سلسلة من الفقاعات الصغيرة الواحدة تلو الأخرى. كيف ترتبط بعضها ببعض؟
- أدخل شفرة عمودياً على اللوحتين وتأمل.
- إذا كانت الفقاعات من نفس الحجم ما هو الشكل الذي ستأخذه؟ كيف تتجمع؟

ماذا أتذكر؟

حل صابوني رياضي

يوضح الحلول برغوة الصابون أقصر طريق يربط ٣ نقاط، ٤ نقاط وأكثر من ذلك. كانت المسألة قد حلت في حالة ٣ نقاط من قبل السويسري جوزف شتينر Joseph Steiner خلال القرن الـ ١٩.



إليك حلاً بسيطاً: ننشئ المثلث ج ش ب' المحصل عليه بدورة ٦٠° انطلاقاً من المثلث ج ش ب.

لدينا: ش أ + ش ب + ش ج = ش أ + ش ب' + ش ج'

تكون هذه الكمية أصغر عندما تكون النقاط الأربع أ، ش، ب، ج على نفس الاستقامة. وفي هذه الحالة، تكون قيمة الزاويتين ب ش ج و ج ش ب' تساوي ١٢٠°. وهو المطلوب!

مدرسة ثلاث قرى

يمكن تعويض النقاط الـ ٣، ٤، ٥ بقري، مزارع... ونقطة شتينر بمدرسة أو مستشفى... الجواب أعطاه الماء المصوبن. كيف نحل المسألة إذا اختلفت أعداد السكان؟

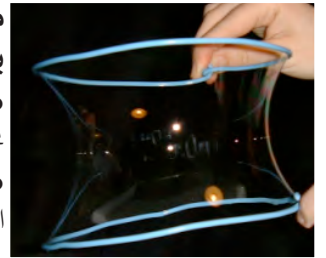
أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: دائرتان، و ٤ قضبان بسلك حديدي

مساحات أصغر

بين دائرتين، مستقيمين، ٤ مستقيمت...

- أخرج الدائرتين من الإناء وأبعدهما قليلاً الواحدة عن الأخرى. أين نجد هذه المساحة؟
- أخرج قضيبين من الإناء وأبعد قليلاً الواحد عن الآخر، وأدرهما قليلاً الواحد بالنسبة للآخر. أين نجد هذه المساحة؟
- أعد التجربة بـ ٤ قضبان مرتبطة.



مهن الرياضيات

نجد هذه المساحات الأصغر في الخواص الفيزيائية والكيميائية للمواد، وفي البيولوجيا والهندسة المعمارية (هياكل في شكل حواجز أو حتى خرسانة). تتميز الأشكال الشبيهة ببيت النحل بخفتها ومقاومتها وتمانتها. وتستخدم هذه الأشكال، المصنوعة من الألمنيوم، في هياكل طائرات الإربوس ٣٨٠ والقطارات السريعة، وفي أغشية الأقمار الصناعية... كما أنها كثيرة الاستعمال، بالورق المقوى أو البوليفينيل، في الأبواب ومنصات النقل...

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

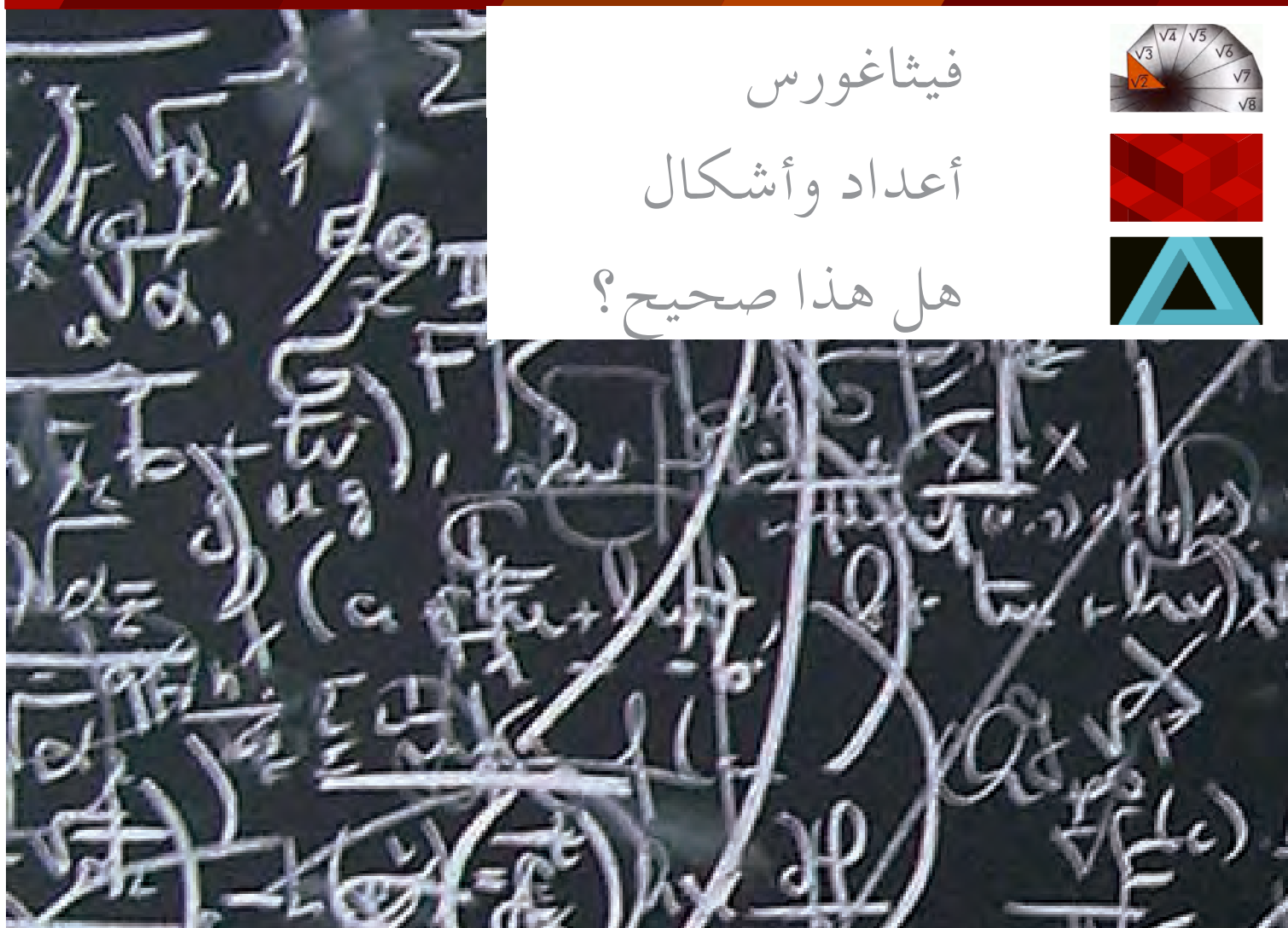
Optimization - Minimal surfaces - Honeycombs - Stretched structur

٩. برهن

فيثاغورس

أعداد وأشكال

هل هذا صحيح؟





فيثاغورس

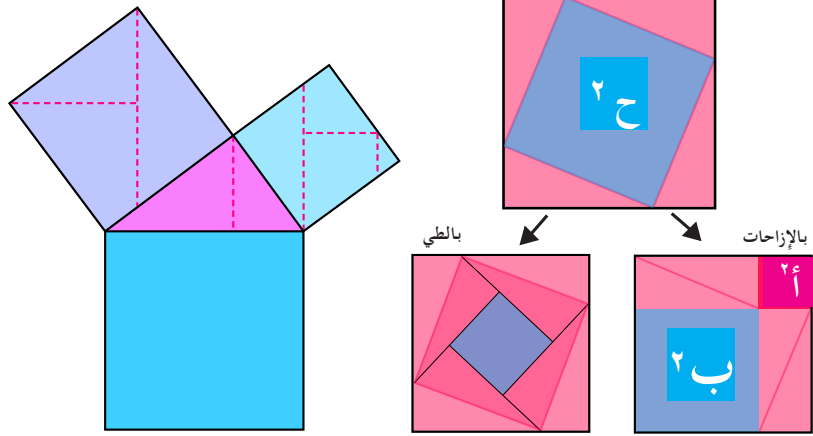
أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: مريكتان للقص

١١٣ ١١٤

نظرية فيثاغورس

بتغيير مواقع قطع كل مريكة قدم برهاننا لنظرية فيثاغورس.



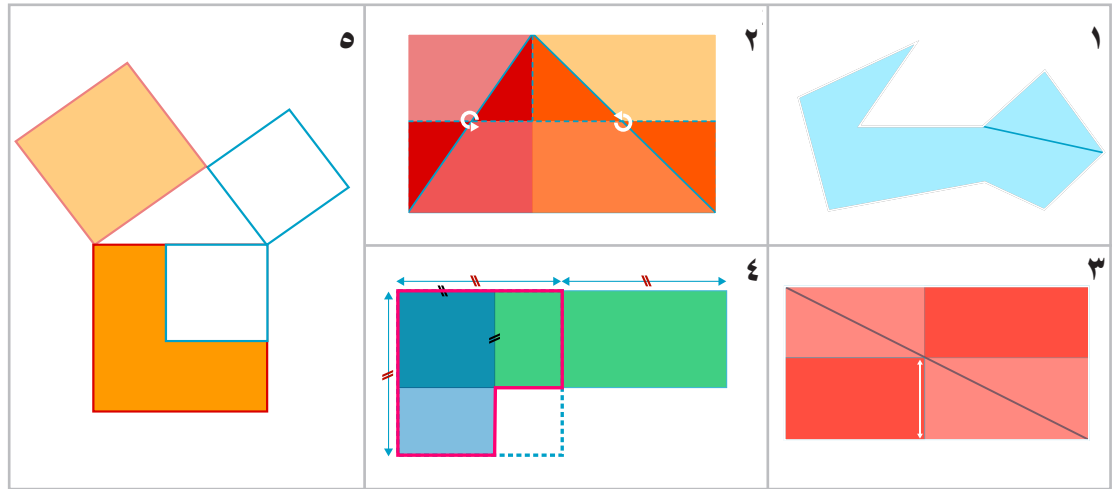
أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، قلم، مقص

من مضلع إلى مربع من نفس المساحة

باستخدام التقطيع اكتشف براهين أتى بها أفقليدس:

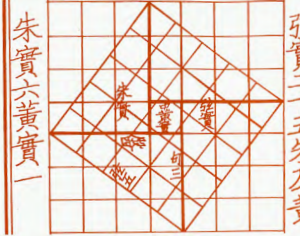
١. كل مضلع يمكن تقسيمه إلى مجموع مثلثات.
٢. يمكن تقسيم كل مثلث لإنشاء مستطيل من نفس المساحة.
٣. يمكن تقسيم كل مستطيل إلى مستطيل آخر من نفس المساحة عرضه معلوم.
٤. يمكن اعتبار كل مستطيل كفرق مربعين.
٥. بفضل نظرية فيثاغورس، يمكن إنشاء مربع يساوي فرق مربعين!



خاتمة

يمكن تقطيع كل مضلع بطريقة تسمح بإنشاء مربع له نفس المساحة. فمنذ الإغريق، صار حساب المساحات يردّ إلى مقارنة المساحة المعطاة بمساحة مربع. نعبر عن ذلك بالقول إن المساحة قابلة للتربيع. لاحظ أنها تقاس بـ $م^2$ ، $كلم^2$...

ماذا أتذكر



Chou-pei Suan-King

شو-بي سوان-كينغ

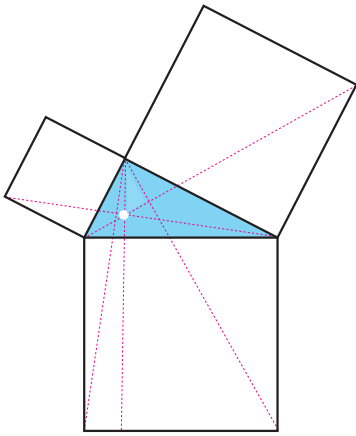
(١١٠٥ قبل الميلاد، الصين)

٣٠٠٠ سنة من البحوث

يعرف قدماء العلماء في مصر والصين منذ عهد بعيد نتائج صيغت بدلالة الأعداد الصحيحة (مثل $٢٥ = ٢٤ + ٢٣$).

وكان الإغريق أول من حاول إثبات هذه النتائج بصورة عامة. وهكذا، حملت النظرية القائلة «مربع الوتر...» اسم فيثاغورس (ق. ٦ قبل الميلاد). وكان أفقليدس (ق. ٣ ق.م.) قد قدم أقدم برهان معروف عليها.

هناك نحو ٤٠٠ برهان مختلف! وأدت هذه البراهين إلى مسائل ونتائج جديدة مثل تلك القائلة بأن قطر مربع، ضلعه عدد صحيح، له طول يساوي عددا أصم.





فيثاغورس

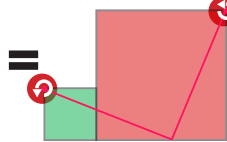
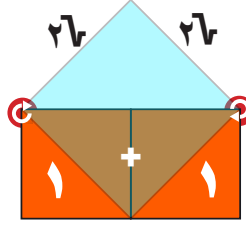
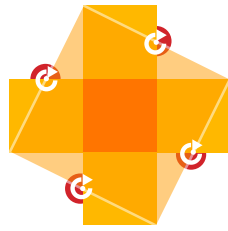
أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، قلم، مقص

ضاعف مرتين، ثلاث مرات

أنشئ بالتقطيع مربعا:

- يساوي مجموع مربعين،
 - يساوي مرتين مربعا معطى،
 - يساوي ٣ مرات، ٥ مرات... مربعا معطى.
- استعمل في ذلك أقل ما يمكن من التقطيع.



ماذا أتذكر؟

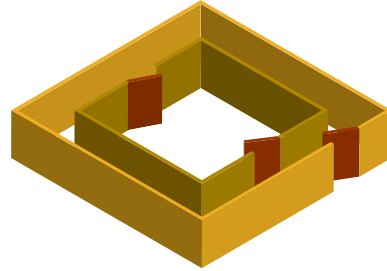
- كان الصينيون يعتبرون المسائل الرياضية -حسابية كانت أو هندسية- كمربكات. أما عند الإغريق فقد أدت مسائل التربيع والمضاعفة إلى مسائل شهيرة:
- أصمّية قطر المربع الذي طول ضلعه يساوي ١،
 - مضاعفة المكعب،
 - تربيع الدائرة.

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، قلم

الأريكة

- ما هي الأبعاد القصوى لأريكة علما أنها تعبر ممرًا يبلغ عرضه مترا واحدا ويدور بزاوية قائمة؟ هل يمكن أن يلج في القاعة المركزية؟ نفرض أن الأمر يتعلق بعمود أو سلم بدل الأريكة؟ تنبيه: أبعاد الأبواب هي: ٨٠ × ٢١٠ سم!

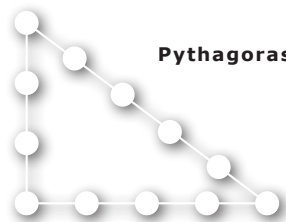


مهن الرياضيات

إن البحث عن إثباتات وبراهين توظف نتائج رياضياتية تم اكتسابها هو أساس نشاط عالم الرياضيات معتبرا إياه عمله الأصل الذي يميّزه. من بين تطبيقات نظرية فيثاغورس استخدامها في إنشاء أطوال صماء مثل جذور الأعداد ٢، ٣، ٥، ... وهي تستعمل إلى اليوم من قبل البنائين والمعماريين والقائمين على نقل أحجام كبيرة!

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

Pythagoras - Euclid - Hypotenuse - Irrational numbers - Duplication - Squaring



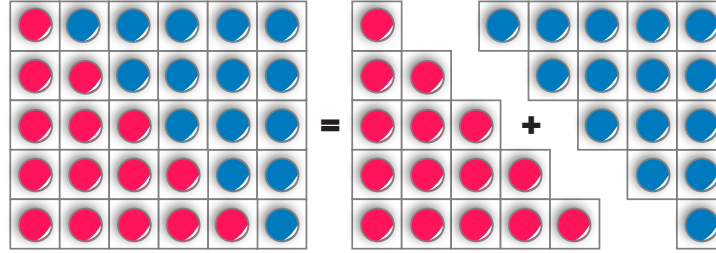
أعداد وأشكال

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: قريصات مستديرة أو مربعة

الأعداد المثلثية: ١، ٣، ٦، ١٠، ١٥، ...

إنها مجاميع أولى الأعداد الصحيحة.

ثمة طريقتان لتعيين هذا العدد الذي نرمز إليه بـ **مج**:

أو:

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120 \\
 & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120 \\
 & 12 \times 13 = 156 \\
 & \frac{12 \times 13}{2} = 78 = \text{مج}
 \end{aligned}$$

أثبت، بصفة عامة، أن: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

تأكد باعتبار أولى الأعداد الصحيحة أن كلا منها يكتب كمجموع ٤ أعداد مثلثية على الأكثر.

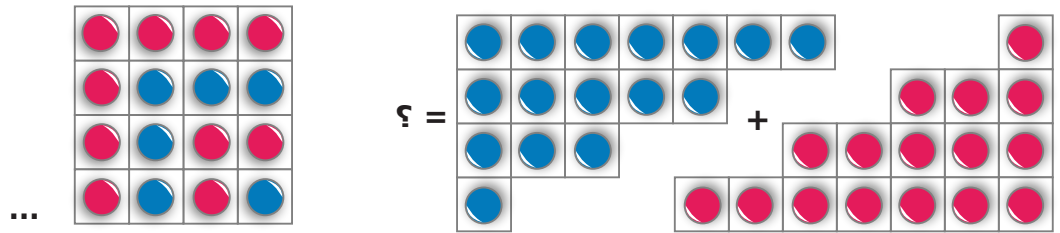
الأعداد المربعة: ١، ٤، ٩، ١٦، ...

إنها تساوي مجاميع أولى الأعداد الفردية. ثمة طريقتان لحساب هذه المجاميع

أثبت بصفة عامة أن: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$

تأكد باعتبار أولى الأعداد الصحيحة أن كلا منها يكتب كمجموع ٤ أعداد مربعة على الأكثر.

أو:



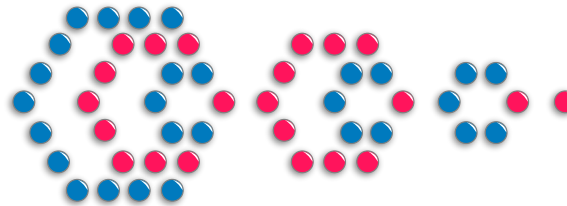
ماذا أتذكر؟

لقد انتقلنا اليوم من أولى البراهين البسيطة التي يستوعبها تلميذ المرحلة المتوسطة والمنجزة بأشكال هندسية إلى براهين تصاغ في مئات الصفحات، وتتطلب استخدام الحواسيب، ولا يمكن التأكد منها إلا من قبل عدد ضئيل من الخبراء المختصين. هذه المتتاليات المكونة من الأعداد والمثلة بنقاط كانت قد درست من قبل فيثاغورس، وديوفانتس، وأيضا من قبل باسكال. نجد في الحالة الثلاثية الأبعاد الأعداد الهرمية، والتكعيبية...

الأعداد الخماسية، والسداسية، ...

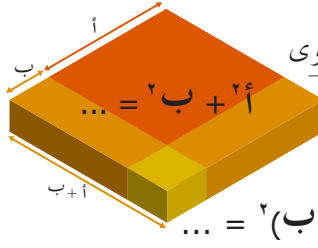
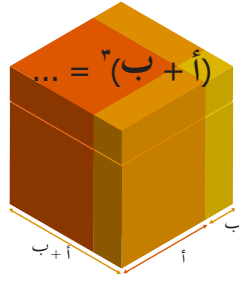
إنها مجاميع أولى الأعداد المثلثة على مضلع خماسي، أو سداسي... أوجدها، وأوجد القانون العام الذي يعطي مثل هذه الأعداد.

تأكد باعتبار أولى الأعداد الصحيحة أن كلا منها يكتب كمجموع ٥ أعداد خماسية على الأكثر، وكمجموع ٦ أعداد سداسية على الأكثر...



أعداد وأشكال

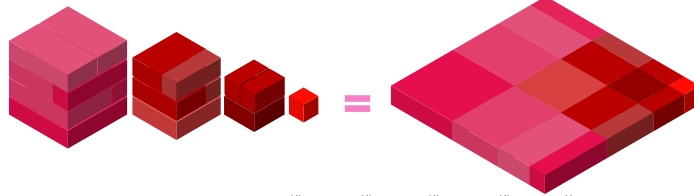
أنجز ذلك بنفسك



المستلزمات: قطع من خشب أو من الورق المقوى
جبر وهندسة

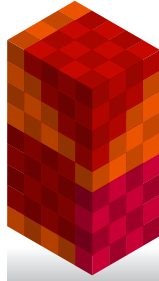
بهذه القطع اكتشف مجددا القانونين:

أوجد أيضا القانونين: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

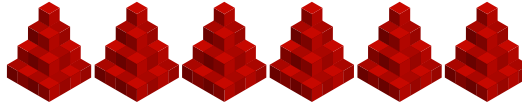


بهذه القطع أثبت أن:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



بهذه المجموعات الست التالية أنشئ برجا متراصا



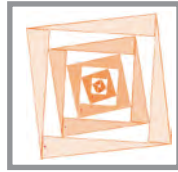
ثم أثبت النتيجة العامة القائلة إنه،
لكل عدد صحيح n ، لدينا القانون:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، قلم

من المخمنات إلى البراهين

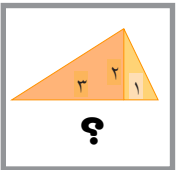


مثلثات فيثاغورس

أوجد أولى المثلثات القائمة التي أطوال أضلاعها أعداد صحيحة، اثنان منهما متواليان في كل مثلث (مثل ٣، ٤، ٥).
حاول إيجاد كل الثلاثيات من الأعداد الصحيحة التي تحقق هذه الخاصية.

مربعات فيرما Fermat

أوجد أولى الأعداد الأولية التي تكتب كمجموع مربعين عددين صحيحين (مثل $5 = 1^2 + 2^2$).
حاول أن تستنتج من ذلك كل الأعداد الأولية التي تكتب بتلك الطريقة.



مهن الرياضيات

إن أول نشاط لرجل العلم والباحث في الرياضيات هو إيجاد وصياغة مسألة "جيدة".

ما هي المسألة الجيدة؟

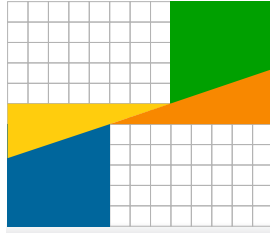
هي (كما يبدو أن وصفها ديفد هيلبرت David Hilbert خلال المؤتمر العالمي للرياضيات بباريس عام ١٩٠٠) مسألة يمكن أن يستوعبها أي تلميذ من مرحلة التعليم المتوسط! لكنها هي أيضا مسألة تسهم في تقدم المعارف، حتى لو استعصى حلها. وهكذا كان أمر آخر مخمّن لفيرما التي وفرت عديد النتائج قبل أن يبرهن عليها أندريو وايلز Andrew Wiles عام ١٩٩٤، أي ٣٥٠ سنة بعد وضع المخمنة.

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت: Figurative numbers - Integer sequences - Conjecture



هل هذا صحيح؟

١١٥



أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: مبركتان ب ٤ قطع

$$٦٣ = ٦٤ = ٦٥$$

بهذه القطع الأربع اصنع مربعاً، ثم مستطيلاً.

• ما هي مساحة كل منها؟

• وما مساحة السطح في البداية؟

سؤال: لماذا تظهر هنا أعداد متتالية فيبوناتشي؟

١١٦

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: نموذج يعاد إنشاؤه

توهم أم واقع؟

هل هذه الجسومات موجودة؟ هل يمكن إنشاؤها؟ الجواب موجود في إحدى مقولات الكاتب الفرنسي الساخر بيير داك Pierre Dac: « هذا يتوقف على وجهة النظر التي نبتناها ! ».



أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، قلم

من فيثاغورس إلى وايلز Wiles؟

تأكد من أن: $٣٦ = ٣٥ + ٣٤ + ٣٣$ $٣٩ = ٣٨٣ + ٣٦ + ٣١$ $٣٢٠ = ٣١٧ + ٣١٤ + ٣٧$
أوجد مكعبات أخرى تفكك إلى ٣ مكعبات.

ماذا أتذكر؟

كنا نعلم، قبل فيثاغورس، أنه توجد أعداد صحيحة تحقق:

$$س^٢ = ص^٢ + ع^٢$$

أوجد أعداداً أخرى من هذا القبيل مستثنياً (٠، ٠، ٠) و (٣، ٤، ٥).

كان بيير دي فيرما قد وضع عام ١٦٤١ مخمّنة تقول إن مكعباً ضلعه عدد صحيح لا يمكنه أن يفكك إلى مكعبين أضلاعهما أعداد صحيحة، وبصفة أعم فإن المعادلة:

$$س^٣ = ص^٣ + ع^٣$$

لا تقبل، عندما يكون ن أكبر من ٣ أو يساويه، حلولاً بأعداد صحيحة عدا (٠، ٠، ٠).

وقبل أن تثبت هذه النتيجة من قبل أندريو وايلز (بعد ٣٥٠ سنة من وضعها) كانت محل مخمّات جديدة: هل هي صحيحة؟ هل يمكن إثباتها؟ هل هي قابلة للبت؟

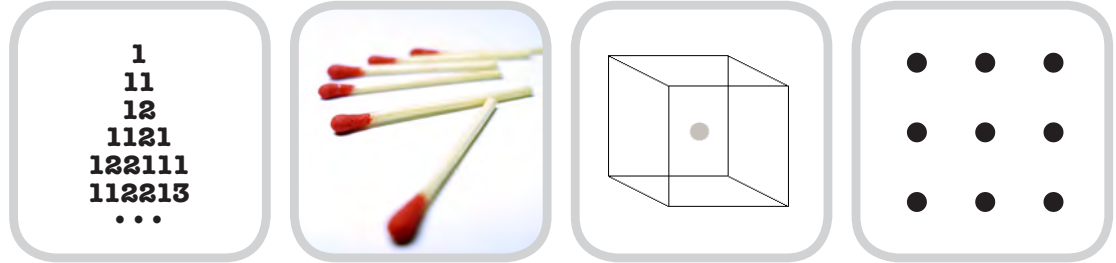


هل هذا صحيح؟

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق، قلم، ٦ عيدان كبريت

غيّر وجهة نظرك



• أوجد المتتالية ..

• أنجز مثلثا بـ ٣ عيدان كبريت، ومثلثين بـ ٥ عيدان ... و ٤ مثلثات بـ ٦ عيدان !

• في هذا المكعب ذي الوجوه الشفافة هناك ثقب. ما هو الوجه (الوجه) الذي يقع فيه هذا الثقب؟

• أربط هذه النقاط الـ ٩ بـ ٤ قطع مستقيمة بدون رفع القلم عن الورقة.

ماذا أتذكر؟

هذه المسائل تطرح في الاختبارات النفسية، وهو ما يبيّن بأن في الرياضيات، كما هو الشأن في الحياة العامة، ينبغي أن نكون «مرنين» وأن نتناول المسائل من كل زواياها.

مهن الرياضيات

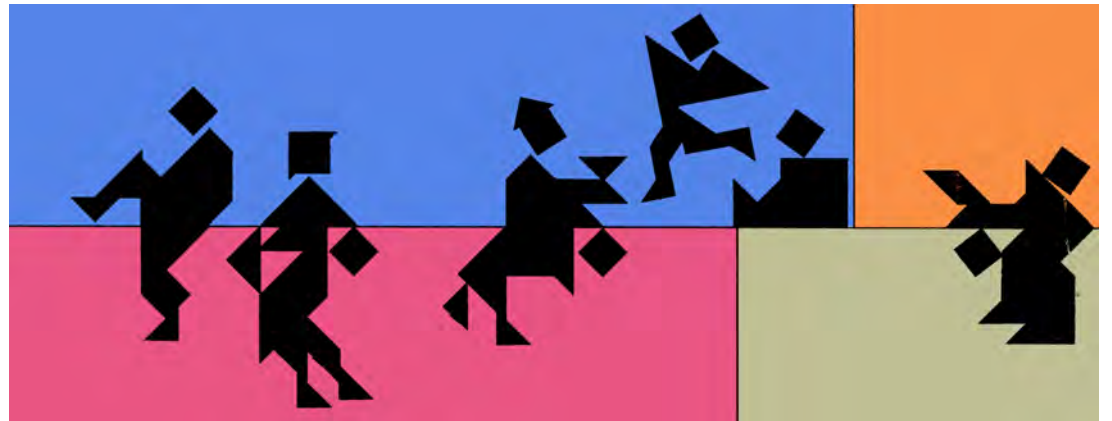
هل بالمستطاع أن نثبت في جميع الأحوال شيئا نعلم أنه واقع؟

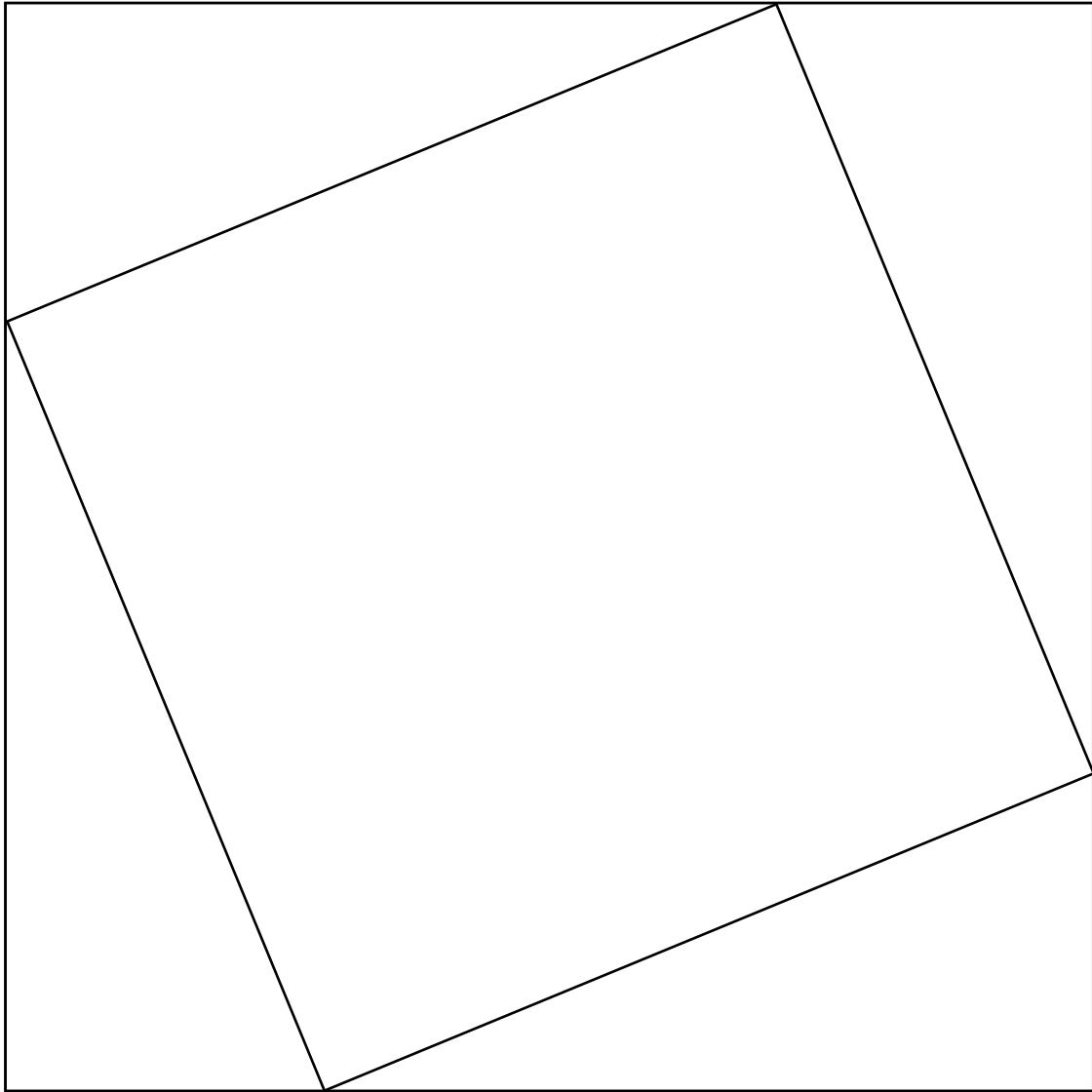
في عام ١٩٣١، أجاب كورت غودل Kurt Gödel بلا عن هذا السؤال ضمن نظريته الشهيرة المسماة «عدم الاكتمال».

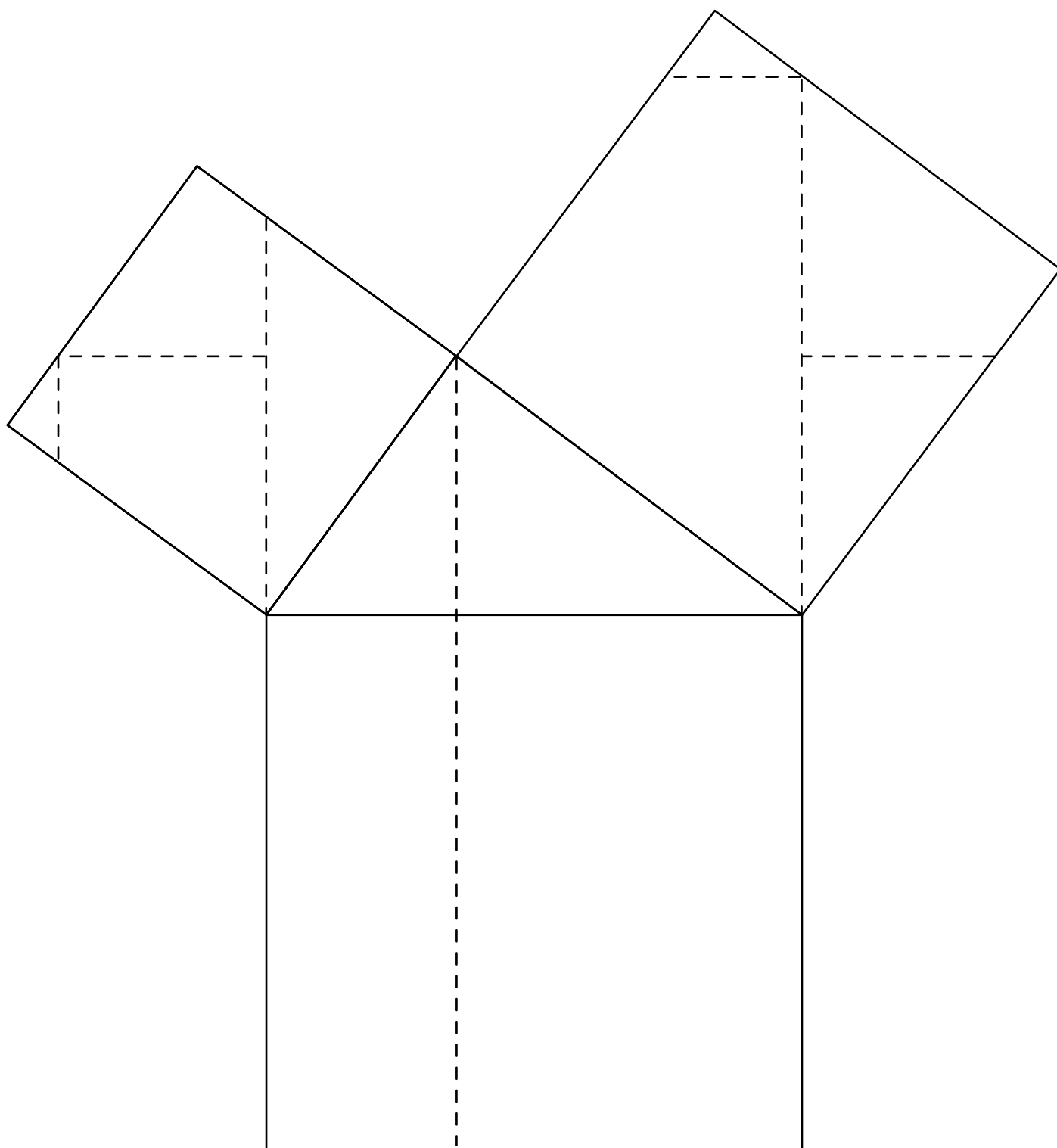
لقد أثبت أن مفهوم «الصواب» و «قابلية البرهان» ليسا متطابقين وذلك بالبرهان -باعتبار مثال حسابي- أن مخمّنة يمكن أن تكون صحيحة وفي نفس الوقت يستحيل البرهان عليها. ومنذ ذلك الحين صارت المسائل التي يُعتَقَد أنها غير قابلة للبت موضع بحث دائم في الرياضيات والمعلوماتية.

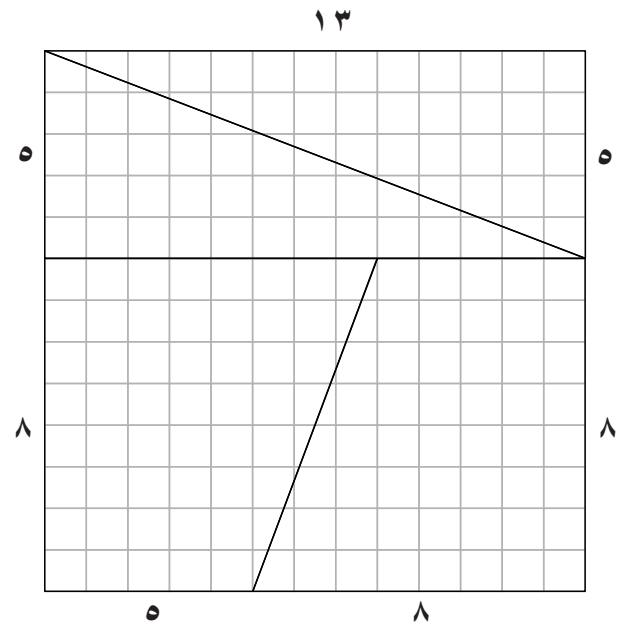
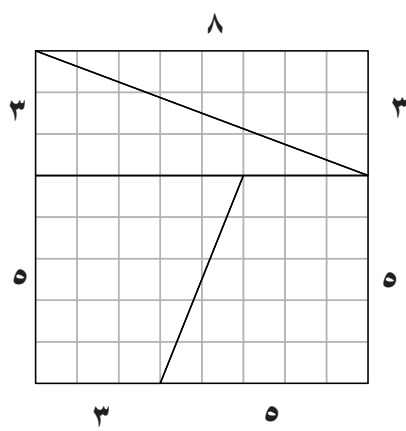
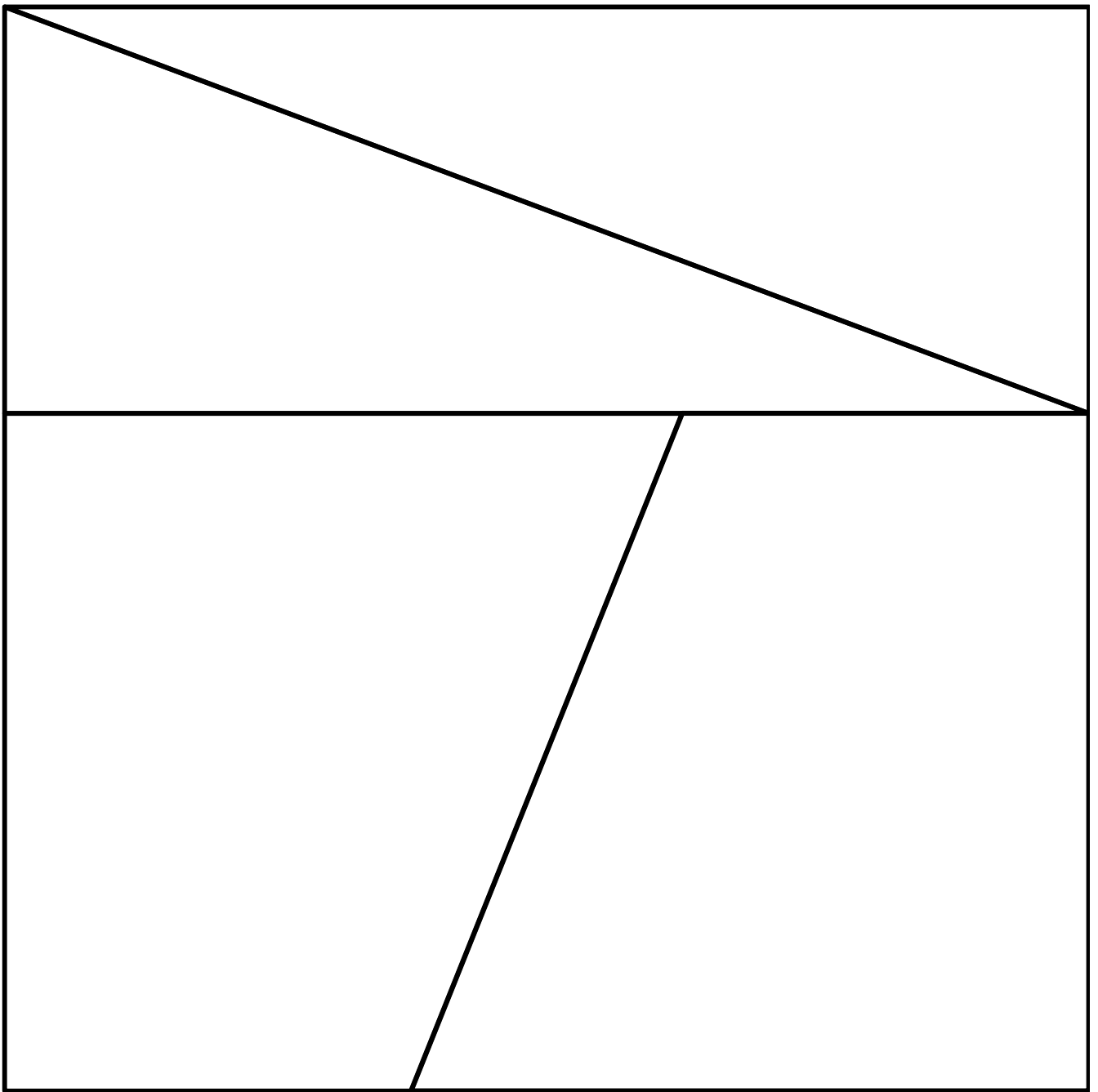
الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت:

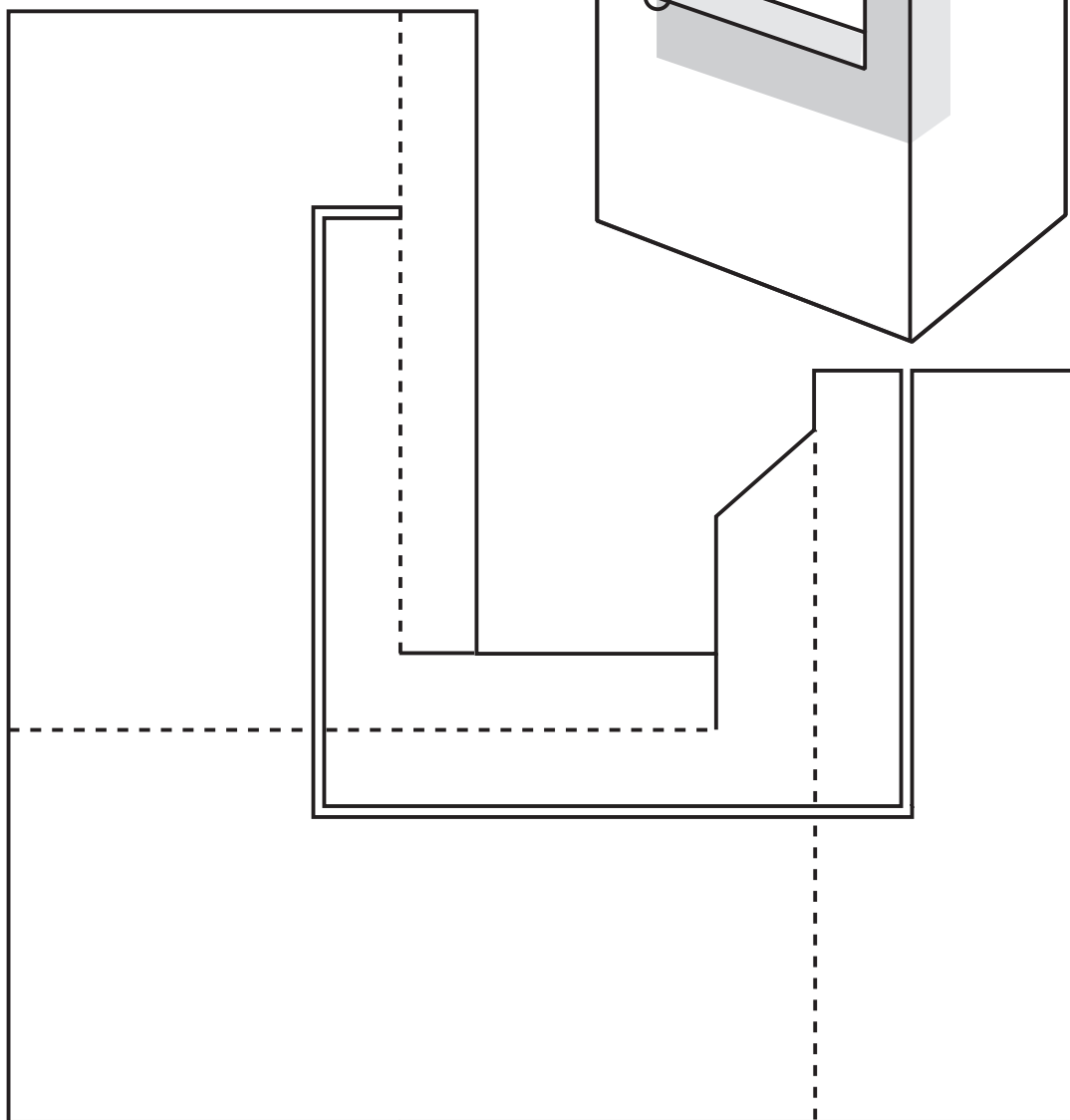
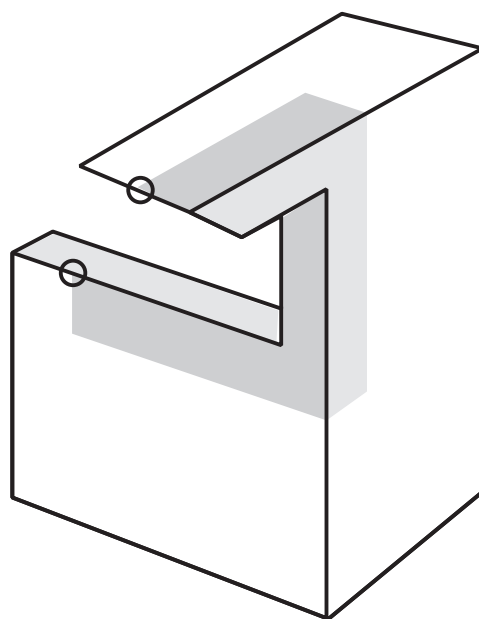
Undecidable - Calculable - Godel - P-NP Problems











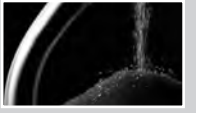


١٠. الخلاصة



جرب
ضع فرضيات
برهن!



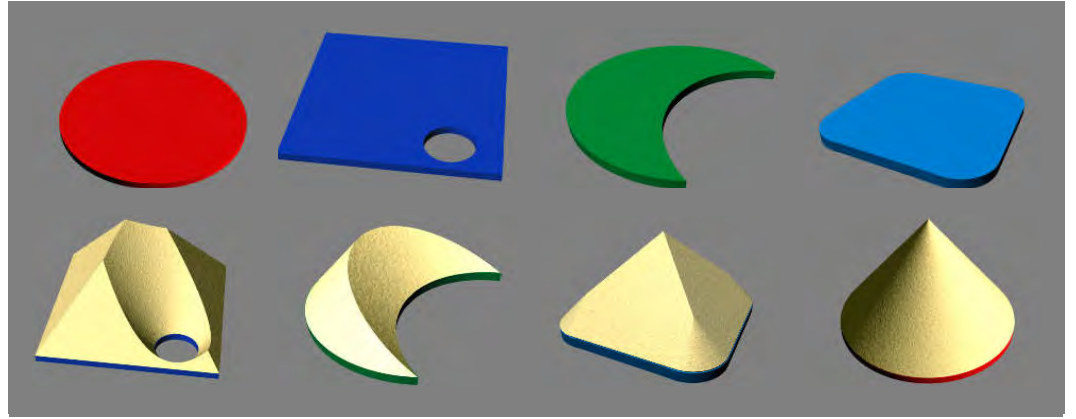


أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: مضلعات من الورق المقوى، ورق، ١ صندوق من الرمل الجاف والرفيع

هندسة أكوام الرمل

- اختر صفيحة. وصب فوقها الرمل حتى يغطيها.
- متى تحصل على هرم؟ مخروط؟
- أين يقع الرأس؟
- في الحالات الأخرى، ما هو شكل الوجوه؟
- كيف هو موقع الأحرف؟ والأحرف الموصولة بالرأس؟
- ماذا يحدث إن كان بالصفيحة ثقب؟



www.tasdesable.com

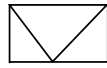
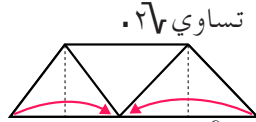
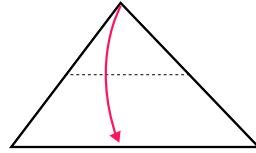
ماذا أتذكر؟

في كامل هذا الملف ما فتعنا نقدم لك سلسلة من الوضعيات حيث كان يطلب منك، وسيما من تلاميذك، القيام بالتجربة. هذه الوضعيات مقتبسة من أعمال رياضياتيين، وفيزيائيين، ومدرّسي الرياضيات وخبراء التربية والتدريس. نوجه لهم هنا كل الشكر. كما اقتبست من التجارب المقترحة في معرض «لما الرياضيات؟».

كل هذه الوضعيات يمكن إنجازها بوسائل جد بسيطة. والكثير منها يمكن أن تجد لها امتدادا باستخدام الحاسوب.

أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: أوراق بأبعاد A4، رسومات للطّي



الرياضيات والطّي

- ما هي أبعاد ورقة؟ كتلتها؟
- قم بطي ورقة طية واحدة. ما هي الأبعاد الجديدة؟
- تأكد من أنها متناسبة مع الأبعاد السابقة.
- تأكد من أن نسبة الطول على العرض تبقى ثابتة بعد كل طية وأن هذه النسبة تساوي $\sqrt{2}$.
- هل هذه النتيجة قائمة مهما كانت أبعاد الورقة التي نختارها في البداية؟
- لماذا نقول إن الورق من صنف ٨٠ غ (أو ١٢٠ غ، ١٥٠ غ، ...، ٢٥٠ غ)؟
- بهذه الأوراق كيف نحصل بواسطة الطي على مربع؟ مثلث متساوي الأضلاع...؟
- هل هذه الأشكال هي أكبر ما يمكن الحصول عليها؟

مجموع زوايا مثلث يعادل ١٨٠°

- تأكد أيضا من أن منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة مشتركة.
- قم بنفس العملية باعتبار الارتفاعات، المحاور...
- كيف نحصل على مضلع خماسي منتظم، مضلع سداسي؟

مهن الرياضيات

المسعى التجريبي هو من بين المساعي المستعملة عند رجال العلم. يمكن أيضا أن يكون ذلك هو مسعى الرياضياتيين الذين إذا ما طرحوا سؤالاً «جيدا» انكبوا على البحث فيه للوصول إلى بعض الأجوبة. في بعض المجالات العلمية، مثل الفلك وفيزياء الجزيئات، والبيولوجيا، يمكن أن يكون هذا المسعى مستحيل الإنجاز لأسباب عملية، أخلاقية...

مسعى مدرّس الرياضيات: تعلم اقتراح وضعيات تجريبية يقوم خلالها كل تلميذ بتبني أحد الأسئلة، ثم الاستحواذ عليه للبحث له عن أجوبة. مسعى التلميذ في مادة الرياضيات: تعلم كيف تتم صياغة الفرضيات، واختبارها، والبرهان على صحتها... أو خطئها.

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت: Experimental approach - Scientific methods



ضع فرضيات

للذهاب بعيدا أسئلة بسيطة، مسائل معقدة؟

الماء في العصير!

- كوبان يحتويان نفس الحجم، أحدهما من الماء والآخر من العصير.
- خذ ملعقة من الماء واسكبها في العصير واخلط.
- خذ ملعقة من المزيج واسكبها في الماء.
- أيهما أكبر: كمية الماء في العصير أو كمية العصير في الماء؟
- كيف تثبت فرضيتك؟



شريط موبوس Möbius

- اصنع سوارا بشريط ورقي. بضربتي مقصّ يمكنك أن تصنع منها ٣ أساور.
- اصنع سوار «موبوس» بجعل الشريط يعكس اتجاهه.
- كم ضربة مقصّ لازمة لتصنع من ذاك الشريط ٣ أساور؟



عُقد أولية

- أنجز كل عقدة من العقد التالية.
- ما هو أصغر عدد تقاطعات كل منها؟
- حاول إيجاد العقد الأولية بـ ٣، ٤... تقاطعات.



كيلوغرام من البنّ؟

- ١ كلف من الكريات يبلغ قطرها ١ سم.
- ١ كلف من الكريات يبلغ قطرها ١ ملم.
- أيهما يشغل حجما أقل من الآخر؟
- ماذا لو نعوّض الكريات بحبوب البن، أو بالبن المطحون؟



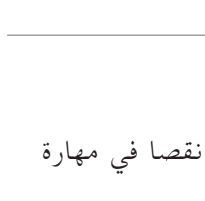
كيلوغرام من الأرز!

- كم عدد حبات الأرز في ١ كلف من الأرز؟
- قدم على الأقل طريقتين لإيجاد الحل.



ساعة!

- قضبان (أو حبلان) - رغم اختلافها - يحترق كل واحد منهما خلال ساعة.
- كيف نقيس ١/٤ ساعة؟ ١/٢ ساعة؟ ٣/٤ ساعة؟
- أوجد طريقة واحدة على الأقل.



مَهَن الرياضيات

«التعلم، هل يتمثل فقط في إدراك مدى جهلنا؟» (في «مينون» إفلاطون)

في الرياضيات، يظهر التلاميذ - سيما في المرحلة الثانوية، وحتى بعد هذه الفترة - نقصا في مهارة النقاش وفي القدرة على الإقناع بحجج رياضية ومنطقية. ولذلك عليهم تعلم كيفية التعبير عن مختلف نقاط حججهم، وكيفية شرح العلاقات المنطقية المؤدية إلى خاتمة آرائهم.

تعلم منهج الإثبات، هو تعلم أسلوب النقاش بتقديم حجج صحيحة رياضياتيا وعلميا. ومعرفة منهج الإثبات تعني أيضا معرفة ما هو البرهان، ثم اكتسابه وتكرار استعماله.

الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت: Debating - Method - Logics - Aristotle - Plato - Descartes

ماذا أتذكر؟

أسئلة بسيطة، مسائل معقدة؟

لقد قدمت الرياضيات على الدوام نصوص مسائل شيقة أو غريبة. ومن بين هذه المسائل المسلية فالبعض يطرح أسئلة جيدة، أي أسئلة يسمح البحث فيها أو الإجابة عنها بتسليط الضوء على قضية رياضية أو علمية أو على مسعى مهم في البرهان.

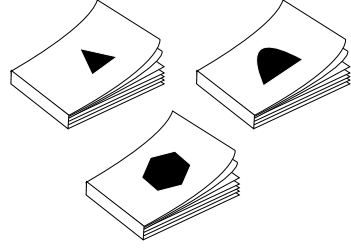
ويمكن أن يكون السؤال الجيد سؤالا يتيح اكتشاف النماذج الخفية للتلاميذ وجعلهم يدركون جانبها غير الفعال.

ذلك ما سعت إليه هذه الأسئلة هنا: الحفاظ على الكميات في موضوع الماء والعصير، الطبولوجيا في موضوع الشريط، النمذجة في السؤال الخاص بالبن، صنع عينات في موضوع الأرز، المنطق فيما يخص القضبان،...



أنجز ذلك بنفسك

المستلزمات: ورق مقوى للتقطيع، دفاتر رسوم متحركة («فليب بوك» Flip book) للإنجاز ١٢٥ ١٢٦ ١٢٧



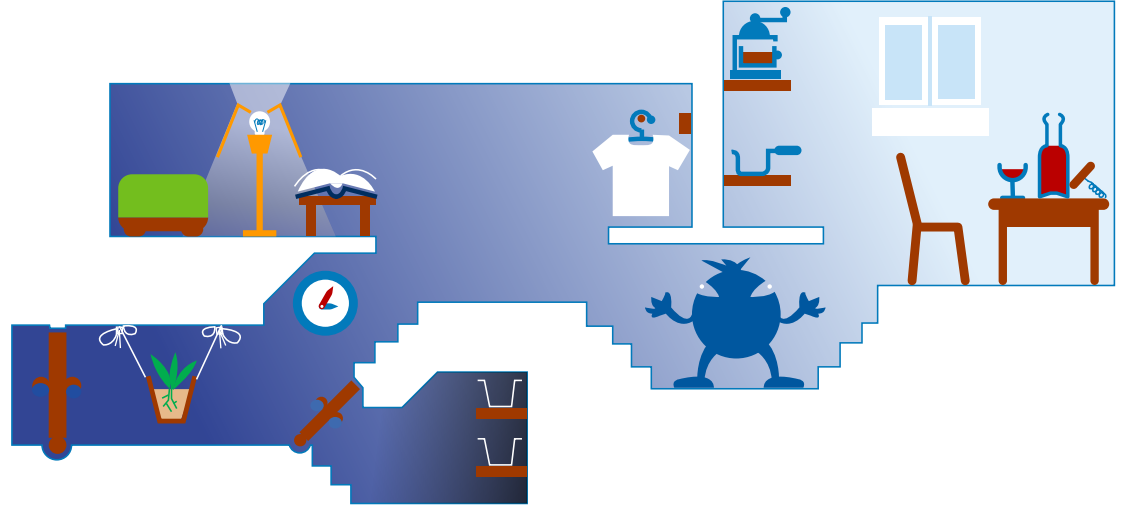
بلاد فلاتلاند (Flatland «الأرض المسطحة»): عالم مسطح

من أنا؟

أنجز بكل مجموعة دفتر رسوم متحركة.
يظهر كل دفتر الآثار التي يتركها كائن عبر شاشة مسطحة.
• عين، من أجل كل دفتر، ذلك الكائن؟

للذهاب بعيدا الحياة في بلاد فلاتلاند

هذا الرسم يمثل بيت أحد سكان كوكب خيالي ليس فيه سوى بعدين، حيث كل ما فيه مسطح!
• حاول أن تجد الأخطاء السبعة
• تخيل كائنات أخرى يمكن أن توجد -أو لا توجد- في هذا البلد المسطح.



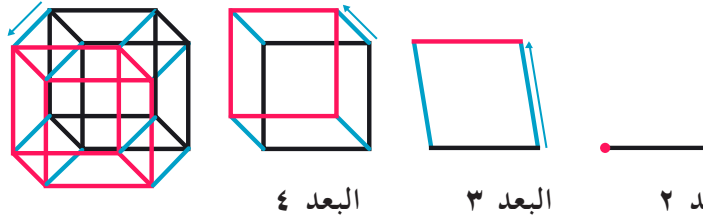
ماذا أتذكر؟

اقترح على التلاميذ مسعى تجريبي في الرياضيات لا ينحصر فقط في جعلهم يلامسون كائنات هندسية، وأعدادا، وحروفا.

ينبغي أن تسمح لهم هذه التجارب بامتلاك ناصية الوضعية (إنها مرحلة التجريب)، وبالتعبير شفويا أو كتابيا عن الفرضيات (إنها مرحلة الصياغة)، وتسمح لهم أخيرا بالتأكد من تلك الفرضيات (إنها مرحلة التصديق).

في هذه المقاربة التجريبية، تبقى هناك مرحلة أخيرة للمدرس: إبراز المكتسبات الرياضية التي جسدها التلاميذ، سواء كانت مكتسبات في المحتويات أو في سبل الاستدلال.

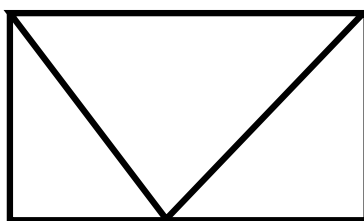
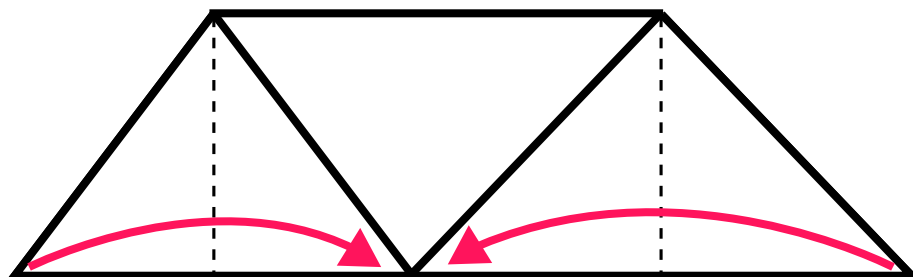
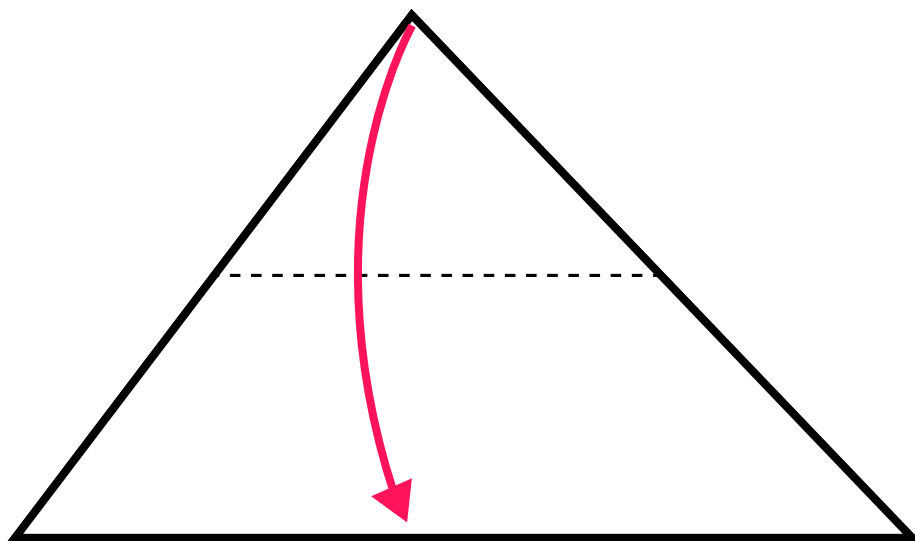
نحو البعد الرابع

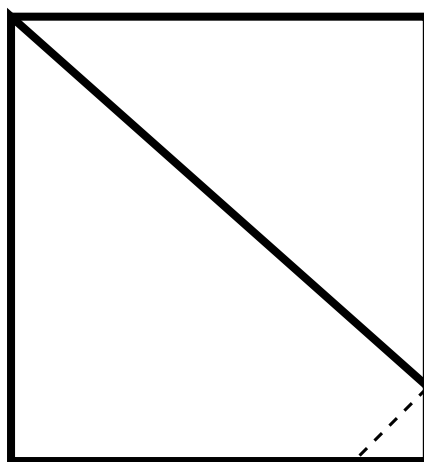
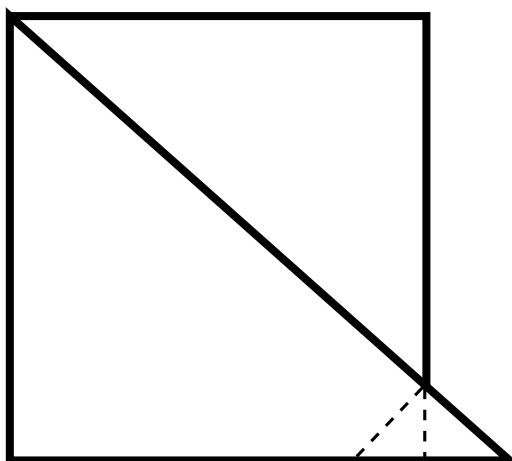
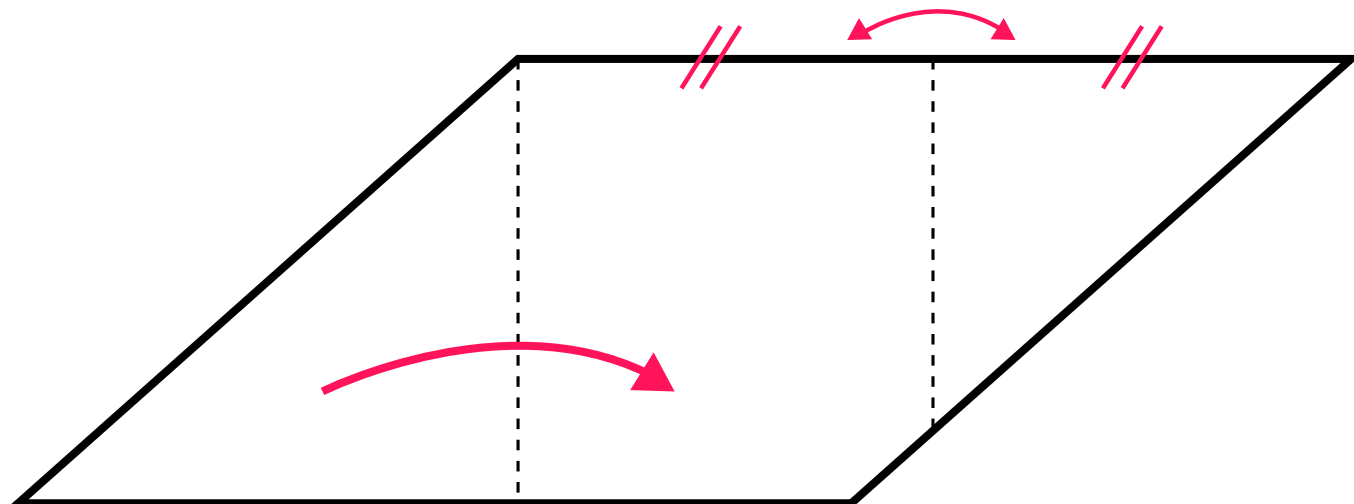


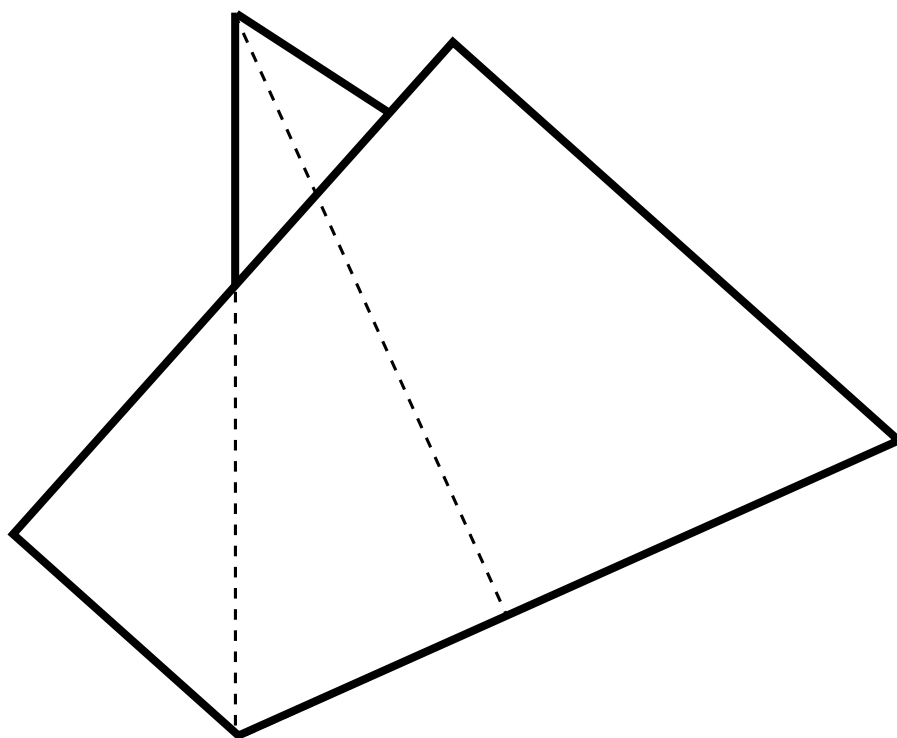
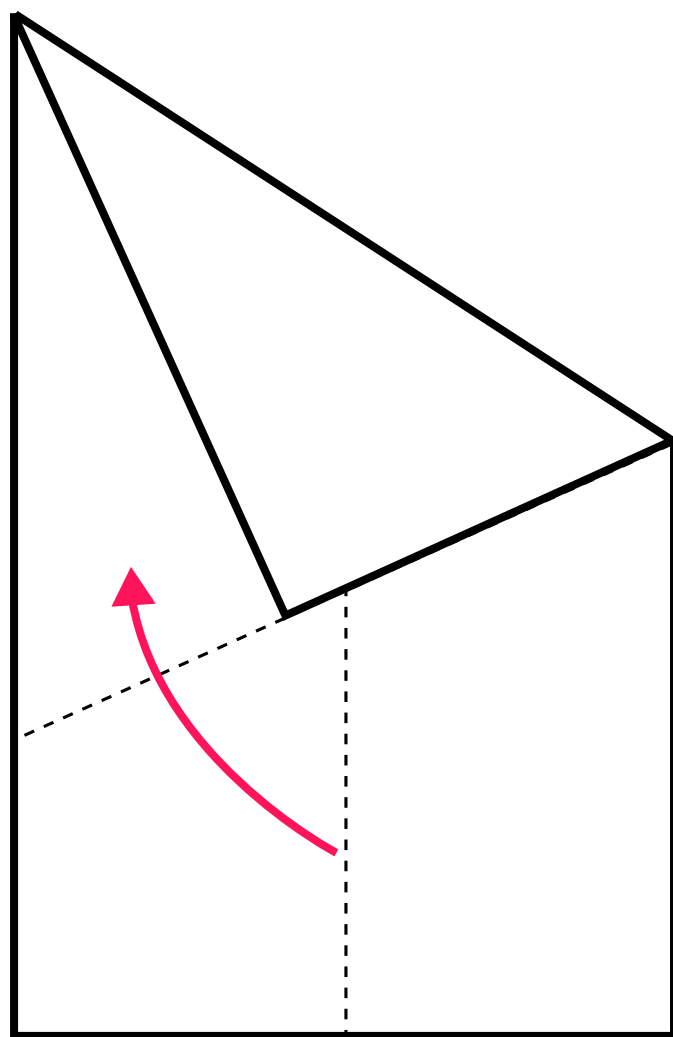
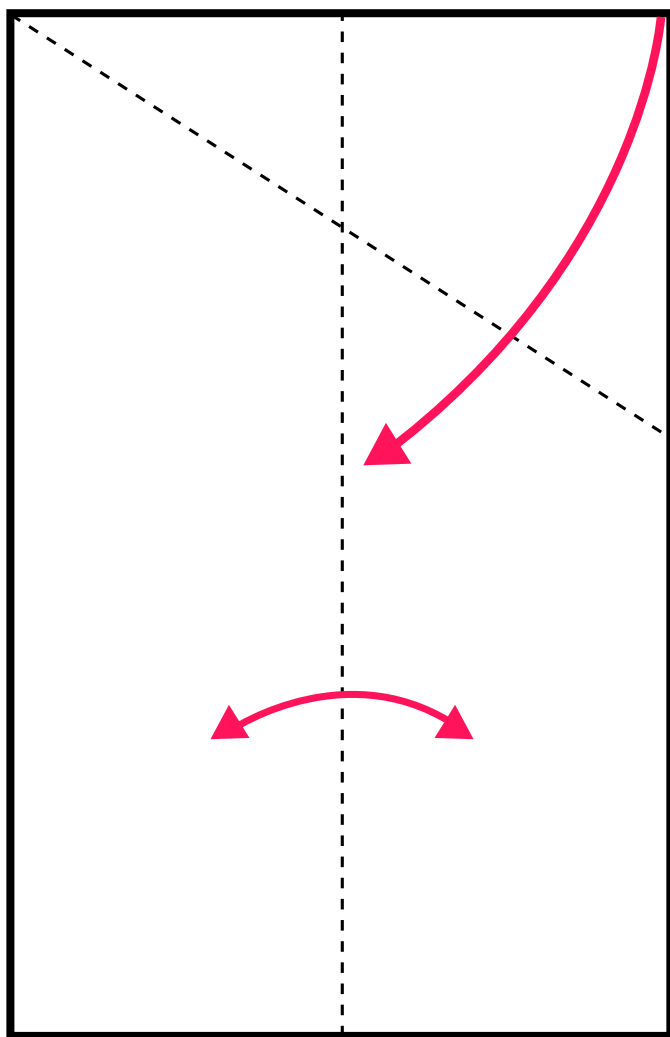
مهن الرياضيات

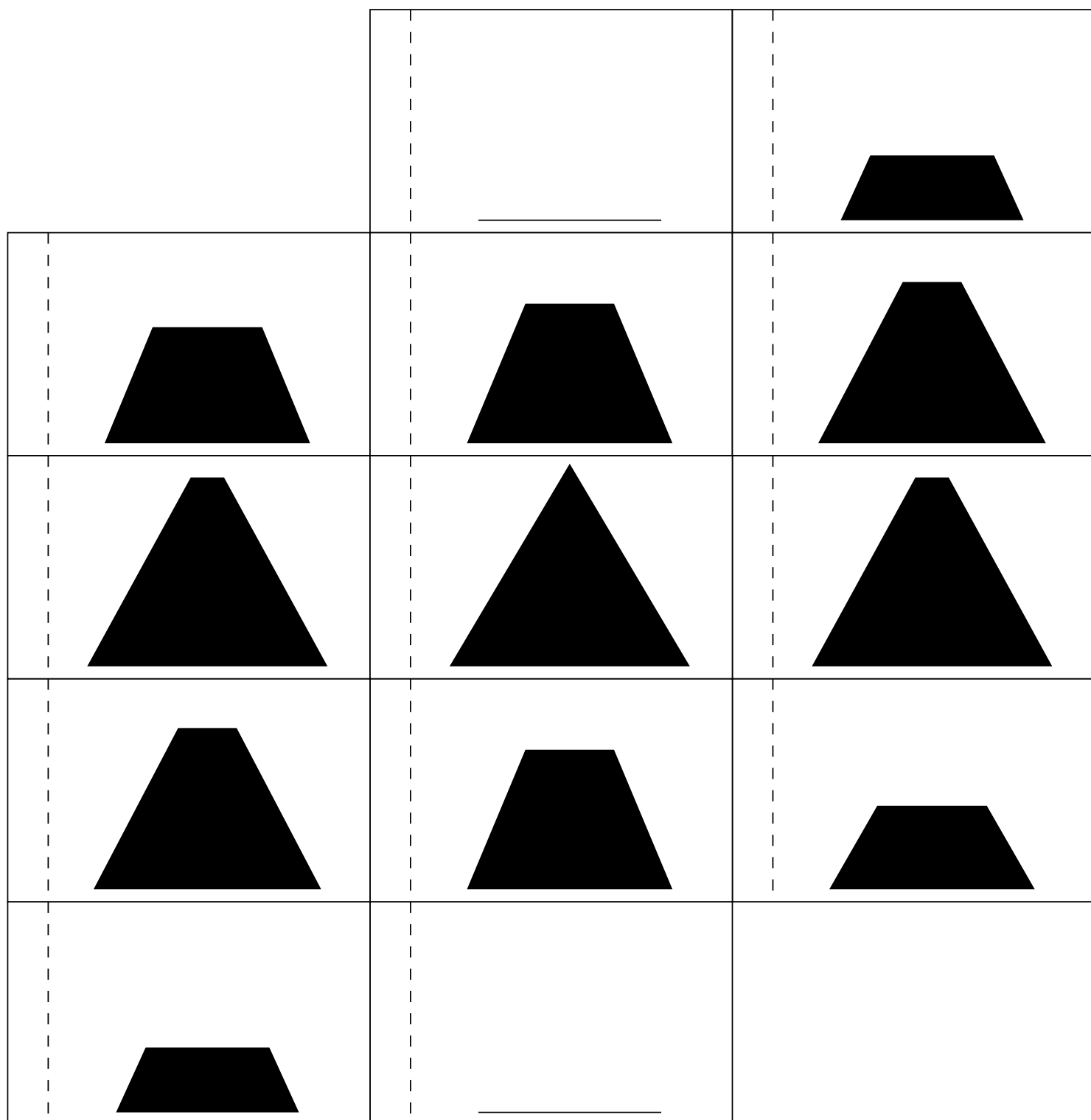
مدرس الرياضيات، يجب أن يتعلم -شأنه شأن الرياضي والفيزيائي وكل العلميين- كيف يبرهن، وخاصة كيف يلحق للتلاميذ فن البرهان، وكيف يناقشون، وكيف يقدمون في سبيل ذلك الحجج اعتمادا على أدوات رياضية: الحقائق الرياضية والمنطق الرياضي.
ينبغي تعلم كيف نثبت أن حلا ما موجود أو غير موجود، وأن نصا ما نص صحيح أو خاطئ، أو -وهذا أصعب على التلميذ في هذه المرحلة من معارفه- أنه يتعذر إيجاد البرهان.

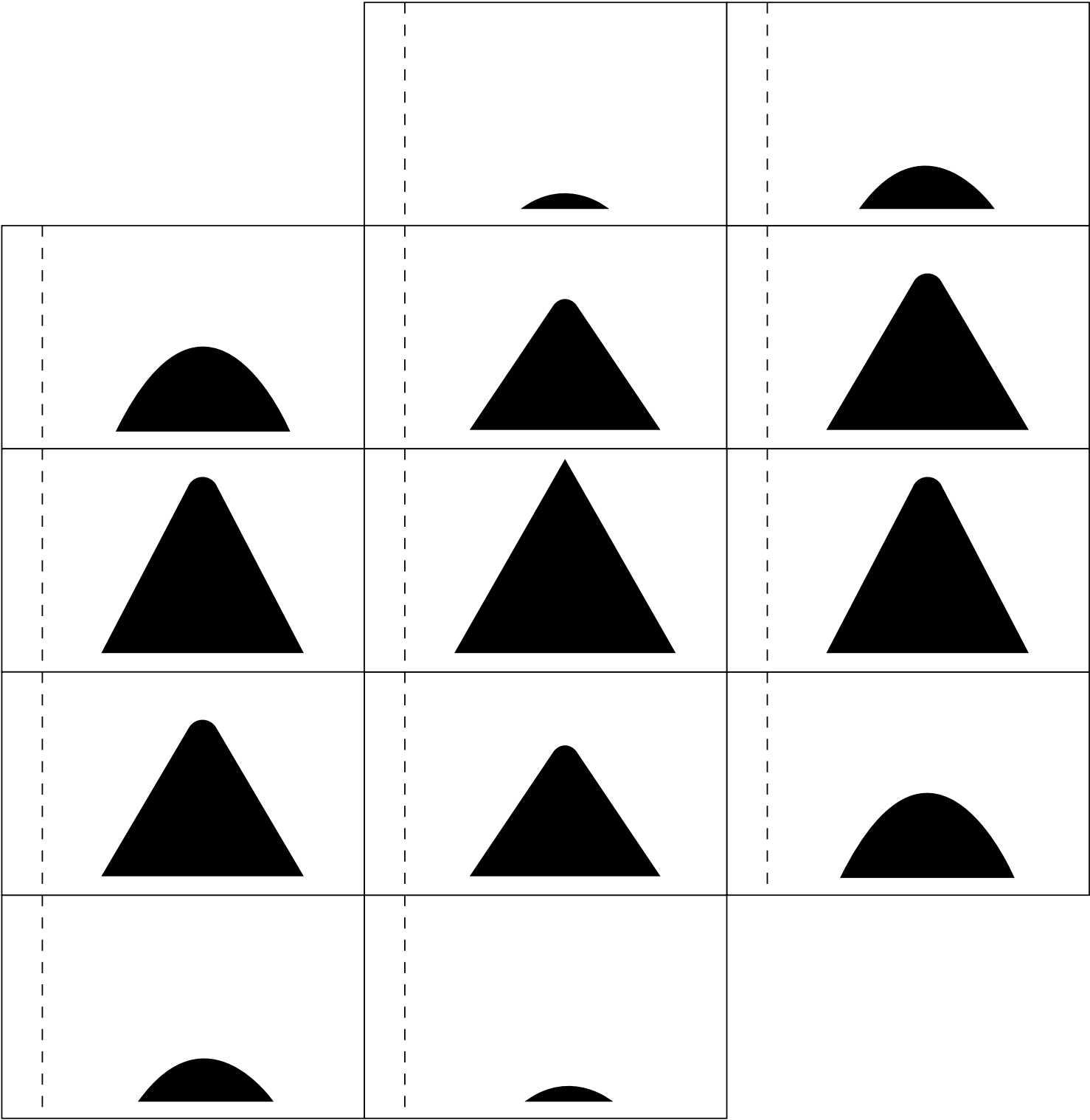
الكلمات المفتاحية لمواقع الإنترنت: Mathematics - Mathematics teacher - Mathematician

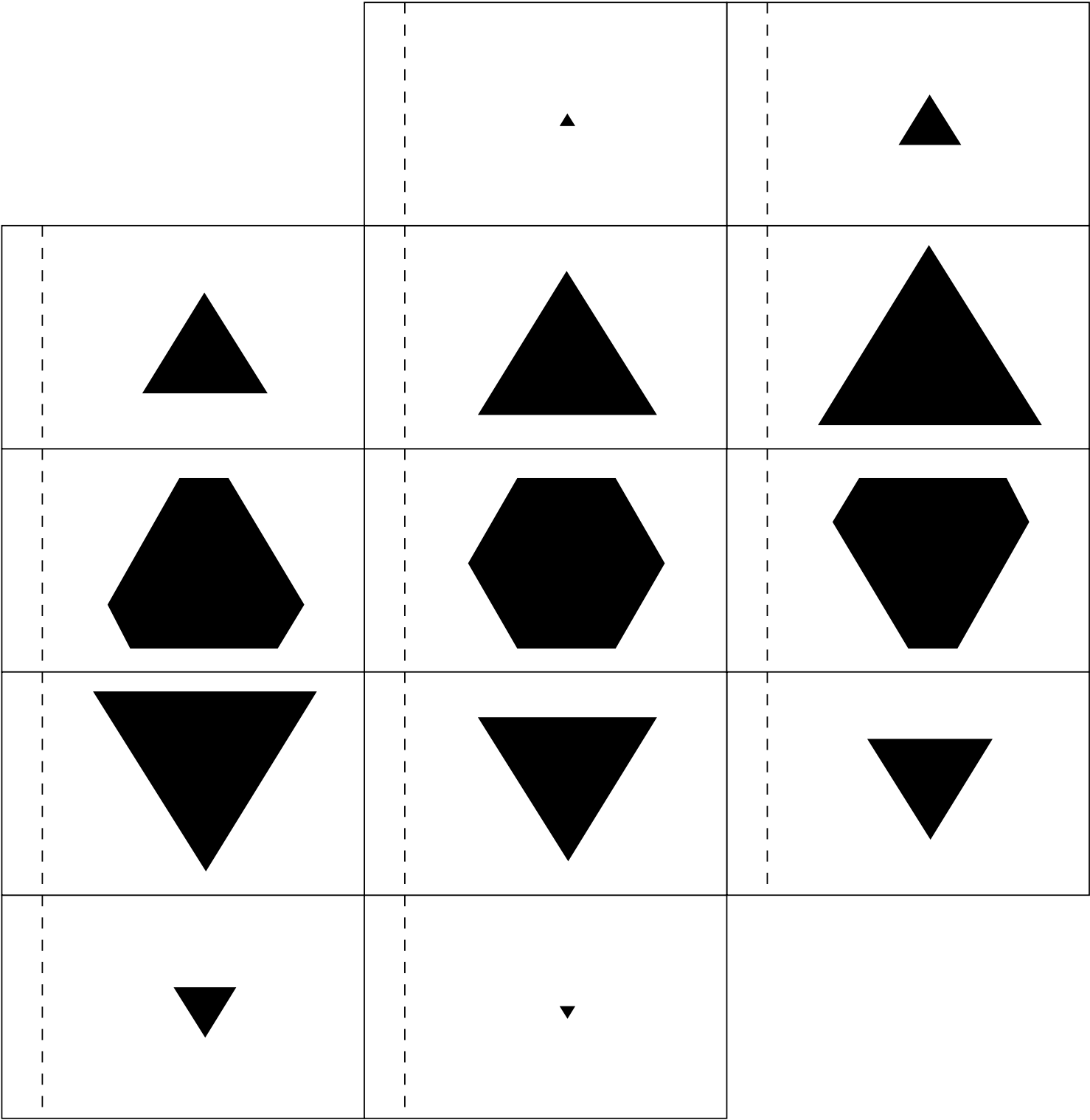














أُنجزت النسخة العربية وأدمجت
في الموقع من قبل مدينة الملك
عبد العزيز للعلوم والتقنية
(الرياض)



مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

صمم وأنجز هذا المعرض الافتراضي بمبادرة من ألكسندروس ك. مكاريجاكيكس Alexandros K. Makarigakis (اليونسكو، وينهوك Windhoek) ومن «مركز العلوم» Centre•Sciences وجمعية أديكوم Adecum.

وقد استفاد المعرض من ملاحظات وانتقادات وإسهامات كل من شارك فيه بصفة مباشرة:

Sophie Auger-Léger (Orléans), Jean Brette (Paris), Marie Laure Darche-Giorgi (Orléans), Bento Louro (Lisbonne), Marta Macho-Stadler (Bilbao), Benoit Matrimon (Orléans), Antony Templier (Orléans), Boubaker-Khaled Sadallah (Alger).

كما أن هناك أعمالاً في التعليمية وفي تبسيط العلوم لـ

Guy Brousseau (Bordeaux), Etienne Guyon (Paris), Claude Janvier (Montréal), Richard Pallascio (Montréal), Antonio Pérez Sans (Madrid), André Rouchier (Bordeaux), Gérard Vergnaud (Paris). فليقبلوا كلهم هنا شكرنا الجزيل.

صمّم المعرض انطلاقاً من المعرض التفاعلي «لما الرياضيات؟» الذي أخرج تحت الإشراف العلمي لـ: Minella Alarcon، مسؤولة العلوم الأساسية باليونسكو Mireille Chaleyat-Maurel نائبة رئيس لجنة RPAMaths، (توعية الجمهور بالرياضيات) التابعة لجمعية الرياضيات الأوروبية (EMS).

وبالتعاون مع

Jin Akiyama، جامعة توكاوي Tokai، اليابان، Michèle Artigue، رئيسة اللجنة العالمية لتدريس الرياضيات (ICMI)، Jean Brette، «قصر الاكتشافات» Palais de la Découverte، باريس، Michel Darche، «مركز العلوم» Centre•Sciences، أورليون Orléans، فرنسا Mari-Jo Ruiz، جامعة أتينيوي دي مانيلا Ateneo de Manila، الفلبين، Gérard Tronel، السنة العالمية للرياضيات، باريس.

تصميم وتنسيق: Adecum & Centre•Sciences – Michel Darche
برمجة وتطويرات تفاعلية: Antony Templier – www.sotodesign.org (Orléans)
رسومات: Benoît Matrimon – www.tvwar.org (Orléans).

ترجمة: • الأنكليزية: Orléans، Sophie Auger-Léger

• الكتالانية: Universitat Autònoma de Barcelona، A. Gasull & G. Guasp
• الإسبانية: Universidad del País Vasco - Bilbao، Marta Macho Stadler
• البرتغالية: Universidade Nova de Lisboa، Bento Louro
• العربية: أبو بكر خالد سعد الله، المدرسة العليا للأساتذة – القبة – الجزائر.

© إسهامات وإعتمادات الصور والرسومات التوضيحية:

centre sciences • adecum • 99.9 sarcone • wikipedia • Dbenbenn GNU • nasa • antony templier • benoit matrimon • Fotolia.com : • Remo Liechti • Sandra Carmona • Federico Romano • goce risteski • Julien Eichinger • Udo Kroener • Isabelle Barthe • arnowssr • photo-dave • Denis Pepin • Eric Isselée • VisualField • Philippe Devanne • Creativeye99 • Roman Sakhno • Vieloryb • Rich Johnson • Andrzej Tokarski • Marko Plevnjak • Alexey Klementiev • Olga Shelego • Allein • Christophe Villedieu • Jose Gil • FranckBoston • choucashoot • Marvin Gerste • Tjall • Guillermo lobo • Elena Elisseeva • Forgiss • Francois Doisnel • Mariano Ruiz • Zoran Karapancev • LVI • Claudio • Tad Denson • Alx • tdoes • piccaya • Monika Lassaud • Paco Ayala • Emilia Kun • Peterfactors • Thierry Burot • Martine Wagner • Philip Lange • Sascha Burkard • Terry Morris • Detlef Gwinner • Kenneth Groms • Paul Bodea • Guy Pracros • Eric Gevaert • Emin Ozkan • imagine • Khayel • Michael Drager • Gabriel Moisa • Tatiana • Sébastien Lagrée • Caroline Duhamel • Sam Richter • Pawel Bielecki • Alexandre Quillet • Stanisa Martinovic • Yurok Aleksandrovich • Martina Misar • Steven Pepple • Edouard Hardy • Danielle Bonardelle • Mauro Rodrigues • Sébastien Russier • Orlando Florin Rosu • Francois Doisnel • Leonid Karchevsky • Rob Byron • Natalia Pavlova • mrkeenano • danimages • Gérard.Kremmer • Petr Gnuskin • Udo Kroener • trialart.info • Joel Bramley • Steve Thompson • Stephen Sweet • shocky • Nikontofeur • Eric Isselée • auris • David G • Jordi Soro • Jason Stitt • Indigo • milosluz • AndreasG • Bruce Shippee • Zimon • Jimmythecure • Claudio Calcagno • Stephen Coburn • cmapuk_Online • Martine Lefebvre • ordus • Shutterstock.com

للاتصال: Centre•Sciences@wanadoo.fr

الرياضيات
التجريبية